Az Analízis II. előadások: II. rész

Kezdés: 2024. március 26.,
utolsó javítás: 2024. .

Többváltozós függvények: motiváció, példák

- Valós jelenségeket ilyenekkel írunk le/adunk meg:
- Wifi jel erőssége a terem Ω egyes $\boldsymbol{x}$ pontjaiban.
  - $W : \Omega \to \mathbb{R}$ vagy $W : (0, t) \times \Omega \to \mathbb{R}$
  - $W(t_*, \boldsymbol{x})$ a jel erőssége a t_* időpontban az $\boldsymbol{x}$ helyen.
- A hőmérséklet az ország ($M \subset \mathbb{R}^2$) egyes pontjaiban holnap délben.
  - $T : M \to \mathbb{R}$
  - $T(\boldsymbol{x})$ a hőmérséklet holnap délben az $\boldsymbol{x}$ helyen.
- Egy műhold pozíciója a t időpontban.
  - $s : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^3$
  - $s(t)$ a műhold pozíciója a t időpontban.

Többváltozós függvények: további példák

- Áramlás sebessége egy mozgó hajóhoz képest.
  - $\boldsymbol{v} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ vagy $\boldsymbol{v} : (0, t) \times \Omega \to \mathbb{R}^3$
  - $\boldsymbol{v}(t_*, \boldsymbol{x})$ a sebesség a t_* időpontban az $\boldsymbol{x}$ helyen.
- A szélsebesség az ország ($M \subset \mathbb{R}^2$) egyes pontjaiban holnap délben.
  - $\boldsymbol{z} : M \to \mathbb{R}^2$
  - $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x})$ a szélsebesség holnap délben az $\boldsymbol{x}$ helyen.
- Egy műhold pozíciója, sebessége és gyorsulása a t időpontban.
  - $\boldsymbol{s} : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}^9$
  - $\boldsymbol{s}(t)$ a műhold fenti adatai a t időpontban.

Többváltozós függvények: a tananyag vázlata

- Ilyen típusú függvényeket fogunk vizsgálni.
- A fő témák:
  - határérték, folytonosság
  - differenciálszámítás és alkalmazásai
    - szélsőértékek számítása (feltételes is)
    - Taylor-közelítés
    - implicit függvény és inverzfüggvény tételek

Többváltozós függvények: megjegyzések, kitekintés

- A történet folytatódik
  - végtelen dimenziós, de általában lineáris eset (funkcionálanalízis)
  - integrálszámítás és alkalmazásai, komplex függvénytan (analízis 3)
  - felületek vizsgálata, differenciálszámítás általánosítása (differenciálgeometria)
- Használjuk az itt tanultakat
  - a fenti kurzusokon konkrét esetként,
  - (parciális) differenciálegyenletek, témában
    - ezket a függvényeket meg is kell határozni
  - statisztika témában, modellalkotás témában.

Többváltozós függvények: a vizsgálat módszere, eszközök

- Módszer:
  - az egyváltozós analízis általánosítása.
- Eszközök:
  - az előző félév anyaga,
  - lineáris algebra (mátrixok, műveletek, sajátértékek, sajátvektorok).

Első témakör: $\mathbb{R}^d$ szerkezete, műveletek

- $\mathbb{R}^d = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d) : x_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \ldots, d\}$
- $\mathbb{R}^d$ halmazon értelmezett műveletek, mennyiségek:
  - összeadás: vektorok komponensenkénti összeadása
  - számmal való szorzás: $\lambda \cdot \boldsymbol{x} = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \ldots, \lambda \cdot x_d)$
  - A fenti műveletekre ez vektortér,
    - annak azonosságai is teljesülnek.
  - Skalárszorzás (belső szorzás):
    - $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$,
    - $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_d y_d$,
    - Szemléletes jelentés: hosszok szorzata szorozva a bezárt szög konszinuszával.
  - Hossz (euklideszi) vagy norma (euklideszi):
    - Jelölés: $\|\boldsymbol{x}\|$ vagy $|\boldsymbol{x}|$ vagy $\|\boldsymbol{x}\|_2$.
    - $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$

$\mathbb{R}^d$ szerkezete: a "hossz" tulajdonságai

- Minden $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d$ esetén teljesülnek:
  - $|\lambda \boldsymbol{x}| = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{x}|$ - pozitív homogén
  - $|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$
  - $|\boldsymbol{x}| \geq 0$ és $=$ pontosan akkor, ha $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.
  - $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \leq |\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}|$ - Cauchy – Schwarz - egyenlőtlenség
    - Egy bázisban felírva az együthatókra:

      $$a_1 b_1 + \cdots + a_d b_d \leq \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_d^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_d^2}$$

- Később, a "hossz" általánosítása során a első hármat felteszük,
  - és ebből az utolsó belátható.
- Újabb jelölés: $\boldsymbol{e}_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ - j-edik egységvektor

$\mathbb{R}^d$ szerkezete: nyílt és zárt gömbök, környezetek

- Tetszőleges $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ és $r \in \mathbb{R}^+$ esetén:
  - $B_r(\boldsymbol{x}) := \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| < r\}$
  - elnevezés: $\boldsymbol{x}$ körüli r sugarú nyílt gömb
  - $\overline{B}_r(\boldsymbol{x}) := \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^d : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \leq r\}$
  - elnevezés: $\boldsymbol{x}$ körüli r sugarú zárt gömb.

Definíció

Az $U \subset \mathbb{R}^d$ halmazt az $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$ pont egy környezetének nevezzük, ha van olyan $\boldsymbol{x}$ középpontú $B_r(\boldsymbol{x})$ nyílt gömb, amelyre $B_r(\boldsymbol{x}) \subset U$. Ha U környezete az $\boldsymbol{x}$ pontnak, akkor $\boldsymbol{x}$-et U belső pontjának nevezzük.

- A fenti fogalmak az egydimenziós szimmetrikus nyílt/zárt intervallumok és környezetek általánosításai.

Korlátosság és konvergencia $\mathbb{R}^d$-ben

Definíció

Azt mondjuk, hogy a $K \subset \mathbb{R}^d$ halmaz korlátos, ha létezik olyan $B_r(\boldsymbol{x})$ nyílt gömb, amelyre $K \subset B_r(\boldsymbol{x})$.

- Ez ekvivalens azzal, mintha ilyen tulajdonságú $B_r(\mathbf{0})$ nyílt gömb létezését követeltük volna meg.

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ sorozat konvergens, és határértéke $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$, ha $\boldsymbol{x}$ minden U környezetéhez van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > n_0$ esetén $\boldsymbol{x}_n \in U$.
Jelölés: $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$ (ua, mint $\mathbb{R}$-ben).

- Ez formálisan ugyanaz, mint az egydimenziós definíció.
- Igazolható, hogy a határérték most is egyértelmű.
- Itt nincs “végtelen” határérték.

Konvergencia elemzése

Állítás (konvergencia jellemzése)

$\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x} \Leftrightarrow |\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}| \to 0 \Leftrightarrow$ *minden j komponensre* $(\boldsymbol{x}_n)_j \to (\boldsymbol{x})_j$.

Bizonyítás:

- $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$

  $\overset{\text{DEF}}{\Leftrightarrow}$ minden $\varepsilon > 0\ \exists n_0$: $n > n_0$ esetén $\boldsymbol{x}_n \in B_\varepsilon(\boldsymbol{x})$

  $\Leftrightarrow$ minden $\varepsilon > 0\ \exists n_0$: $n > n_0$ esetén $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n| < \varepsilon$.

  $\overset{\text{DEF}}{\Leftrightarrow} |\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}| \to 0$
- $|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}| \to 0 \qquad (|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}| \geq |(\boldsymbol{x}_n)_j - (\boldsymbol{x})_j|$ miatt)

  $\Rightarrow$ minden j komponensre $(\boldsymbol{x}_n)_j \to (\boldsymbol{x})_j$.

  Másrészt, ha minden komponensre $(\boldsymbol{x}_n)_j - (\boldsymbol{x})_j \to 0$, akkor ezek négyzetösszegére

$$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_n|^2 = \sum_{j=1}^{d} ((\boldsymbol{x}_n)_j - (\boldsymbol{x})_j)^2 \to 0.$$

Konvergencia elemzése: folytatás

Állítás

Ha $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{y}_n \to \boldsymbol{y}$, akkor $\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{y}_n \to \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ is teljesül.

Bizonyítás:

- A feltételből az előző állítás miatt:
  - minden j-re $(\boldsymbol{x}_n)_j \to (\boldsymbol{x})_j$ és $(\boldsymbol{y}_n)_j \to (\boldsymbol{y})_j$
  - $\Rightarrow (\boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{y}_n)_j \to (\boldsymbol{x})_j + (\boldsymbol{y})_j = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})_j$
- Ismét az előző állítás miatt:
  - $\Leftrightarrow \boldsymbol{x}_n + \boldsymbol{y}_n \to \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$, ahogy állítottuk. $\square$

Konvergencia elemzése: folytatás

Állítás

- *A konvergencia egyértelmű:* $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{y}$ & $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{z} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$.
- $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$ *esetén minden* $(\boldsymbol{x}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset (\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *részsorozatra* $\boldsymbol{x}_{n_k} \to \boldsymbol{x}$.

