

10. GYAKORLAT - határérték, folytonosság, parciális deriváltak, gradiens, Jacobi-mátrix, divergencia, rotáció

1. Tudjuk, hogy a $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény olyan, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $y \rightarrow g(x, y)$ affin lineáris és hasonlóan minden $y \in \mathbb{R}$ esetén $x \rightarrow g(x, y)$ affin lineáris.

(a) Mit jelent ez szemléletesen?

(b) Igaz-e, hogy ekkor $g(x, y) = ax + by + c$ alakú valamilyen valós a, b, c paraméterek esetén?

2. Számítsuk ki a következő határértékeket!

$$(a) \lim_{|(x,y)| \rightarrow 1} e^{x^2+y^2} \quad (b) \lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} xy \quad (c) \lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} |x| + |y| \quad (d) \lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} x + y$$

$$(e) \lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} x^4 + y^4 \quad (f) \lim_{\substack{|(x,y)| \rightarrow \infty \\ x \geq 1, y \geq 1}} x + y \quad (g) \lim_{\substack{|(x,y)| \rightarrow \infty \\ x+y=1}} xy \quad (h) \lim_{\substack{|(x,y)| \rightarrow \infty \\ xy > 0}} xe^{-y}$$

3. Vizsgáljuk meg, igazak-e a Bolzano-tétel alábbi általánosításai! Itt intervallumon az előző feladat-sorban definiált $\mathbb{R}^d$ -beli intervallumot értjük.

(a) Ha $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ folytonos az $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon, továbbá $\mathbf{c} \in [f(a), f(b)] \subset \mathbb{R}^d$ tetszőleges, akkor van olyan $x \in [a, b]$, hogy $f(x) = \mathbf{c}$.

(b)* Ha $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos az $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \subset \mathbb{R}^d$ intervallumon, továbbá $c \in [f(\mathbf{a}), f(\mathbf{b})] \subset \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor van olyan $\mathbf{x} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, hogy $f(\mathbf{x}) = c$.

4. Számítsuk ki a következő határértékeket!

$$(a) \lim_{|(x,y)| \rightarrow 1} e^{x^2+y^2} \quad (b) \lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} xy \quad (c) \lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} |x| + |y| \quad (d) \lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} x + y$$

$$(e) \lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} x^4 + y^4 \quad (f) \lim_{\substack{|(x,y)| \rightarrow \infty \\ x \geq 1, y \geq 1}} x + y \quad (g) \lim_{\substack{|(x,y)| \rightarrow \infty \\ x+y=1}} xy \quad (h) \lim_{\substack{|(x,y)| \rightarrow \infty \\ xy > 0}} xe^{-y}$$

5. Határozzuk meg a következő hozzárendeléssel adott függvények első, második (és harmadik) változója szerinti parciális deriváltjait!

$$(a) f(x, y) = x + 2y \quad (b) f(x, y) = e^{2xy} \quad (c) f(x, y) = x \cdot \sin(2x - y) \quad (d) f(x, y, z) = z \cdot e^{x^2+y^2}$$

6. Határozzuk meg a következő differenciáloperátorok értékét a megadott helyen!

$$(a) \nabla f(1, 0), \text{ ahol } f(x, y) = x + 2y \quad (b) \nabla f(1, 1), \text{ ahol } f(x, y) = e^{-x^2+y^2}$$

$$(c) \nabla \cdot \mathbf{f}(1, 1, 0), \text{ ahol } \mathbf{f}(x, y, z) = (x, x, 2zx) \quad (d) \nabla \cdot \mathbf{f}(0, 0), \text{ ahol } \mathbf{f}(x, y) = (x^2y + y^3, -x^3 - xy^2)$$

$$(e) \nabla \times \mathbf{f}(1, 1, 0), \text{ ahol } \mathbf{f}(x, y, z) = (x, x, zx) \quad (f) \nabla \times \mathbf{f}(1, 1, 1), \text{ ahol } \mathbf{f}(x, y, z) = (z, 1, y)$$

$$(e) \nabla \mathbf{h}(1, 1, 0), \text{ ahol } \mathbf{h}(x, y, z) = (x, x, 4zx) \quad (f) \nabla \mathbf{h}(0, 0), \text{ ahol } \mathbf{h}(x, y) = (xe^y, e^{2y})$$

7. Igazoljuk a következő azonosságokat abban az egyszerű esetben, amikor feltesszük, hogy mindkét oldal értelmes! Itt $v : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{w} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ típusú függvények, és az egyenlőség úgy értendő, hogy ha léteznek, akkor minden helyen azonosak.

$$(a) \nabla \cdot (v\mathbf{w}) = \langle \nabla v, \mathbf{w} \rangle + v \nabla \cdot \mathbf{w} \quad (b) \nabla \cdot \nabla v = \partial_{11}v + \partial_{22}v + \cdots + \partial_{dd}v (:= \Delta v)$$

$$(c) \nabla \times (\nabla v) = 0, \text{ ahol } d = 3 \quad (d) \nabla \cdot (\nabla \times v) = 0, \text{ ahol } d = 3.$$

8. Egy $\mathbf{w} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ függvényre teljesül, hogy $\nabla \times \mathbf{w} = 0$ és $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$, abból következik-e, hogy ez konstans?

9. Valaki a $\mathbf{w} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény második deriváltját akarja meghatározni egy pontban úgy, hogy a Young-tételt alkalmazni lehet. Ehhez hány parciális deriváltat kell kiszámolnia?
10. Adjuk meg a következő hozzárendeléssel adott függvények grafikonját az (x_0, y_0) pontban érintő síkok egyenletét!
- (a) $f(x, y) = 2xy$, $(x_0, y_0) = (1, 2)$ (b) $f(x, y) = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$, $(x_0, y_0) = (2, -1)$
- (c) $f(x, y) = \frac{1}{2x+y}$, $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, 0)$ (d) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$
11. Igazoljuk, hogy az $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ hozzárendeléssel adott függvény esetén $\partial_1 \partial_2 f(0, 0) \neq \partial_2 \partial_1 f(0, 0)$.
Használjuk fel, hogy definíció szerint

$$\partial_2 \partial_1 f(0, 0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\partial_1 f(0, \delta) - \partial_1 f(0, 0)}{\delta} \quad \text{és} \quad \partial_1 \partial_2 f(0, 0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\partial_2 f(\delta, 0) - \partial_2 f(0, 0)}{\delta}.$$