

8. GYAKORLAT - Függvénysorok konvergenciája, hatványsorok, Taylor-sorok

1. Adjuk meg a következő függvénysorok konvergenciahalmazát!

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{x}{n}}$ (f) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nx}$

2. Igazoljuk, hogy ha a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ függvénysorok egyenletesen konvergens az M halmazon, akkor itt $\sum_{n=0}^{\infty} f_n + g_n$ is egyenletesen konvergens!

3. Bizonyítsuk be a Weierstraß-kritérium segítségével, hogy az alábbi függvénysorok egyenletesen konvergens a megadott halmazokon!

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$, $x \in \mathbb{R}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$, $x \in \mathbb{R}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^4 x^2}$, $x \in [0, \infty)$

4. Igazoljuk, hogy a következő függvénysorokat szabad tagonként deriválni a konvergenciahalmazukon!

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{x}{n^2}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{n}x}{n^2}$

5. Az $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysor tagjai az $f_1(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ és $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{x^2 + \frac{1}{(n-1)^2}}$, $n \geq 2$ hozzárendeléssel adóttak. Igazoljuk, hogy hiába konvergens a függvénysor $\mathbb{R}$ -en egyenletesen, nem szabad azt tagonként deriválni!

6. Igaz-e, hogy ha a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens minden $[-M, M]$ alakú halmazon, akkor $\mathbb{R}$ -en is egyenletesen konvergens?

7. Számítsuk ki az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát!

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} x^{3n}$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3 + 1} x^n$
(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n + n^3} x^n$ (f) $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ (g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$ (h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^n$

8. Az $g(x) = \frac{1}{1-x}$ függvény nulla körüli Taylor-sorának felhasználásával adjuk meg az alábbi hozzárendeléssel definiált függvények nulla körüli Taylor-sorát! Adjuk meg a megfelelő konvergenciasugarat is minden esetben!

(a) $f(x) = \frac{1}{1-2x}$ (b) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ (c) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ (d) $f(x) = \ln(1+x)$
(e) $f(x) = \frac{x}{1+x}$ (f) $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ (g) $f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6}$ (h) $f(x) = \arctg x$

9. Igazoljuk, hogy ha egy hatványsor konvergenciahalmaza $\mathbb{R}$, akkor együtthatóinak sorozata nullához tart! Igaz ennek megfordítása?

10. Igazoljuk, hogy ha a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sor konvergens $x = 3$ -ban, akkor $x = 2$ -ben is az!
11. Van-e olyan hatványsor, amelynek konvergenciahalmaza az (a) $[1, 4] \setminus \{2\}$ (b) $[0, \infty)$ halmaz?
12. Igazoljuk, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ hatványsor konvergenciasugara megegyezik a $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (x - x_0)^n$,
valamint a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} (x - x_0)^n$ hatványsor konvergenciasugarával!
13. Ellenőrizzük, hogy ha az exponenciális, az sh, ch, sin, cos függvényeket a hatványsorukkal *definiáltuk* volna, akkor is közvetlenül kapnánk a következő nevezetes deriváltakat!
- (a) $\exp' = \exp$ (b) $\sin' = \cos$ (c) $\cos' = -\sin$ (d) $\text{sh}' = \text{ch}$ (e) $\text{ch}' = \text{sh}$