Bizonyítás:

- (i) A feltételből a konvergencia jellemzése miatt:
  - minden j-re $(\boldsymbol{x}_n)_j \to \boldsymbol{y}_j$ és $(\boldsymbol{x}_n)_j \to \boldsymbol{z}_j$
  - $\xRightarrow{1D} \boldsymbol{y}_j = \boldsymbol{z}_j$ minden j-re $\Rightarrow \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$.
- (ii) A feltételből a konvergencia jellemzése miatt:
  - minden j-re $(\boldsymbol{x}_n)_j \to \boldsymbol{x}_j \xRightarrow{1D} (\boldsymbol{x}_{n_k})_j \to \boldsymbol{x}_j$
  - $\Rightarrow \boldsymbol{x}_{n_k} \to \boldsymbol{x}$. $\square$

Zárt halmazok $\mathbb{R}^d$-ben

Definíció

Az $F \subset \mathbb{R}^d$ halmazt zártnak nevezzük, ha minden $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ sorozatra, amelyre $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$ igaz, egyúttal $\boldsymbol{x} \in F$ is teljesül.

- Azaz ha minden, F-ben haladó konvergens sorozat esetén a sorozat határértéke is F-ben van.
- "Rendes" felépítésben a nyílt halmazokat definiálják
  - aztán a zártakat egyszerűen ezek komplementereiként.
- Teljesülnek a következő állítások:
  - Ha F_1 és F_2 zártak, akkor $F_1 \times F_2$ is zárt.
  - Akárhány zárt halmaz metszete és véges sok zárt halmaz úniója ismét zárt.

Zárt halmazok - néhány állítás, példa

- Példa: $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ zárt.
  - Indoklás: Ha most ebben veszünk egy sorozatot, akkor annak mindkét komponensének értéke $[0,1]$-beli, így minden komponens határértéke is csak $[0,1]$-beli lehet, azaz a határérték is $[0,1] \times [0,1]$-beli.
- Példa: $F = B_1(\mathbf{0}) \setminus \mathbf{0} \subset \mathbb{R}^2$ nem zárt.
  - Indoklás: Ha most $\boldsymbol{x}_n = (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1})$, akkor ennek limesze $\mathbf{0}$, ami nincs F-ben.

- Korlátos halmazokra:
  - $(0,1] \subset \mathbb{R}$
  - $(0,2) \times (3,8) \subset \mathbb{R}^2$
  - $\{(e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t, e^{-t}) : t \in \mathbb{R}^+\} \subset \mathbb{R}^3$
- Nem korlátos halmazokra:
  - $(0,1] \times \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}^2$
  - $\{(x,x) : x \in \mathbb{R}^+\} \subset \mathbb{R}^2$
  - $\{(0, e^t\cos t, e^t\sin t) : t \in \mathbb{R}^+\} \subset \mathbb{R}^3$

Korlátos halmazok $\mathbb{R}^d$-ben - egy fontos tulajdonság

Tétel (Bolzano–Weierstraß-féle kiválasztási tétel $\mathbb{R}^d$-ben)

Legyen $(\boldsymbol{a}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ korlátos sorozat $\mathbb{R}^d$-ben! Ekkor az $(\boldsymbol{a}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatnak létezik konvergens részsorozata.

Bizonyítás: Dimenzióra vonatkozó teljes indukcióval.

- $d = 1$ eset: szerepelt; jegyzet 3.36-os állítása.

Ha d dimenzió esetére igazoltuk az állítást, akkor tekintsük az $\boldsymbol{a}_k = \left(\boldsymbol{a}_k^d, a_k^{d+1}\right)$ elemekből álló $\mathbb{R}^{d+1}$-beli sorozatot, ahol az elemek első d koordinátáját $\boldsymbol{a}_k^d$, az utolsót pedig a_k^{d+1} jelöli.

Korlátos halmazok $\mathbb{R}^d$-ben - egy fontos tulajdonság

$(\mathbf{a}_k)_k \in \mathbb{N}$ korlátos $\Rightarrow$ $\left(\mathbf{a}_k^d\right)_{k\in\mathbb{N}}$ is korlátos, vagyis az indukciós feltétel miatt ennek van $\left(\mathbf{a}_{k_l}^d\right)_{l\in\mathbb{N}} \subset \left(\mathbf{a}_k^d\right)_k \in \mathbb{N}$ konvergens részsorozata.
Ekkor az $\left(a_{k_l}^{d+1}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ sorozatból egy konvergens $\left(a_{k_{l_j}}^{d+1}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ részsorozatot választva olyan $\left(k_{l_j}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ indexsorozatot nyerünk, amellyel $\left(\mathbf{a}_{k_{l_j}}^d\right)_{j\in\mathbb{N}}$ is konvergens, és így az eredeti $(\mathbf{a}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ezen indexekkel kapott $\left(\mathbf{a}_{k_{l_j}}\right)_{j\in\mathbb{N}} = \left(\mathbf{a}_{k_{l_j}}^d, a_{k_{l_j}}^d\right)_{j\in\mathbb{N}}$ részsorozata olyan, hogy annak első d koordinátája, és a $d+1$-edik is konvergens, vagyis maga a részsorozat is konvergens. $\square$

$(\mathbf{a}_1^d, a_1^{d+1}), (\mathbf{a}_{k_1}^d, a_{k_1}^{d+1}), (\mathbf{a}_{k_2}^d, a_{k_{2_1}}^{d+1}), (\mathbf{a}_4^d, a_4^{d+1}), (\mathbf{a}_5^d, a_5^{d+1}), (\mathbf{a}_{k_3}^d, a_{k_{3_2}}^{d+1}), (\mathbf{a}_7^d, a_7^{d+1}), (\mathbf{a}_{k_4}^d, a_{k_{4_3}}^{d+1}),$

Egy fontos következmény

Tétel

Legyen $K \subset \mathbb{R}^d$ korlátos és zárt halmaz. Ha $(\boldsymbol{a}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ tetszőleges sorozat, akkor létezik olyan $(\boldsymbol{a}_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ részsorozata, amely konvergens és $\lim (\boldsymbol{a}_{k_l})_{l\in\mathbb{N}} \in K$.

Bizonyítás:

Mivel K korlátos, azért $(\boldsymbol{a}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ korlátos sorozat $\mathbb{R}^d$-ben. A Bolzano–Weierstraß-féle kiválasztási tétel szerint ennek létezik konvergens részsorozata: $\boldsymbol{a}_{k_l} \in K$.

Másrészt K zárt, ezért $\lim (\boldsymbol{a}_{k_l})_{l\in\mathbb{N}} \in K$, ahogy állítottuk. $\square$

Definíció

A $K \subset \mathbb{R}^d$ halmazt kompaktnak nevezzük, ha tetszőleges K-beli sorozatnak van olyan konvergens részsorozata, amelynek limesze K-beli.

Állítás

$\mathbb{R}^d$-ben a kompakt halmazok a korlátos és zárt halmazok.

Bizonyítás:

Az előző tételben beláttuk, hogy ha $K \subset \mathbb{R}^d$ korlátos és zárt, akkor az kompakt is.

Fordítva, ha egy K halmaz kompakt, akkor korlátos is.

Ellenkező esetben tartalmazna nem olyan nem korlátos $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozatot, amelynek k-adik elemére $\|\boldsymbol{x}_k\| > k$. Ennek viszont viszont nincs konvergens részsorozata, azaz K nem lenne kompakt.

Hasonlóan, ha K tartalmazna olyan $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergens sorozatot, amelynek limesze nem K-beli, akkor $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ semmilyen részsorozatának limesze sem lehetne K-beli, azaz K ismét nem lehetne kompakt.

