

1. GYAKORLAT - Elemi differenciálegyenletek, primitív függvények

A differenciálegyenleteket tárgyaló szakaszban $\dot{x}(t)$ a $t \rightarrow x(t)$ hozzárendeléssel adott függvény t -beli deriváltját jelöli.

1. Az előadásról ismert $\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = (\ln |x(t)|)'$ azonosság felhasználásával igazoljuk, hogy adott $k \in \mathbb{R}$ esetén az $\dot{x}(t) = kx(t)$ differenciálegyenlet általános megoldása $x(t) = Ce^{kt}$, ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

2. Adjuk meg az előző feladat eredménye alapján a következő feladatok megoldását!

$$(a) \begin{cases} \dot{x}(t) = kx(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} \dot{x}(t) = kx(t) \\ x(1) = x_1 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) \\ x(0) = 4 \end{cases} \quad (d) \begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{x(t)}{2} \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

3. Rajzoljunk fel $k = -1$ esetén az 1. feladat megoldását adó grafikonokat. Igaz, hogy ezek az egész $\mathbb{R}^2$ halmazt lefedik?
4. Alkalmas új függvény bevezetésével adjuk meg a következő differenciálegyenletek általános megoldását!

$$(a) \dot{x}(t) = x(t) + 1 \quad (b) \dot{x}(t) = x(t) + 1 \quad (c) \dot{x}(t) = 1 - 2x(t) \quad (d) \dot{x}(t) = 3x(t) - 1$$

5. Oldjuk meg a fenti differenciálegyenletekre vonatkozó következő kezdeti érték feladatokat!

$$(a) \begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + 1 \\ x(1) = 2e - 1 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} \dot{x}(t) = 2x(t) - 1 \\ x(0) = 3 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} \dot{x}(t) = 3x(t) - 1 \\ x(1) = 2x(0) \end{cases} \quad (d) \begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) \\ x(1) = x(0) + 1 \end{cases}$$

6. Adott f valós függvény esetén hány olyan F valós függvény lehet, amelyre $F' = f$ teljesül?

7. Van-e olyan F valós függvény, amelyre $F'(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \neq 0 \\ 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$ teljesül?

8. A következő feladatokban az egyes f függvényekhez keressünk egy olyan F függvényt, amelyre $F' = f$ teljesül!

$$(a) \quad f(x) = -6, \quad f(x) = 2x, \quad f(x) = x^2, \quad f(x) = x^3 + 1, \quad f(x) = 1 - 2x$$

$$(b) \quad f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}, \quad f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f(x) = \frac{1}{(2x-1)^2}, \quad f(x) = \frac{1}{(1-\frac{x}{2})^3}$$

$$(c) \quad f(x) = \cos x, \quad f(x) = \sin x, \quad f(x) = \cos 2x, \quad f(x) = x - \sin 2x, \quad f(x) = \sin(1 - \frac{x}{2})$$

$$(d) \quad f(x) = e^x, \quad f(x) = e^{-x}, \quad f(x) = e^{1-\frac{x}{2}} - 1, \quad f(x) = 3e^{2x}, \quad f(x) = 2^x$$

$$(e) \quad f(x) = \frac{1}{x}|_{\mathbb{R}^+}, \quad f(x) = \frac{1}{x}|_{\mathbb{R}^-}, \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad f(x) = \frac{1}{1-2x}, \quad f(x) = 1 + \frac{1}{x+1}$$

$$(f) \quad f(x) = \operatorname{sh} x, \quad f(x) = \operatorname{ch} x, \quad f(x) = \operatorname{sh} 2x, \quad f(x) = \operatorname{ch} \left(\frac{x}{2} + 1\right), \quad f(x) = 2 \operatorname{sh}(1 - x)$$

$$(g) \quad f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad f(x) = \frac{3}{\cos^2(1-x)}, \quad f(x) = \frac{4}{\sin^2 2x}, \quad f(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

$$(h) \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2+2x+2}, \quad f(x) = \frac{1}{1+4x^2}, \quad f(x) = \frac{1}{4+x^2}, \quad f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$