

5. GYAKORLAT - numerikus sorok

1. Számítsuk ki az alábbi sorok összegét!

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} & \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{10^n} & \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 3^n} & \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n-2}} \\ \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1}) & \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} & \text{(g)} \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{(n+1)^3} - \sqrt{n^3} & \text{(h)} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n} \end{array}$$

2. Igaz-e, hogy minden pozitív tagú konvergens $\sum a_n$ sor esetén

$$\text{(a)} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \text{ teljesül?} \quad \text{(b)} (a_n) \text{ monoton csökkenő?} \quad \text{(c)} \sum \left(\frac{1}{n^2} + a_n \right) \text{ konvergens?}$$

$$\text{(d)} \sum a_n^2 \text{ konvergens?} \quad \text{(e)} \sum \sqrt{a_n} \text{ konvergens?} \quad \text{(f)} \sum a_{2n} \text{ konvergens?}$$

3. A gyök- vagy a hányadoskritérium felhasználásával döntsük el, hogy az alábbi sorok konvergensek-e!

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!} & \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 3^{2n+3}}{(n+1)!} & \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 10^{3n-1}}{\sqrt[3]{(n-1)!}} & \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \\ \text{(e)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} & \text{(f)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^4}{(3n)!} & \text{(g)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n \cdot n!} & \text{(h)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(2n)^n} \end{array}$$

4. Mutassunk példát olyan $\sum a_n$ sorokra, amelyekre

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \lim \sqrt[n]{|a_n|} \text{ nem létezik, és } \sum a_n \text{ konvergens,} \\ \text{(b)} \lim \sqrt[n]{|a_n|} \text{ nem létezik, és } \sum a_n \text{ divergens,} \\ \text{(c)} \lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1, \text{ és } \sum a_n \text{ konvergens,} \\ \text{(d)} \lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1, \text{ és } \sum a_n \text{ divergens,} \\ \text{(e)} \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \text{ nem létezik, és } \sum a_n \text{ konvergens,} \\ \text{(f)} \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \text{ nem létezik, és } \sum a_n \text{ divergens,} \\ \text{(g)} \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1, \text{ és } \sum a_n \text{ konvergens,} \\ \text{(h)} \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1, \text{ és } \sum a_n \text{ divergens.} \end{array}$$

5. Igazoljuk, hogy ha a $\sum a_n$ sor hányadoskritérium konvergenciára vonatkozó feltételét teljesíti, akkor a gyökkritérium megfelelő feltételét is!

6. Mutassunk példát olyan $\sum a_n$ sorra, amelynek konvergenciája a gyökkritérium alapján eldönthető a konvergenciája, a hányadoskritérium alapján azonban nem!

7. Igazoljuk, hogy ha a $\sum a_n$ és $\sum b_n$ pozitív sorok tagjaira $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ teljesül, akkor egyszerre konvergensek vagy divergensek!