□

Többváltozós függvények - bevezetés

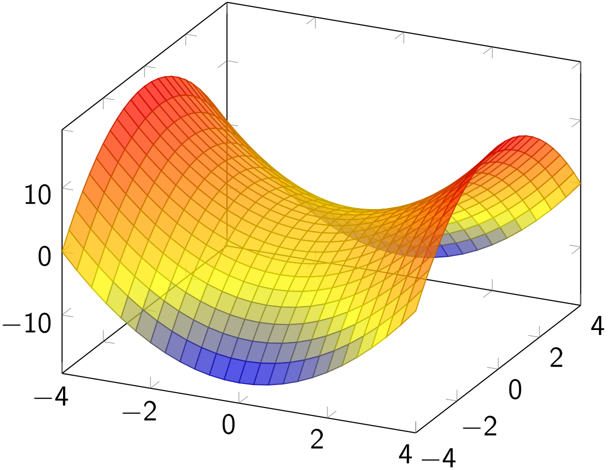
- Példák már szerepeltek.
- Gyakori típus: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ típusú függvények.
- Az általános $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ függvények "összeállíthatók" ilyenekből:
  - $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = (g_1(\boldsymbol{x}), g_2(\boldsymbol{x}), \ldots, g_n(\boldsymbol{x}))$, ahol
    - $g_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ - j-edik koordinátafüggvény
    - Formálisan: ha $p_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, p_j(\boldsymbol{x}) = x_j$,
    - akkor legyen $g_j \stackrel{\text{DEF}}{=} p_j \circ \boldsymbol{g}$.
  - Emiatt többnyire $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ típusú függvényeket vizsgálunk.
- De ezeket is "szétbonthatjuk":
  - $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ és $\boldsymbol{x} \in \mathcal{F}$ esetén
  - $f_{\boldsymbol{x},j} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_{\boldsymbol{x},j}(s) := f(\boldsymbol{x} + s \cdot \boldsymbol{e}_j)$ - j-edik parciális függvény
  - Ez az $\boldsymbol{x}$-ből kiindulva egy irányban adja meg a f viselkedését.

Többváltozós függvények: képzeljük el őket!

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eset
- Grafikonja: $\{(x_1, x_2, f(x_1, x_2)) : (x_1, x_2) \in \mathcal{D}_f\} \subset \mathbb{R}^3$
- Ez egy felületként képzelhető el.
- De f jól jellemezhető szintvonalakkal (2D ábrázolás).
- Sőt a függvényértékeknek megfelelő színezéssel (2D ábrázolás).
- Példa - kis Matlab-kód:

```
[X,Y] = meshgrid(1:0.05:10,1:0.05:20);
Z = sin(X) + cos(Y);
surf(X,Y,Z), contour(Z), contourf(Z)
```

Többváltozós függvények: egy grafikon



- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 - y^2$.
- Rögzített x_0 esetén $y \to f(x_0, y) = x_0^2 - y^2$ másodfokú polinomfüggvény.

Többváltozós függvények: képzeljük el őket!

- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eset
- "Grafikonja":
  $\{(x_1, x_2, x_3, f(x_1, x_2, x_3)) : (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{D}_f\} \subset \mathbb{R}^4$
- A negyedik koordinátát színnel ábrázoljuk.
  - Síkok mentén mutatjuk.
- Példa - kis Matlab-kód:

```
[X,Y,Z] = meshgrid(-2:.2:2);
V = X.*exp(-X.^2-Y.^2-Z.^2);
xslice = [-1.2,0.8,2]; yslice = []; zslice = 0;
slice(X,Y,Z,V,xslice,yslice,zslice)
```

Többváltozós függvények: folytonosság

Definíció (folytonosság)

Azt mondjuk, hogy az $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ függvény az $\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}_{\boldsymbol{f}}$ pontban folytonos, ha $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ minden U környezetéhez van olyan $\boldsymbol{x}$-nek olyan V környezete, hogy minden $\boldsymbol{x}_* \in V \cap \mathcal{D}_{\boldsymbol{f}}$ esetén $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_*) \in U$.

- Ezzel ekvivalens a következő:

Definíció (sorozatfolytonosság)

Azt mondjuk, hogy az $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ függvény az $\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}_{\boldsymbol{f}}$ pontban folytonos, ha minden $\mathcal{D}_{\boldsymbol{f}} \supset (\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \boldsymbol{x}$ sorozat esetén $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n) \to \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

- Sorozatokkal definiálható az $\boldsymbol{f}$ függvény $\boldsymbol{x}$-beli határértéke is.

Állítás

Ha $\boldsymbol{f}$ és $\boldsymbol{g}$ folytonosak $\boldsymbol{x}$-ben és képterük dimenziója azonos, akkor $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$ is folytonos $\boldsymbol{x}$-ben.

Bizonyítás:

- Legyen $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_{\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}}$ olyan, amelyre $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \boldsymbol{x}$.
- $\boldsymbol{f}$ és $\boldsymbol{g}$ sorozatfolytonosak is $\boldsymbol{x}$-ben, így

  $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n) \to \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ és $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_n) \to \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$
- A konvergencia tulajdonságai miatt

  $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_n) \overset{\text{DEF}}{=} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n)+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_n) \to \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \overset{\text{DEF}}{=} \boldsymbol{f}+\gg(\boldsymbol{x})$,

  ami éppen az $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$ függvény $\boldsymbol{x}$-beli folytonosságát jelenti. $\square$

Többváltozós függvények: folytonosság

Állítás

Ha $\boldsymbol{g}$ folytonos $\boldsymbol{x}$-ben és $\boldsymbol{f}$ folytonos $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$-ben, akkor $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ is folytonos $\boldsymbol{x}$-ben.

Bizonyítás:

- Legyen $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_{\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}}$ olyan, amelyre $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \boldsymbol{x}$.
- $\boldsymbol{g}$ sorozatfolytonos $\boldsymbol{x}$-ben, azaz $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_n) \to \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$
- $\boldsymbol{f}$ sorozatfolytonos $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$-ben, így

  $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_n)) \to \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}))$,
- ami éppen az $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ függvény $\boldsymbol{x}$-beli sorozatfolytonosságát, így folytonosságát jelenti. $\square$

"Kompakt halmaz folytonos képe kompakt"

- Ez valós függvényekre a Weierstraß-maximumelv és a Bolzano-tétel következménye volt.
- Most kicsit megfordítjuk az állítást, mert a fentit tudjuk közvetlenül igazolni.
- Maximumelvet is kapunk majd,
  - de a Bolzano-tétel egyszerűen nem általánosítható.

Tétel

Ha $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ *folytonos és* $\mathcal{D}_{\boldsymbol{f}}$ *kompakt, akkor* $\mathcal{R}_{\boldsymbol{f}}$ *is kompakt.*

Bizonyítás:

- Legyen $(\boldsymbol{y}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}_{\boldsymbol{f}}$ tetszőleges sorozat!
- Azt kell megmutatni, hogy ennek létezik olyan $(\boldsymbol{y}_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ részsorozata, amely konvergens és $\lim (\boldsymbol{y}_{k_l}) \in \mathcal{R}_{\boldsymbol{f}}$.

“Kompakt halmaz folytonos képe kompakt” (folyt.)

- A feltétel szerint $\boldsymbol{y}_k = f(\boldsymbol{x}_k)$, ahol $\boldsymbol{x}_k \in \mathcal{D}_{\boldsymbol{f}}$.
- Mivel $\mathcal{D}_{\boldsymbol{f}}$ kompakt, azért $(\boldsymbol{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ -nak létezik $\mathcal{D}_{\boldsymbol{f}}$-ben konvergens részsorozata: $\lim\limits_{l\to\infty} \boldsymbol{x}_{k_l} =: \boldsymbol{x}_0 \in D_f$.

  Mivel f folytonos $\boldsymbol{x}_0$-ban, ezért

  $$\mathcal{R}_{\boldsymbol{f}} \ni f(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{l\to\infty} f(\boldsymbol{x}_{k_l}) = \lim_{l\to\infty} \boldsymbol{y}_{k_l},$$

  vagyis $(\boldsymbol{y}_k)_{k\in\mathbb{N}}$-nak létezik konvergens részsorozata $\mathcal{R}_{\boldsymbol{f}}$-beli limesszel. $\square$

A Weierstraß - maximumelv $\mathbb{R}^d$-ben

Tétel (Weierstraß - maximumelv)

Ha az $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ függvény folytonos a $K \subset D_f$ kompakt halmazon, akkor létezik olyan $\boldsymbol{x}_* \in K$, hogy $\max_K f = f(\boldsymbol{x}_*)$.
Röviden: kompakt halmazon folytonos függvénynek van maximuma.

Bizonyítás:

- A feltételekben szereplő $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $D_f = K$ függvényre:
  - Előző tétel $\Rightarrow \mathcal{R}_f$ kompakt, azaz korlátos és zárt,
  - tehát maximális eleme $\sup \mathcal{R}_f \in \mathcal{R}_f$,
  - ami a tételben szereplő $f(\boldsymbol{x}_*)$ lesz éppen. $\square$
- *Megjegyzés:* A fenti tételben maximum helyett minimum is írható.

A Weierstraß - maximumelv: egy apró alkalmazás

- A számtani és mértani közepek közti egyenlőség:
  - Tetszőleges $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ esetén
    $$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}.$$
- A bizonyítás vázlatosan.
- A fentivel ekvivalens:

  Ha $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = S$ adott, akkor a szorzatuk abban az esetben maximális, ha mindegyik azonos.
  - Ha ugyanis ezt tudjuk, akkor minden egyéb esetben a szorzatuk n-edik gyöke legfeljebb (S/n).
- Innentől indirekt: Tegyük fel, hogy nem a fenti esetben maximális a szorzat, hanem (változócserékkel) valamilyen $a_1 \neq a_2$ esetben vétetik fel. (Tudjuk: felvétetik valahol!!)

