

4. GYAKORLAT - Improprius integrálok

1. Konvergensek-e az alábbi improprius integrálok? Ha igen, számítsuk ki őket!

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \int_1^\infty \frac{1}{x^2} & \text{(b)} \int_2^\infty \frac{1}{x} & \text{(c)} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{(d)} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+1} \\ \text{(e)} \int_0^\infty e^{-x} & \text{(f)} \int_0^\infty x e^{-x} & \text{(g)} \int_{-\infty}^\infty x^3 e^{-x^2} & \text{(h)} \int_{-\infty}^\infty e^{|x|} \end{array}$$

2. Határozzuk meg, milyen pozitív a és α esetén konvergensek az alábbi improprius integrálok!

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} & \text{(b)} \int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha} & \text{(c)} \int_0^\infty a^x & \text{(d)} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{|x|^\alpha+1} \end{array}$$

3. Igazoljuk, hogy ha $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ monoton csökkenő és $\int_0^\infty f$ konvergens, akkor $\lim_{\infty} f = 0$ teljesül!

4. Igazoljuk, hogy ha $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$, akkor $\int_0^\infty f$ mindenképp létezik!

5. Konstruáljunk olyan $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ lokálisan integrálható függvényt, amelyre $\int_0^\infty f$ konvergens, ugyanakkor $\lim_{\infty} f$ nem létezik!

Mutassunk olyan esetet is, amikor valamilyen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \infty$ részsorozatra $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \infty$ teljesül, ugyanakkor $\int_0^\infty f$ továbbra is konvergens!

* Az előző esetnek egy olyan verziójára is mutassunk példát, amikor f mindenütt folytonos.

6. Legyen $f : [s_1, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^+$ tetszőleges folytonos függvény, $s_1 < s_2$, továbbá $g : [s_2, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $f \leq g$ és $\int_{s_2}^\infty g < \infty$. Igazoljuk, hogy ekkor $\int_{s_1}^\infty f < \infty$ is teljesül!

7. Legyen $f : [s_1, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^+$ tetszőleges folytonos függvény, $s_1 < s_2$, továbbá $g : [s_2, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^+$ olyan, hogy $f \geq g$ és $\int_{s_2}^\infty g = \infty$. Igazoljuk, hogy ekkor $\int_{s_1}^\infty f = \infty$ is teljesül!

8. Használjuk az előző két feladatban szereplő, ún. minoráns- majoránskritériumot annak eldöntésére, hogy a következő improprius integrálok konvergensek-e!

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \int_0^\infty x^5 e^{-x} & \text{(b)} \int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-x} & \text{(c)} \int_1^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}} & \text{(d)} \int_1^\infty \frac{1}{\ln^5 x} \\ \text{(e)} \int_0^1 \frac{\cos x}{x^2} & \text{(f)} \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2} & \text{(g)} \int_1^\infty \frac{2^x}{e^x+1} & \text{(h)} \int_0^\infty \frac{\cos x}{x} \end{array}$$

9. Tudjuk, hogy az $\int_a^b f$ és $\int_a^b g$ improprius integrálok konvergensek. Következik-e ebből, hogy a következő integrálok bármelyike konvergens?

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \int_a^b f + 1 & \text{(b)} \int_a^b f + g & \text{(c)} \int_a^b f g \end{array}$$

10. Mutassunk rá példával, hogy ha az $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre nem teljesül, hogy pozitív, illetve hogy monoton csökkenő, akkor a következő kijelentések nem ekvivalensek!

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} \sum_{j=1}^\infty f(n) \text{ konvergens} & \text{(ii)} \int_1^\infty f \text{ konvergens} \end{array}$$

11. Az integrálkritérium alkalmazásához hasonlóan akarjuk becsülni a $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{nj^2}$ sor összegét. Milyen irányú becslést ad erre az $\int_{\frac{3}{2}}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ improprius integrál?

12. A tömegvonzás szokásos modellje alapján az r távolságban levő m_1 és m_2 tömegű pontszerű testek közt fellépő gravitációs erő egy G konstanssal $G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}$ alakú. Vagyis az a munka, amelynek hatására r_1 távolságról r_2 távolságra kerülnek egymástól, az $\int_{r_1}^{r_2} G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} dr$ alakban adható meg. Mekkora munkát végzünk, ha két ilyen „összeragadt” testet egységnyi távolságra távolítunk el egymástól? Tökéletes ez alapján a fenti modell?

13.* Legyen $f : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ olyan (most ismét $a = \inf I$ és $b = \sup I$), amely értelmezési tartományán folytonos!

- (a) Igazoljuk, hogy f minden $[a_0, b_0] \subset I \setminus \{x_0\}$ intervallumon Riemann-integrálható!
- (b) Igazoljuk, hogy $x_0 \in I$ esetén (azaz ha a fenti feltétel nem semmitmondó) f improprius értelemben nem Riemann-integrálható!

Terjesszük ki tehát az improprius integrál fogalmát a következőképpen:

$$\text{PV} \int_I f := \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_a^{x_0 - \delta} f + \int_{x_0 + \delta}^b f \right),$$

ha a fenti határérték értelmes.

(c) Számítsuk ki ebben az értelemben a következő integrálokat!

$$(i) \text{ PV} \int_{-1}^1 \frac{1}{x} \quad (ii) \text{ PV} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}} \quad (iii) \text{ PV} \int_{-2}^1 \frac{1}{x^3} \quad (iv) \text{ PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3}$$

(d) Döntsük el, hogy a következő integrálok végesek-e!

$$(i) \text{ PV} \int_{-1}^1 \frac{\cos x}{x} \quad (ii) \text{ PV} \int_{-1}^1 \frac{\sin x}{x^3} \quad (iii) \text{ PV} \int_{-2}^1 \frac{e^x}{\sqrt{|x|}} \quad (iv) \text{ PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+x}{x^3}$$

(e) A fenti definíció nem ugyanaz, mint ha $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_a^{x_0 - \delta} f + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{x_0 + \delta}^b f$ szerepelne a jobb oldalon?