

7. GYAKORLAT - Függvénysorozatok pontonkénti és egyenletes konvergenciája

1. Egyenletesen konvergensek-e az alábbi függvénysorozatok illetve függvénysorok a megadott halmazokon?

(a) $f_n(x) = |x - n|$ (i) $H = [-3, 4]$ (ii) $H = \mathbb{R}$;

(b) $f_n(x) = \frac{x^2}{n}$ (i) $H = [-4, 4]$ (ii) $H = \mathbb{R}$;

(c) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, $H = \mathbb{R}$;

(d) $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)$, $H = \mathbb{R}$;

(e) $f_n(x) = x^n$, (i) $H = [0, \frac{1}{2}]$ (ii) $H = [0, 1]$;

(f) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $H = [0, 1]$;

(g) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $H = [0, 1]$;

(h) $f_n(x) = \frac{1}{x - n}$, $H = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$;

(i) $f_n(x) = \frac{\{nx\}}{n}$, $H = \mathbb{R}$;

(j) $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$, (i) $H = (-10, 10)$ (ii) $H = \mathbb{R}$;

(k) $f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k$, (i) $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ -en (ii) $(-1, 1)$ -en.

2. Igazoljuk, hogy ha $f_n \rightarrow f$ pontonként, és minden f_n monoton csökkenő, akkor f is az.

3. Van-e olyan

(a) sehol sem folytonos függvényekből álló függvénysorozat, amely egyenletesen tart egy folytonos függvényhez?

(b) folytonos függvényekből álló függvénysorozat, amely egyenletesen tart a Dirichlet-függvényhez?

4. Adjunk példát olyan Riemann-integrálható függvényekből álló $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ függvénysorozatra, hogy $f_n \rightarrow f$ pontonként $I = [0, 1]$ -en, f is Riemann-integrálható, de

(a) $\int_I f_n \not\rightarrow \int_I f$,

(b) $\int_I f_n \rightarrow +\infty$,

(c) az $(\int_I f_n)$ számsorozatnak nincs limesze.

5. Mutassunk példát olyan I -n differenciálható függvényekből álló (f_n) függvénysorozatra, hogy

(a) $f_n \rightarrow f$ egyenletesen, de f legalább 1 pontban nem differenciálható.

(b) $f_n \rightarrow f$ egyenletesen, f differenciálható, de $f'_n \not\rightarrow f'$.

6. Igazoljuk, hogy ha $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ és $g_n : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re továbbá $f_n \rightarrow f$ és $g_n \rightarrow g$ egyenletesen, akkor $h_n \rightarrow h$ egyenletesen, ahol

$$h_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & x \in [0, 1] \\ g_n(x) & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

7. Igazoljuk, hogy ha $f_n \rightarrow f$ egyenletesen és f korlátos, akkor $f_n^2 \rightarrow f^2$ is teljesül!

8. Igazoljuk, hogy ha az előző feladatban f nem korlátos, akkor $f_n^2 \rightarrow f^2$ nem feltétlenül teljesül!

9. Teljesülnek-e a következő egyenlőségek?

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} x^n dx$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(x-n)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+(x-n)^2} dx$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} f_n(x) dx = \int_0^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$, ahol $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x \in [0, n] \\ 0, & x \in (n, \infty). \end{cases}$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 \frac{nx}{1+n^2x^4} dx = \int_1^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n^2x^4} dx$

(e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \arctan x^n \right)' = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \arctan x^n \right)' \quad x \in [0, 2)$

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \arctan x^n \right)' = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \arctan x^n \right)' \quad x \in [2, \infty)$

10. Igaz-e, hogy ha $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ minden $n \in \mathbb{N}$ -re, továbbá $f_n \rightarrow f$ egyenletesen $\mathbb{R}$ minden korlátos részhalmazán, akkor $f_n \rightarrow f$ egyenletesen az $\mathbb{R}$ halmazon is?

11. Igaz-e, hogy ha az $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvények (improprius értelemben) Riemann-integrálhatók, és $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow f$ egyenletesen, akkor f is Riemann-integrálható?