A Weierstraß - maximumelv: egy apró alkalmazás (folyt.)

- Az $f(\boldsymbol{a}) = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ függvény maximumát keressük $\{\boldsymbol{a} : a_1 + a_2 + \dots + a_n = S,\ a_j \geq 0\}$ halmazon,
  - amely korlátos és zárt.
- Akkor a fenti maximális szorzatot adó

  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$

  helyett vegyük ezt:

  $\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_1+a_2}{2}, a_3, a_4, \dots, a_n.$
- Az új számok összege is ugyanannyi, viszont

  $\frac{a_1+a_2}{2} \cdot \frac{a_1+a_2}{2} > a_1 \cdot a_2 \Leftrightarrow (a_1 - a_2)^2 > 0.$
- Így mégsem a fenti n-es esetén maximális a szorzat. $\square$

Többváltozós függvények: differenciálszámítás - naiv megközelítés

- Tekintsünk $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ típusú függvényeket.
- Egyszerre csak egy koordinátát változtassunk!
  - Azaz a j-edik parciális függvényeket vizsgáljuk: $f_{\boldsymbol{x},j} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
  - Ezt tudjuk deriválni:

    $$\partial_j f(\boldsymbol{x}) := f'_{\boldsymbol{x},j}(0) = \lim_{s \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + s \cdot \boldsymbol{e}_j) - f(\boldsymbol{x})}{s}$$

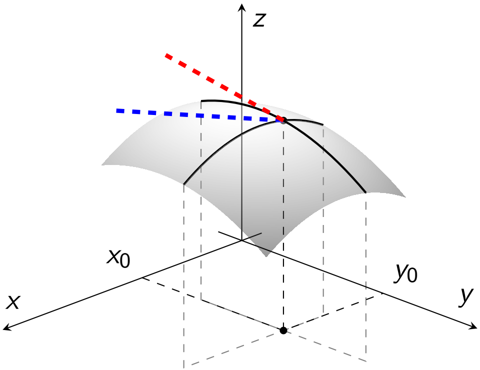
  - Elnevezés:

    f függvény j-edik (változó szerinti) parciális deriváltja $\boldsymbol{x}$-ben.
- Ezeket "összerakjuk":

  $$\nabla f(\boldsymbol{x}) := (\partial_1 f(\boldsymbol{x}), \partial_2 f(\boldsymbol{x}), \dots, \partial_d f(\boldsymbol{x}))$$

  - Elnevezés: f függvény $\boldsymbol{x}$-beli gradiense.

Parcális deriváltak: szemléltetés



- piros félegyenes meredeksége: $\partial_y f(x_0, y_0)$
- kék félegyenes meredeksége: $\partial_x f(x_0, y_0)$

Parciális deriváltak: kiszámítás

- Koordinátánként írjuk fel a parciális deriváltat 2 változó esetén:

$$\partial_2 f(x,y) = \lim_{s\to 0} \frac{f(x,y+s)-f(x,y)}{s}$$

- A j-edik (fent $j=2$) változón kívül az összes többit állandónak vesszük,
  - az egyetlen megmaradt változó szerint pedig deriválunk.
- Példák:
  - $\partial_y f(x,y)$, ahol $f(x,y) = \frac{x^2}{y}$
  - Ha most x konstans, akkor $\partial_y \frac{x^2}{y} = -\frac{x^2}{y^2}$.
  - $\partial_y f(x,y)$, ahol $f(x,y) = \sin(x+2y)$
  - Ha most x konstans, akkor $\partial_y \sin(x+2y) = 2\cdot\cos(x+2y)$.
- Folytatás gyakorlatokon.
- "Tudja" a gép is.

Többváltozós függvények: differenciálszámítás

- $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$ mátrix $\sim \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ lineáris függvény
  - n sor (képek koordinátái), d oszlop

Definíció

Az $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ függvényt $\boldsymbol{x}$-ben deriválhatónak nevezzük, ha

- *$\boldsymbol{x}$ belső pontja a $\mathcal{D}_{\boldsymbol{f}}$ halmaznak,*
- *van olyan $A \in \mathbb{R}^{n \times d}$ mátrix és $\boldsymbol{R} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ függvény, hogy*
  - $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{\delta} \to \boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\delta})}{|\boldsymbol{\delta}|} = \boldsymbol{0}.$
  - $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\delta}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + A \cdot \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\delta}).$
- *Ezt az A mátrixot az $\boldsymbol{f}$ függvény $\boldsymbol{x}$ pontjában vett deriváltjának nevezzük.*

Többváltozós függvények: differenciálszámítás

- Hogyan lehet a deriváltat konkrétan kiszámítani?
- Válasz először az $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ esetben.
- Ekkor a deriváltmátrix mérete: $1 \times d$
  - Azaz d hosszú vektor.
- Legyen a definícióban $\boldsymbol{\delta} = \delta \cdot \boldsymbol{e}_j$.
  - Azaz j-edik koordináta irányú.
- Ennek kell teljesülnie:

  $$f(\boldsymbol{x} + \delta \cdot \boldsymbol{e}_j) = f(\boldsymbol{x}) + \delta \cdot A \cdot \boldsymbol{e}_j + R(\delta \cdot \boldsymbol{e}_j),$$

  amit átrendezve, δ-val osztva

  $$\frac{f(\boldsymbol{x} + \delta \cdot \boldsymbol{e}_j) - f(\boldsymbol{x})}{\delta} = A \cdot \boldsymbol{e}_j + \frac{1}{\delta} R(\delta \cdot \boldsymbol{e}_j).$$

Többváltozós függvények: differenciálszámítás (folyt.)

- Mindkét oldalon: $\lim\limits_{\delta \to 0}$ operáció:
- $$\lim_{\delta \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + \delta \cdot \boldsymbol{e}_j) - f(\boldsymbol{x})}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} A \cdot \boldsymbol{e}_j + \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} R(\delta \cdot \boldsymbol{e}_j).$$
    - Bal oldal: definíció szerint $\partial_j f(\boldsymbol{x})$.
    - A jobb oldalon:
        - $\lim\limits_{\delta \to 0} A \cdot \boldsymbol{e}_j = A \cdot \boldsymbol{e}_j = A_j$
        - $\lim\limits_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta} R(\delta \cdot \boldsymbol{e}_j) = \lim\limits_{\delta \to 0} \frac{R(\delta \cdot \boldsymbol{e}_j)}{|\delta \cdot \boldsymbol{e}_j|} = 0.$
- Összefoglalva: $A_j = \partial_j f(\boldsymbol{x})$.
- Azaz $f'(\boldsymbol{x}) = (\partial_1 f(\boldsymbol{x}), \partial_2 f(\boldsymbol{x}), \dots, \partial_d f(\boldsymbol{x})) = \nabla f(\boldsymbol{x})$.
    - Mindez *akkor, ha* $f'(\boldsymbol{x})$ *létezik.*

Derivált: gyakorlati jelentés

- Geometriai jelentés:
  - Ha $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, akkor $g'(x_0, y_0)$ jelentése:
    - g grafikonját az $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$ pontban érintő sík meredekségét megadó vektor.
    - Az érintősík:
      $(x, y) \to g(x_0, y_0) + \partial_1 g(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \partial_2 g(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$,
      az ábrán a kék és piros vektorok feszítik ki;
    - egyszerűbb jelöléssel: $\boldsymbol{x} \to g(\boldsymbol{x}_0) + \langle \nabla g(\boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0 \rangle$.
    - Ez "érinti" a grafikont, a tőle vett különbség definíció szerint "kisrendű".
- Ha $\boldsymbol{s} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ egy mozgó pont helyzetét írja le, azaz
  - $\boldsymbol{s}(t)$ - a pont helyzete a t időpontban,
- akkor $\boldsymbol{s}'(t) \in \mathbb{R}^d$ a mozgó pont sebessége t-ben.
- Ha a helyet m-ben, az időt s-ban mértük, akkor

  a sebesség mértékegysége $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Parciális deriváltakkal kapcsolatos további mennyiségek

- Elsősorban a fizikában használjuk ezeket.
- Divergencia
  - Ha $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_d) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, akkor divergencája

    $$\operatorname{div} \boldsymbol{v} \overset{\text{JEL}}{=} \nabla \cdot \boldsymbol{v} \overset{\text{JEL}}{=} \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \cdots + \partial_d v_d.$$
  - $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ jelentése: a $\boldsymbol{v}$-vel leírt áramlási mezőben levő forrás erőssége $\boldsymbol{x}$-ben.
  - Ez gyakran nulla; feltételként is szokott szerepelni.
- Rotáció
  - Ha $\boldsymbol{E} = (E_1, E_2, E_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, akkor rotációja

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} \overset{\text{JEL}}{=} \operatorname{curl} \boldsymbol{E} \overset{\text{JEL}}{=} \nabla \times \boldsymbol{E} \overset{\text{JEL}}{=} (\partial_2 \boldsymbol{E}_3 - \partial_3 \boldsymbol{E}_2, \partial_3 \boldsymbol{E}_1 - \partial_1 \boldsymbol{E}_3, \partial_1 \boldsymbol{E}_2 - \partial_2 \boldsymbol{E}_1).$$

  - Az $\boldsymbol{E}$-vel leírt "áramlási" mezőben levő örvények "erőssége" $\boldsymbol{x}$-ben.
  - Ez gyakran nulla; feltételként is szokott szerepelni.

