

3. GYAKORLAT - Integrálszámítás alkalmazásai, Riemann-integrálok tulajdonságai

A számolások során az alábbi képletekre lesz szükségünk:

Az $f : [a, b] \rightarrow (0, \infty)$ folytonosan deriválható függvény grafikonjának x tengely körüli forgatásával kapott palást felszíne: $2\pi \int_a^b f \sqrt{1 + (f')^2}$, az így kapott test térfogata: $\pi \int_a^b f^2$.

1. Mennyi a térfogata annak a síkidomnak, amelyet az $h : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{1}{x}$ hozzárendeléssel adott hiperbola x tengely körüli megforgatásával kapunk?
2. Számítsuk ki azon kúp felszínét, amelynek magassága m , alapkörének sugara pedig r !
3. Mekkora a $\chi|_{[-1,1]}$ függvény grafikonjának x tengely körüli forgatásával kapott palást felszíne?
4. Egy 10 m átmérőjű gömb alakú víztartályban 3 m magasan áll a víz. Ez hány m^3 vízmennyiség?
5. Egy testet úgy kaptunk, hogy az $f(x) = x^2|_{[0,2]}$ hozzárendeléssel adott függvény grafikonját az y tengely körül megforgattuk. Most egy vízszintes síkkal ketté akarjuk vágni úgy, hogy a két kapott darab térfogata azonos legyen. Hol (milyen magasságnál) vágjuk ketté?
6. Az oszcillációs összeg becslését használva indokoljuk meg, hogy az alábbi függvények Riemann-integrálhatók:

$$(a) f(x) = \begin{cases} 1, & x = 2, \\ 0, & x \in [0, 4] \setminus 2 \end{cases} \quad (b) g(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-2, 0] \\ 0, & x \in (0, 2] \end{cases} \quad (c) h(x) = x^2, \quad x \in [0, 3]$$

7. Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ olyan, amely folytonos az $[a, s]$ és $(s, b]$ intervallumokon, emellett $\lim_{s+} f$ és $\lim_{s-} f$ létezik és véges. Igazoljuk, hogy f Riemann-integrálható!
8. Számítsuk ki az alábbi függvényekhez tartozó $S_f(\Phi) - s_f(\Phi)$ oszcillációs összeget (vagyis a felső és alsó közelítő Riemann-összegek különbségét) azon a Φ felosztáson, amelyik egyenletes, és $2n$ db részintervallumot tartalmaz!

$$(a) f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 \quad (b) f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$(c) f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{sgn} x \quad (d) f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

9. Igazoljuk, hogy ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ felülről nem korlátos, akkor $S_f(\Phi) = \infty$ minden felosztáson!
10. Lehet valamilyen felosztáson az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre egyszerre $S_f(\Phi) = \infty$ és $s_f(\Phi) = -\infty$?
11. Lehet valamilyen felosztáson az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre egyszerre $S_f(\Phi) = \infty$ és $s_f(\Phi) = \infty$?
12. Mutassunk példát olyan f és $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényekre, amelyek nem Riemann-integrálhatók $[a, b]$ -n, de fg Riemann-integrálható!
13. Mutassunk példát olyan f függvényre, amely Riemann-integrálható a $[0, 1]$ intervallumon, de $1/f$ itt nem Riemann-integrálható!
14. Igazoljuk, hogy ha $f \in C[a, b]$, valamint $f \geq 0$, de f nem azonosan nulla, akkor $\int_a^b f > 0$ teljesül!

15. Igazoljuk, hogy ha $f \in C[a, b]$, valamint minden $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ esetén $\int_{x_1}^{x_2} f > 0$, akkor $f \geq 0$ teljesül!

16. Igazoljuk, hogy minden $f \in C[a, b]$ függvényre és $z \in [a, b]$ pontra teljesülnek az alábbiak!

$$(a) \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_z^{z+\delta} f(x) \, dx = 0 \quad (b) \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_z^{z+\delta} f(x) \, dx = f(z).$$

17. Adjuk meg egyszerűbb alakban a $z \rightarrow \int_{-1}^z f(x) \, dx$ hozzárendeléssel adott függvényt, ahol $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, továbbá

$$(a) f(x) = 2 \quad (b) f(x) = x \quad (c) f(x) = |x| \quad (d) f(x) = \operatorname{sgn} x \quad (e) f(x) = x - \operatorname{sgn} x$$

18.* Igaz-e hogy ha f Riemann integrálható, akkor előző feladatban definiált függvény folytonos, illetve deriválható?

19.* Igazoljuk, hogy ha $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrálható függvény konvex, akkor

$$\int_a^b f \leq \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)).$$

Igaz az állítás megfordítása?