

11. GYAKORLAT - kompozíciófüggvény deriválása, Taylor-közelítés, szélsőértékszámítás bevezetése

- Legyenek $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ az $\mathbf{x}$ pontban deriválható függvények! Adjunk formulát az $(fg)'(x)$ -re vonatkozólag!
- Legyen $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ adott. Számítsuk ki az $\mathbf{x} \rightarrow \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ hozzárendeléssel adott függvény deriváltját az $\mathbf{x}$ helyen!
- Számítsuk ki a következő hozzárendeléssel definiált függvények másodrendű Taylor-közelítését a megadott pontokban!
 - $f(x, y) = xe^{xy}$ $(0, 0)$ körül
 - $f(x, y) = \ln(x + xy + 1)$ $(0, 0)$ körül
 - $f(x, y) = \frac{6x}{x+y}$ $(1, 1)$ körül
 - $f(x, y) = x \cos xy$ $(1, 0)$ körül
 - $f(x, y, z) = x - yz + zx$ $(1, 0, 1)$ körül
 - $f(x, y, z) = \frac{6xz}{x+y-z}$ $(1, 1, 0)$ körül
- Írjuk át az $\partial_x u(x, y) - 2\partial_y u(x, y) = 1$ egyenletet az $r = 2x + y$ és $s = 2x - y$ változókat bevezetve!
- Felhasználva, hogy a kétdimenziós $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ és $\phi = \arctan \frac{y}{x}$ polárkoordinátákat bevezetve tetszőleges deriválható $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre

$$\partial_x u = \cos \phi \partial_r u - \frac{\sin \phi}{r} \partial_\phi u \quad \text{és} \quad \partial_y u = \sin \phi \partial_r u + \frac{\cos \phi}{r} \partial_\phi u.$$

Igazoljuk, hogy

$$\partial_{xx} u + \partial_{yy} u = \partial_{rr} u + \frac{1}{r} \partial_r u + \frac{1}{r^2} \partial_{\phi\phi} u.$$

- Adjunk példát olyan esetekre, amikor az $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ nem konstans függvényre $\nabla f(0, 0) = 0$ teljesül, emellett
 - f -nek nincs lokális szélsőértéke $(0, 0)$ -ban
 - f -nek van lokális szélsőértéke, amely nem szigorú lokális szélsőérték.
Ekkor milyen lehet az $f''(0, 0) = 0$ mátrix sajátérték-struktúrája?
 - $f''(0, 0) = 0$, és f -nek szigorú lokális maximuma van $(0, 0)$ -ban
 - $f''(0, 0) = 0$ és f -nek nincs lokális szélsőértéke $(0, 0)$ -ban.
- (a) Mutassunk olyan $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amely az egész $\mathbb{R}^2$ halmazon folytonos, de nincs ott maximuma!
(b) Olyan példát is mutassunk, amikor sem minimuma, sem maximuma nincs!
- Igazoljuk, hogy az alábbi hozzárendelésekkel adott $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvényeknek biztosan van maximuma az $\mathbb{R}^2$ halmazon!
 - $f(x, y) = \frac{1}{1+x^4+y^4}$
 - $f(x, y) = \frac{2}{e^{x^2+y^2}-3}$
 - $f(x, y) = \frac{3}{1+e^{x^2+y^2}}$

Fogalmazunk meg olyan általános tulajdonságot, amely ezt biztosítja!