Derivált kiszámítása: a fordított irány

- Kaptuk: ha az $f'(\boldsymbol{x})$ derivált létezik, akkor az csakis a gradiens lehet.
- Csak az $\nabla f(\boldsymbol{x})$ gradiens értékéből semmilyen következtetést nem tudunk levonni.
  - Példa: $f(x,y) = \begin{cases} 0, & xy = 0 \\ 1, & xy \neq 0 \end{cases}$
    - A $(0,0)$ helyen mindkét parciális függvény azonosan nulla.
    - Emiatt $\partial_1 f(0,0) = \partial_2 f(0,0) = 0$.
    - Ugyanakkor ez a függvény nullában nem is folytonos:

      $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to 0$, de $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = 1 \to 1 \neq f(0,0) = 0$.
- Hogy ellenőrizhető akkor egyszerűen a deriválhatóság?

Derivált létezése

Állítás

Ha az $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ függvény minden parciális deriváltja (létezik és) folytonos az $\boldsymbol{x}$ pont egy környezetében, akkor f deriválható $\boldsymbol{x}$-ben és (az előző levezetés miatt)

$$f'(\boldsymbol{x}) = (\partial_1 f(\boldsymbol{x}), \partial_2 f(\boldsymbol{x}), \ldots, \partial_d f(\boldsymbol{x})) = \nabla f(\boldsymbol{x}).$$

- Nem bizonyítjuk.
- Hol "bukik meg" az előző példa?
- A parciális derivált nem is létezik egy környezetben: $y \neq 0$ esetén $x \to f(x, y)$ nem folytonos $x = 0$-ban.
  - Így $\partial_1 f(0, y)$ nem létezik.

A derivált alaptulajdonságai

Állítás

- *Az* $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ *derivált egyértelmű.*
- *Ha* $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ *deriválhatók* $\boldsymbol{x}$*-ben, akkor* $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}$ *is, és*

  $$(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}).$$
- *Ha* $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ *deriválható* $\boldsymbol{x}$*-ben, és* $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ *deriválhatók* $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$*-ben, akkor*

  $$\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g} \text{ deriválható } \boldsymbol{x}\text{-ben, és } (\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})'(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) \cdot \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}).$$

Bizonyítás:

- Ha az $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ derivált egyszerre lenne A_1 és A_2 is, akkor
  - $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\delta) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + A_1 \cdot \delta + \boldsymbol{R}_1(\delta), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}+\delta) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + A_2 \cdot \delta + \boldsymbol{R}_2(\delta)$
  - $\lim\limits_{\delta \to \mathbf{0}} \dfrac{\boldsymbol{R}_1(\delta)}{|\delta|} = \mathbf{0}, \ \lim\limits_{\delta \to \mathbf{0}} \dfrac{\boldsymbol{R}_2(\delta)}{|\delta|} = \mathbf{0}$ tulajdonságú $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2$ függvényekkel.

A derivált alaptulajdonságai (bizonyítás - folyt.)

- Kivonás, A linearitásának felhasználása:

  $\mathbf{0} = (A_1 - A_2)\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{\delta}) - \boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{\delta})$.

- Mindkét oldalon $\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{\delta}|}$, majd $\lim\limits_{\boldsymbol{\delta}\to\mathbf{0}}$:

$$\mathbf{0} = \lim_{\boldsymbol{\delta}\to\mathbf{0}}(A_1 - A_2)\cdot\frac{\boldsymbol{\delta}}{|\boldsymbol{\delta}|} + \lim_{\boldsymbol{\delta}\to\mathbf{0}}\frac{\boldsymbol{R}_1(\boldsymbol{\delta})}{|\boldsymbol{\delta}|} - \lim_{\boldsymbol{\delta}\to\mathbf{0}}\frac{\boldsymbol{R}_2(\boldsymbol{\delta})}{|\boldsymbol{\delta}|}$$

$$= \lim_{\boldsymbol{\delta}\to\mathbf{0}}(A_1 - A_2)\cdot\frac{\boldsymbol{\delta}}{|\boldsymbol{\delta}|},$$

  - azaz *tetszőleges* 1 hosszú $\boldsymbol{v}$ vektorra $(A_1 - A_2)\cdot\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.
  - tehát $A_1 - A_2 = \mathbf{0}$. $\square$

A derivált alaptulajdonságai (bizonyítás - folyt.)

- Ha az $f'(x), g'(x)$ léteznek, akkor
  - $f(x+\delta) = f(x) + f'(x)\cdot\delta + R_f(\delta)$,

    $g(x+\delta) = g(x) + g'(x)\cdot\delta + R_g(\delta)$,

    amelyeket összeadva

$$(f+g)(x+\delta) = (f+g)(x) + (f'(x)+g'(x))\cdot\delta + R_f(\delta) + R_g(\delta),$$

- ahol

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{R_f(\delta)+R_g(\delta)}{|\delta|} = \lim_{\delta\to 0}\frac{R_f(\delta)}{|\delta|} + \frac{R_g(\delta)}{|\delta|} = 0,$$

- azaz definíció szerint $(f+g)'(x) = f(x) + g(x)$. $\square$

A derivált alaptulajdonságai (bizonyítás - befejezés.)

- Kompozíciófüggvény esete: nem bizonyítjuk.
- Gyakorlatilag szó szerint úgy kell, mint egydimenziós esetben.
- De ellenőrizzük, hogy a formula értelmes-e.
  - Most $\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{k\times d}$ és $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) \in \mathbb{R}^{n\times k}$.
  - Ekkor a $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) \cdot \boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})$ szorzat értelmes,

    és egy $\mathbb{R}^{n\times d}$ típusú mátrixot ad. . $\square$
- Alkalmazás: koordinátatranszformációk (később).

A derivált alaptulajdonságai (folyt.)

Állítás

Ha $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ deriválható $\boldsymbol{x}$-ben, akkor ott folytonos is.

Bizonyítás:

- A sorozatfolytonosságot igazoljuk.
  - Legyen $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_{\boldsymbol{f}}$ olyan, amelyre $(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \boldsymbol{x} \in \mathcal{D}_{\boldsymbol{f}}$.

    Azaz $\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\delta}_n$, ahol $\boldsymbol{\delta}_n \to \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$.
- Ekkor a deriváltra vonatkozó egyenlőség:

  $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\delta}_n) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + A \cdot \boldsymbol{\delta}_n + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\delta}_n)$, ahol
  - $\lim\limits_{\boldsymbol{\delta}_n \to \boldsymbol{0}} A \cdot \boldsymbol{\delta}_n = \boldsymbol{0}$ és $\lim\limits_{\boldsymbol{\delta}_n \to \boldsymbol{0}} \boldsymbol{R}(\boldsymbol{\delta}_n) = \lim\limits_{\boldsymbol{\delta}_n \to \boldsymbol{0}} \dfrac{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\delta}_n)}{|\boldsymbol{\delta}_n|} \cdot |\boldsymbol{\delta}_n| = \boldsymbol{0}$.
  - Így mindkét oldalra $\lim\limits_{\boldsymbol{\delta}_n \to \boldsymbol{0}}$: $\lim\limits_{\boldsymbol{\delta}_n \to \boldsymbol{0}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\delta}_n) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$,

    amit igazolni kellett. $\square$

A derivált kiszámítása általános $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ esetén

- Ismét feltesszük, hogy az $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ derivált létezik.
- Most a derivált (rögzített $\boldsymbol{x}$-ben) egy $n \times d$-es mátrix.
- A deriváltra vonatkozó egyenlőség j-edik komponense:
  $f_j(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\delta}_n) = f_j(\boldsymbol{x}) + A[j,:] \cdot \boldsymbol{\delta}_n + R_j(\boldsymbol{\delta}_n)$,
  - ahol $A[j,:]$ az A mátrix j-edik sora.
- Ez definíció szerint:
  - Az $f_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ függvény deriváltjára vonatkozó formula,
    - ahol $A[j,:] = f_j'(\boldsymbol{x}) = [\partial_1 f_j(\boldsymbol{x}), \partial_2 f_j(\boldsymbol{x}), \ldots, \partial_d f_j(\boldsymbol{x})]$.
- Azaz a deriváltmátrix j-edik sora a j-edik koordinátafüggvény deriváltja.

