

## 12. GYAKORLAT - szélsőértékszámítás, implicitfüggvény-tétel

A harmadik és negyedik feladatban az  $\{(x_j, y_j), j = 1, 2, \dots, N\} \subset \mathbb{R}^2$  ponthalmaz  $g$  valós függvény grafikonjától vett négyzetes eltérése az  $(y_1 - g(x_1))^2 + (y_2 - g(x_2))^2 + \dots + (y_N - g(x_N))^2$  összeg. (Rajzoljuk majd le, hogy ez mit jelent!)

1. Határozzuk meg a következő hozzárendeléssel adott függvények szélsőérték helyeit, illetve az ottani szélsőértékek típusát!

(a)  $f(x, y) = 4x^2 + 5y^2 + 6x - y - 8$     (b)  $f(x, y) = y^2 + 4x^2 + 2xy$

(c)  $f(x, y) = xe^x + y^2$     (d)  $f(x, y) = e^{x-y} + x + y$

(e)  $f(x, y) = -x^3 - 3x^2 - 2y^2$     (f)  $f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2$

(g)  $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-y}$     (h)  $f(x, y) = xy \cdot \ln(x^2 + y^2)$

2. Adjunk példát olyan  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mindenütt értelmezett és deriválható nem konstans függvényre, amelynek pontosan az  $(0, 0) \cup \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$  halmaz pontjai a szélsőérték helyei!

3. Adjuk meg annak az origón átmenő egyenesnek az egyenletét, amelytől az  $\{(x_j, y_j), j = 1, 2, \dots, N\} \subset \mathbb{R}^2$  ponthalmaz négyzetes eltérése minimális! Feltesszük, hogy a ponthalmazban van olyan pont, amelyre  $x_i \neq 0$ .

4. Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, amelytől az  $\{(x_j, y_j), j = 1, 2, \dots, N\} \subset \mathbb{R}^2$  ponthalmaz négyzetes eltérése minimális! Feltesszük, hogy a ponthalmazban van olyan pont, amelyre  $x_i \neq 0$ .

5. Ellenőrizzük, hogy a következő egyenlőségekből a második változó kifejezhető a megadott  $(x_0, y_0)$  pontok valamilyen környezetében! Az utolsó két esetben adjuk meg az összes olyan pontot, ahol az implicit függvény tétel feltétele nem teljesül!

(a)  $e^{xy} - x^2y + \sqrt{y} = 1$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 1)$     (b)  $\sin xy + x^2 - 3xy = 4$ ,  $(x_0, y_0) = (2, 0)$

(c)  $x^4 + xy + y^2 = 15$ ,  $(x_0, y_0) = (1, 1)$     (d)  $x^2e^y - y = 1$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 0)$

6. Mutassunk példát olyan  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  függvényre, amely minden változója szerint folytonosan deriválható,  $\partial_2 f(x_0, y_0) = 0$  valamilyen  $(x_0, y_0)$  pontban, ennek ellenére a második változó  $(x_0, y_0)$  egy környezetében  $x_0$ -ból kifejezhető. Milyen kapcsolatban áll ez a példa az implicit függvény tétellel?

7. Adjuk meg a következő függvények inverzének deriváltját a megadott helyen!

(a)  $f(x, y) = (x + e^y, xy)$ ,  $f(1, 1) = (2, 1)$     (b)  $f(x, y) = (x - y, \frac{1}{x+y})$ ,  $f(2, 1) = (1, \frac{1}{3})$

(c)  $f(x, y, z) = (z, xy, -y^2)$ ,  $f(0, 1, 1) = (1, 0, -1)$

8. A megfelelő függvények deriváltjának létezését feltételezve vezessük le az inverz deriváltjára vonatkozó formulát az  $I = f^{-1} \circ f$  formulából (szerepelt előadáson)!

9. Mutassuk meg, hogy az  $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin x)$  hozzárendeléssel adott függvény inverze tetszőleges pont körül létezik, ugyanakkor nincs "globális inverze", azaz olyan  $f^{-1}$  függvény, amelyre minden  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  esetén  $f^{-1} \circ f = I$  volna!

10. Határozzuk meg az  $f(x, y) = 5x - 3y$  hozzárendeléssel adott függvény maximumát és minimumát azzal a feltétellel, hogy  $x^2 + y^2 = 136$ !

11. Határozzuk meg az  $f(x, y) = xy - 6$  hozzárendeléssel adott függvény maximumát és minimumát azzal a feltétellel, hogy  $x^2 + 2y^2 = 12$ !
12. Határozzuk meg az  $f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy$  hozzárendeléssel adott függvény maximumát azzal a feltétellel, hogy  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ !
- 13.\* Határozzuk meg az  $f(x, y, z) = 4y - 2z$  hozzárendeléssel adott függvény maximumát azzal a feltétellel, hogy  $2x - y - z = 2$  és  $x^2 + y^2 = 1$ .
- 14.\* Számítsuk ki az  $x + y + z$  mennyiség minimumát az  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  halmazon azzal a feltétellel, hogy  $xy^2z = 1$ . Létezik-e maximuma?