

6. GYAKORLAT - Konvergenciakritériumok, sorok Cauchy-szorzata, függvénysorok konvergenciahalmaza

1. A Leibniz-kritérium felhasználásával döntsük el, hogy az alábbi sorok konvergensek-e!

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi + \frac{1}{n})}{n} \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

2. Riemann-féle alsó és felső közelítő összegeket felírva igazoljuk, hogy teljesülnek a következő becslések!

Mindkét oldalon a $\lim_{k \rightarrow \infty}$ határértéket véve írjuk fel a kapott egyenlőtlenségeket, majd az ezekből kapott sorösszeg-becslést!

$$(a) \int_1^k \frac{1}{x} dx < \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \quad (b) \int_1^k \frac{1}{x^2} dx > \sum_{j=2}^k \frac{1}{j^2}$$

$$(c) \int_1^k \frac{1}{x^3} dx < \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j^3} < 1 + \int_1^k \frac{1}{x^3} dx \quad (d) \int_1^k \frac{1}{\sqrt{x}} dx < \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\sqrt{j}}$$

- (e) Becsüljük meg a (c) ponthoz hasonlóan konkrétan mindkét oldalról a $\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j}$ összeget!

3. Az integrál-kritérium segítségével határozzuk meg, hogy a következő sorok konvergensek vagy sem!

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}} \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \quad (d) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

4. (a) Számítsuk ki a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ sor önmagával vett Cauchy-szorzataként kapott sort! A Mertens-tétel segítségével adjuk meg ennek összegét!

- (b) Számítsuk ki a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ és a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k}$ sorok Cauchy-szorzataként kapott sort! A Mertens-tétel segítségével adjuk meg ennek összegét!

- (c) Igaz-e, hogy váltakozó előjelű tagokból álló sorok Cauchy-szorzata is ilyen?

- (d) Igazoljuk, hogy a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$ sor (konvergens ez?) önmagával vett Cauchy-szorzata olyan, hogy minden elemének abszolútértéke legalább 1! A Mertens-tétel feltételei most teljesülnek?

- (e) Számítsuk ki a $-1, 1, 1, 1, 1, \dots$ és a $2, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$ tagokból álló sorok Cauchy-szorzatát! Teljesülnek a Mertens-tétel feltételei?

5. * A trigonometrikus függvények hatványsor-előállítás és a Cauchy-szorzat segítségével igazoljuk, hogy teljesülnek a következő azonosságok!

$$(a) \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (b) 2 \sin x \cos x = \sin 2x$$

6. Mi az alábbi függvénysorozatok H konvergenciahalmaza, illetve mi a pontonkénti limeszfüggvény (azaz melyik H -n értelmezett függvényhez tart pontonként a megadott függvénysorozat)?

- (a) $f_n(x) = \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^n$, $D(f_n) = \mathbb{R}$
- (b) $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$, $D(f_n) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- (c) $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$, $D(f_n) = \mathbb{R}^+$
- (d) $f_n(x) = \sqrt[n]{x^n + 2^n}$, $D(f_n) = \mathbb{R}^+$
- (e) $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$, $D(f_n) = \mathbb{R}$,
- (f) $f_n(x) = \frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}$, $D(f_n) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$