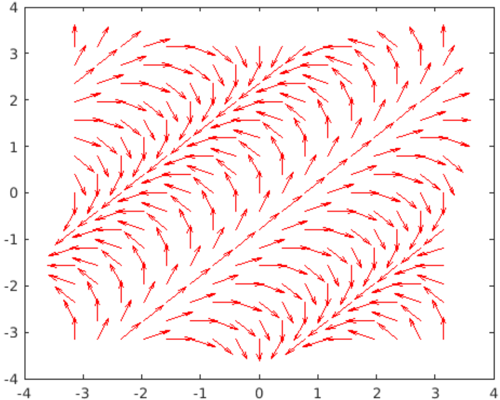
A derivált kiszámítása $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ esetén: összefoglalás

- Az előzőekből: $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(\boldsymbol{x}) & \partial_2 f_1(\boldsymbol{x}) & \dots & \partial_d f_1(\boldsymbol{x}) \\ \partial_1 f_2(\boldsymbol{x}) & \partial_2 f_2(\boldsymbol{x}) & \dots & \partial_d f_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_n(\boldsymbol{x}) & \partial_2 f_n(\boldsymbol{x}) & \dots & \partial_d f_n(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$
- Ez valóban $n \times d$ -es mátrix.
- Egyéb elnevezés: Jacobi-mátrix, teljes derivált.
- Egyéb jelölések: $J(\boldsymbol{x})$, $\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$
- Ismét: ha az $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})$ derivált létezik, akkor ez lesz.

A derivált kiszámítása: kis példa

- Tekintsük a következő függvényt ("vektormezőt"):
  - $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = (\sin(x - y), \cos(x - y))$
  - Egy áramlást írhat le:

    $f(x, y)$ – az áramlási sebesség (x, y)-ben.
- Ezt is el lehet képzelni:



A derivált kiszámítása: kis példa (folyt.)

- Most $\boldsymbol{f}(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$, ahol
  - $f_1(x, y) = \sin(x - y), \quad f_2(x, y) = \cos(x - y)$
- Ebből kapjuk:

$$\boldsymbol{f}'(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x, y) & \partial_2 f_1(x, y) \\ \partial_1 f_2(x, y) & \partial_2 f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x - y) & -\cos(x - y) \\ -\sin(x - y) & \sin(x - y) \end{pmatrix}$$

- Ezt a fenti $\boldsymbol{f}$ függvény Jacobi-mátrixának is nevezzük.
- A derivált minden rögzített helyen egy 2×2-es mátrix,
  - például $x = y$ esetén $\boldsymbol{f}'(x, y) = \boldsymbol{f}'(x, x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Deriváltfüggvények

- Az előzőekből:
  - Ha $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n, \mathcal{D}_{\boldsymbol{f}}$-en mindenütt deriválható, akkor
  - $\boldsymbol{f}' : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{n \times d}$ típusú.
- Speciális eset: $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$; ekkor
  - $f' : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{1 \times d} \equiv \mathbb{R}^d$ típusú.
  - Ha az f' függvény is deriválható:

    $f'' : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d \times d}$ típusú.
  - Konkrétan $d = 2$ esetén:

    $$f''(\boldsymbol{x}) = (\partial_1 f, \partial_2 f)'(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f(\boldsymbol{x}) & \partial_2\partial_1 f(\boldsymbol{x}) \\ \partial_1\partial_2 f(\boldsymbol{x}) & \partial_2\partial_2 f(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}.$$

    - Elnevezés: *Hesse-mátrix.*

Magasabb rendű deriváltak: egy általánosabb keret

- Jelölés: $L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k) = \{A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k, A \text{ lineáris}\}$,
  - $L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k) \sim \mathbb{R}^{k \times d}$ azonosítással: $A \in \mathbb{R}^{k \times d}$.
- Derivált*függvény*:

Ha $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ deriválható az M halmaz pontjaiban, akkor

$$f' : \mathbb{R}^d \to L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k) \sim \mathbb{R}^{d \times k}.$$

- Második derivált:

Ha f' deriválható $\boldsymbol{x}$-ben, akkor

$$f''(\boldsymbol{x}) \in L(\mathbb{R}^d \to L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k))$$

és persze

$$f'' : \mathbb{R}^d \to L(\mathbb{R}^d \to L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k)).$$

n-edik derivált – azonosítás

- Ha $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ egy n-szer deriválható $\boldsymbol{x}$-ben, akkor $f^{(n)}(\boldsymbol{x}) \in L(\mathbb{R}^d \to L(\mathbb{R}^d \to \cdots \to L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}))),$
- Ezért az $L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^s) \sim \mathbb{R}^{s \times d}$ azonosítás alapján $f^{(n)}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{d \times d \times \cdots \times d} \sim \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \cdots \times \mathbb{R}^d.$
- Fontos eset:
  - $f''(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, amely azonosítható egy
    - bilineáris formával,
    - vagy egy mátrixszal

$$f''(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \langle f''(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle.$$

Fontos összefüggés

Tétel (Young-tétel)

Ha $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ esetén $\boldsymbol{x} \to \partial_j g(\boldsymbol{x})$ k-adik változó szerinti deriváltja létezik és $\boldsymbol{x}$-ben folytonos, továbbá ugyanígy $\boldsymbol{x} \to \partial_k g(\boldsymbol{x})$ j-edik változó szerinti deriváltja létezik és $\boldsymbol{x}$-ben folytonos, akkor

$$\partial_j \partial_k g(\boldsymbol{x}) = \partial_k \partial_j g(\boldsymbol{x}).$$

Nem bizonyítjuk; kicsit technikás.

- Azaz ha $\boldsymbol{x}$ egy környezetében g minden másodrendű parciális derivált létezik, valamint ezek mind folytonosak $\boldsymbol{x}$-ben,
  - akkor a $g''(\boldsymbol{x})$ mátrix szimmetrikus.
- Fontos alkalmazás: keressünk primitív függvényt!

Primitív függvény (alias potenciálfüggvény) létezése

- A fizikában gyakran tudjuk, hogy egy $\boldsymbol{f}$ mennyiség gradiensként (deriváltként) áll elő.
  - Hogyan jellemzhetők az ilyen $\boldsymbol{f}$ függvények?
- Ha most $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x}), f_3(\boldsymbol{x})) = \nabla F(\boldsymbol{x})$,

  azaz $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ egy primitív függvénye F, akkor

$$\partial_1 F(\boldsymbol{x}) = f_1(\boldsymbol{x}), \partial_2 F(\boldsymbol{x}) = f_2(\boldsymbol{x}), \partial_3 F(\boldsymbol{x}) = f_3(\boldsymbol{x}).$$

Ha f_j, f_k parciális deriváltjai folytonosak, akkor a Young-tétel szerint

$$\partial_k f_j(\boldsymbol{x}) = \partial_k \partial_j F(\boldsymbol{x}) = \partial_j \partial_k F(\boldsymbol{x}) = \partial_j f_k(\boldsymbol{x}).$$

- Azaz minden lehetséges (j, k) párra: $\partial_j f_k = \partial_k f_j$.

Primitív függvény létezése (folyt.)

Következtetés:

- Ha az $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ függvényre $\partial_k f_j$ minden lehetséges j, k-ra folytonos $\boldsymbol{x}$-ben, akkor az F primitív függvény létezésének szükséges feltétele, hogy minden lehetséges j, k-re: $\partial_j f_k(\boldsymbol{x}) = \partial_k f_j(\boldsymbol{x})$.

Tétel (primitív függvény létezése, $d = 2, 3$)

Ha $f : D \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, ahol D "egyszeresen összefüggő"(??), f parciális deriváltjai D-n folytonosak és $\partial_j f_k(\boldsymbol{x}) = \partial_k f_j(\boldsymbol{x})$ minden $1 \leq j, k \leq d$ esetén, akkor létezik f-nek primitív függvénye a D halmazon.

- Nem kell vizsgára tudni.
- Egy egyszerűbb verzió: következő félév.
- OK, de hogy számítsuk ezt ki?

Primitív függvény kiszámítása - példa

- Legyen $\boldsymbol{f}(x,y) = (y^2, 2xy+1)$; van primitív függvénye?

  $$\partial_1 f_2(x,y) = \partial_1 2xy + 1 = 2y \quad \text{és} \quad \partial_2 f_1(x,y) = \partial_2 y^2 = 2y,$$

  azaz *van* F primitív függvénye.
- $\partial_1 F(x,y) = y^2 \Rightarrow F(x,y) = \int y^2 \, \mathrm{d}x = xy^2 + h(y)$,
- ahol h tetszőleges valós függvény. Ezzel

  $2xy + 1 = \partial_2 F(x,y) = \partial_2 xy^2 + h(y) = 2xy + h'(y)$,

  azaz $\quad h(y) = y + C$, ahol C tetszőleges konstans,
- azaz végül $F(x,y) = xy^2 + h(y) = xy^2 + y + C$.

Összetett függvény deriválása: alkalmazás I.

- Iránymenti derivált:

  Hogy változik $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ az $\boldsymbol{x}$ pontban $\boldsymbol{v}$ irányban?

  - Azaz számítsuk ki: $\lim\limits_{\delta \to 0} \dfrac{u(\boldsymbol{x} + \delta \boldsymbol{v}) - u(\boldsymbol{x})}{\delta}$ deriváltat!
    - Szokásos jelölés: $\partial_{\boldsymbol{v}} u(\boldsymbol{x})$
  - Ehhez mindig határértéket kell számolni?
  - Itt általában $|\boldsymbol{v}| = 1$.
  - Speciális eset: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_j$ - ismerjük; ez $\partial_j u(\boldsymbol{x})$.

- Bonstuk fel így a fenti függvényt:

  $t \xrightarrow{g} \boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v} \xrightarrow{u} u(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v})$,

  - ahol $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ és $u : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

- A fenti határérték: $t \to u(g(t))$ függvény deriváltja $t = 0$-ban.

Összetett függvény deriválása: iránymenti derivált

- Ez alapján már ki tudjuk számítani:

  $$u'(g(t)) \cdot g'(t)|_{t=0} = (\underbrace{\partial_1 u}(g(0)), \underbrace{\partial_2 u}(g(0))) \cdot g'(0)$$

  - Most $g(0) = x$.
  - Itt $g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x}}{t} = \boldsymbol{v}$.
- Összefoglalás: $\partial_{\boldsymbol{v}} u(\boldsymbol{x}) = \langle \nabla u(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{v} \rangle$.
- Így fogjuk alkalmazni (parciális differenciálegyenletek):
  - Adott egy $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ korlátos nyílt (zárt komplementere) halmaz.
  - $u : \Omega \to \mathbb{R}$ folytonosan deriválható, azaz
    - $g' = \nabla g$ kiterjeszthető folytonosan az Ω-t tartalmazó legszűkebb zárt halmazra.
  - $\boldsymbol{v}$ az Ω határán értelmezett, arra merőleges vektor, hossza 1.
  - $\partial_{\boldsymbol{v}} u(\boldsymbol{x})$ értékére gyakran szükség lesz.

Iránymenti derivált, példa

- Legyen $\mathbb{R}^2 \supset \Omega = B_2(\mathbf{0})$ körlap.
- Ennek határa a körvonal, $\boldsymbol{v}(x, y) = \frac{1}{2} \cdot (x, y)$.
- Ha $g : \Omega \to \mathbb{R}, g(x, y) = x^2 + y^2$, akkor
  - a körvonalon levő (x, y) pontokra
  - $\partial_{\boldsymbol{v}} g(x, y) = \langle \nabla g(x, y), \boldsymbol{v}(x, y) \rangle = \langle (2x, 2y), \frac{1}{2} \cdot (x, y) \rangle =$
    $= x^2 + y^2 = 4.$
  - Logikus, hogy konstans a körvonalon: a g mennyiség változása a sugár irányában mindenhol ugyanannyi.

Koordinátatranszformációk - motiváció

Alkalmazásokban fontos: bizonyos mennyiségeket nem a derékszögű koordinátarendszerben a legkönnyebb leírni.

Példák:

- Egy ponttöltés körül mozgó másik töltés leírása:

  csak a ponttól vett távolság számít.

- Egy pontszerű tömeg mozgása:

  azt a sebességével és az impulzusával érdemes megadni.

- Átlaghőmérséklet a Föld felszínén és belsejében:

  leginkább a középponttól vett távolság és az északi vagy déli szélesség számít.

Koordináta-transzformációk - összetett függvény deriválása

- Egyszerűség kedvéért kétdimenziós tárgyalás.
- Az $u(x, y)$ alak összetett lenne,
  - az u mennyiséget $(r, s) = \psi(x, y)$ függvényében keressük.
- Ekkor $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a koordináta-transzformáció.
- Ezzel (minden oszlopvektor!!)

$$u(x, y) = u(\psi^{-1}(r, s)) = \tilde{u}(r, s)$$

(igénytelen módon gyakran $\tilde{u} = u$).

- Azaz

$$(x, y) \xrightarrow{\psi} (r, s) \xrightarrow{\tilde{u}} \tilde{u}(r, s) = u(x, y).$$

Koordinátatranszformációk - formula II.

- Az összetett függvény deriválási szabálya szerint:

$$\nabla_{x,y} u(x,y) = \nabla_{r,s} \tilde{u}(r,s) \cdot \nabla_{x,y}(r,s)(x,y).$$

- Részletesebben (mátrix-vektor alakban):

$$[\partial_x u(x,y), \partial_y u(x,y)] = [\partial_r \tilde{u}(r,s)\ \partial_s \tilde{u}(r,s)] \begin{pmatrix} \partial_x r(x,y) & \partial_y r(x,y) \\ \partial_x s(x,y) & \partial_y s(x,y) \end{pmatrix}$$

- Vagyis az egyes változók szerinti deriváltakra:

$$\partial_x u(x,y) = \langle [\partial_r \tilde{u}(r,s)\ \partial_s \tilde{u}(r,s)]\,, [\partial_x r(x,y)\ \partial_x s(x,y)] \rangle$$

$$\partial_y u(x,y) = \langle [\partial_r \tilde{u}(r,s) \partial_s \tilde{u}(r,s)]\,, [\partial_y r(x,y) \partial_y s(x,y)] \rangle.$$

  - Az argumentumokat általában elhagyjuk.

Koordinátatranszformációk - példa: polártranszformáció

- Ezeket szeretnénk új változóként:
  - az origótól mért távolság
  - az $\boldsymbol{e}_1$-től vett elfordulás szöge
- Vagyis ezeket:

$$r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \phi(x,y) = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}, \quad \text{így}$$

$$\partial_y r(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\phi$$

$$\partial_y \phi(x,y) = \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\cos\phi}{r},$$

így

$$\partial_y u(x,y) = \partial_r \tilde{u}(r,\phi)\cdot\sin\phi + \partial_\phi \tilde{u}(r,\phi)\cdot\frac{\cos\phi}{r}$$

Polártranszformáció (folyt.)

- Hasonlóan az x változó szerinti deriváltra:

$$\partial_x r(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\phi$$

$$\partial_x \phi(x,y) = -\frac{\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{\sin\phi}{r},$$

így

$$\partial_x u(x,y) = \partial_r \tilde{u}(r,\phi)\cdot\cos\phi - \partial_\phi \tilde{u}(r,\phi)\cdot\frac{\sin\phi}{r}$$

- Folytatás - gyakorlat: $\partial_{xx} u + \partial_{yy} u$ polárkoordinátákban.

Egy újabb példa

Hogy lehetne látni a $\partial_x u(x,y) + \partial_y u(x,y) = 0$ egyenlet megoldásait?

- Legyen $r = x + y$ és $s = x - y$.

Ekkor

$$\partial_x u(x,y) = [\partial_r \tilde{u}(r,s)\ \partial_s \tilde{u}(r,s)]\,[\partial_x r(x,y)\ \partial_x s(x,y)] =$$

$$= \partial_r \tilde{u}(r,s) \cdot 1 + \partial_s \tilde{u}(r,s) \cdot 1.$$

Hasonlóan

$$\partial_y u(x,y) = [\partial_r \tilde{u}(r,s)\ \partial_s \tilde{u}(r,s)]\,[\partial_y r(x,y)\ \partial_y s(x,y)] =$$

$$= \partial_r \tilde{u}(r,s) \cdot 1 + \partial_s \tilde{u}(r,s) \cdot (-1).$$

Egy újabb példa - folytatás

Adjuk össze a kapott két egyenlőséget:

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_x u(x,y) + \partial_y u(x,y) = \\ &= \partial_r \tilde{u}(r,s) + \partial_s \tilde{u}(r,s) + \partial_r \tilde{u}(r,s) - \partial_s \tilde{u}(r,s) = \\ &= 2\partial_r \tilde{u}(r,s). \end{aligned}$$

Ezzel majd könnyen elbánunk, hiszen a fentiek szerint $\tilde{u}(r,s)$ nem függ r-től, hanem csak az s változótól függ,

azaz $\tilde{u}(s) = \tilde{u}(x-y)$ alakú.

Folytatás: PDE tárgy.

Kis összefoglalás: hol vagyunk, mi van hátra?

- Derivált fogalmát definiáltuk,
- Tulajdonságokat, műveleti szabályokat elemeztünk.
- Magasabb rendű deriváltakat vizsgáltunk.
  - Szélsőértékszámításra fogjuk alkalmazni.
  - Taylor-közelítésre fogjuk alkalmazni.
- Bizonyos esetben az inverz műveletet (primitív függvény).
  - Sajnos, ezzel közvetlenül nem lehet integrálokat számolni.

Taylor-közelítés: előzetes megjegyzések

- Kettős cél:
  - Többváltozós függvények közelítése "egyszerűbb alakú" függvényekkel
    - Volt már ilyen; $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt egy pont körül az érintősíkjával közelítettünk.
  - Szélsőértékszámításhoz eszköz.
- Csak másodrendűig írjuk ki a tagokat.
  - Ez már a Lagrange-maradéktagnak megfelelő lesz.

Taylor-közelítés: a tétel

Tétel (Taylor-közelítés másodrendű maradéktaggal)

- *Legyen* $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ *2-szer deriválható* $B_r(\boldsymbol{x})\subset\mathbb{R}^d$*-ban.*
- *Legyen* $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^d$ *olyan, hogy* $|\boldsymbol{v}|<r$ *teljesül!*

Ekkor valamilyen $\tau\in(0,1)$ *számmal* $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v})$ *a következő alakban adható meg:*

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}) &= f(\boldsymbol{x})+\frac{f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v})}{1!}+\frac{f''(\boldsymbol{x}+\tau\boldsymbol{v})(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}{2!}\\
&= f(\boldsymbol{x})+\frac{f'(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{v}}{1!}+\left\langle\frac{f''(\boldsymbol{x}+\tau\boldsymbol{v})}{2!}\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\right\rangle.
\end{aligned}
$$

Taylor-közelítés – bizonyítás

- Legyen $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\phi(t) = f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v})$.
- Alapgondolat: $\phi(t)$ értékét megadjuk Taylor-polinommal és maradéktaggal.
  - Ehhez a deriváltjait kell nullában megadni.
- Kompozíciófüggvényként deriválva

  $$\phi'(t) = f'(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}) \cdot (\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v})' = f'(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v}.$$

- A második derivált pedig:

  $$\phi''(t) = (f'(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v})' = (f'(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}))' \cdot \boldsymbol{v} =$$

  $$= (f''(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v}$$

- f' lineáris függvényként, f'' bilineáris függvényként is:
  - $f'(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v} = f'(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v})(\boldsymbol{v})$
  - $\langle f''(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = f''(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v})(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$.

Taylor-közelítés – bizonyítás (folyt.)

- Tudjuk: $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}) = \phi(1)$ - erre az egydim Taylor-formula maradéktaggal:

$$\phi(1) = \phi(0) + \frac{\phi'(0)}{1!}1 + \frac{\phi''(\tau)}{2!}1^2.$$

- Ebbe helyettesítve, ahol $\tau \in (0,1)$ alkalmas konstans:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}) &= f(\boldsymbol{x}) + \frac{f'(\boldsymbol{x})}{1!}(\boldsymbol{v}) + \frac{f''(\boldsymbol{x}+\tau\boldsymbol{v})(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})}{2!} = \\ &= f(\boldsymbol{x}) + \frac{f'(\boldsymbol{x})}{1!}\cdot\boldsymbol{v} + \left\langle \frac{f''(\boldsymbol{x}+\tau\boldsymbol{v})}{2!}\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\right\rangle, \end{aligned}$$

ahogy a tételben állítottuk. □

Taylor-közelítés – a másodrendű Taylor-polinom

- A fenti tétel eredménye nagyon szép,
  - de adott $\boldsymbol{x}$ és $\boldsymbol{v}$ esetén általában nem ismerjük τ értékét.
- Emiatt pontosan nem tudjuk $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v})$ értékét kiszámítani, hanem közelítjük.
  - Például az alábbival:

    $$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}) \approx f(\boldsymbol{x}) + f'(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v} + \frac{1}{2} \cdot \left\langle f''(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \right\rangle.$$

    - Elnevezés: az f függvény $\boldsymbol{x}$ körüli másodrendű Taylor-polinomja $\boldsymbol{v}$-ben.
    - Itt $\boldsymbol{v}$ a polinom változója.
  - Ennek közelítő tulajdonságához
    - Harmadrendű Taylor-maradéktag kellene.
    - Ezt nem írjuk le.

Taylor-közelítés – egy példa

- $f(x,y) = e^{xy}$, közelítsük másodrendben (0,1) körül!
- $\partial_1 f(x,y) = ye^{xy}, \quad \partial_2 f(x,y) = xe^{xy}$
- $\partial_{11} f(x,y) = y^2 e^{xy} \quad \partial_{22} f(x,y) = x^2 e^{xy},$
- $\partial_{21} f(x,y) = \partial_{12} f(x,y) = e^{xy} + xye^{xy},$
  - Vagyis $\nabla f(0,1) = (1,0)$
  - $f''(0,1) = \begin{pmatrix} \partial_{11} f(0,1) & \partial_{21} f(0,1) \\ \partial_{12} f(0,1) & \partial_{22} f(0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$
- Most mindezt a következő formulába helyettesítjük:

$$f(x,y) \approx f(0,1) + \langle \nabla f(0,1), [x, y-1] \rangle +$$
$$+ \frac{1}{2!} \left\langle f''(0,1)[x, y-1]^T, [x, y-1]^T \right\rangle.$$

- A fenti deriváltakat behelyettesítve:
- $f(x,y) \approx 1 + \langle (1,0),(x,y-1)\rangle +$
  $+\frac{1}{2}\cdot \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}(x,y-1)^T,(x,y-1)^T \right\rangle =$
  $= 1 + x + \frac{1}{2}\cdot\langle (x+y-1,x),(x,y-1)\rangle =$
  $= 1 + x + \frac{1}{2}\cdot (x(x+y-1)+x(y-1)) =$
  $= 1 + x + \frac{1}{2}(x^2+2xy-2x) = 1 + \frac{x^2}{2} + xy.$

- Egy $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ függvény *lokális* szélsőértékeit keressük.
- Feltevés: $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$ belső pontja $\mathcal{D}_f$-nek.

Definíció

Azt mondjuk, hogy f-nek $\boldsymbol{a}$-ban lokális minimuma van, ha létezik olyan $\delta > 0$, hogy $\boldsymbol{x} \in B_\delta(\boldsymbol{a})$ esetén $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{a})$.
Ha $\boldsymbol{x} \in B_\delta(\boldsymbol{a}) \setminus \{\boldsymbol{a}\} \Rightarrow f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{a})$, akkor szigorú lokális minimumról beszélünk.

- Hasonlóan: (szigorú) lokális maximum fogalma.

Szélsőérték - szükséges feltétel

Tétel

Ha f deriválható az $\boldsymbol{a}$-ban és f-nek $\boldsymbol{a}$-ban lokális szélsőértéke van (minimuma vagy maximuma), akkor $f'(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$.

Bizonyítás: Ha f-nek $\boldsymbol{a}$-ban szélsőértéke van,

- akkor minden $\boldsymbol{v}$ irány esetén a

  $t \to f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v})$

  függvénynek is szélsőértéke van nullában.
- Ez definíció szerint $\partial_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{a})$.
- Így speciálisan az $\boldsymbol{a}$ helyen az összes parciális derivált,
  - azaz $f'(\boldsymbol{a})$ is nulla. $\square$

Szélsőérték - további kérdések

- Ha tudom, hogy $f : B_2(\mathbf{0}) \to \mathbb{R}$
  - mindenütt deriválható és a zárt körlapon folytonos
  - továbbá itt f' sehol sem nulla.
- Akkor lehet, hogy nincs szélsőértéke a zárt körlapon?
  - De van: Weierstraß-maximumelv.
- De a nyílt körlapon akkor sincs.
  - Igen, akkor a körvonalon kell lennie.
  - Szükséges lesz majd "feltételes" szélsőértékszámítás.

Lineáris algebrai ismétlés

Állítás

Tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ *szimmetrikus mátrix esetén:*

A *pozitív definit* $\overset{DEF}{\Longleftrightarrow} \langle A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle > 0 \; \forall \; \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^d \setminus \{\boldsymbol{0}\} \Leftrightarrow$

$\{A \textit{ sajátértékei}\} \subset \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \{A \textit{ sarok-aldeterminánsai}\} \subset \mathbb{R}^+$

A *pozitív szemidefinit* $\overset{DEF}{\Longleftrightarrow} \langle A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\rangle \geq 0 \; \forall \; \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^d \Leftrightarrow$

$\{A \textit{ sajátértékei}\} \subset [0, \infty)$

- Hasonló igaz negatív (szemi) definit mátriokra, csak a sarokaldeterminánsok váltakozó előjelűek.
- Ismert lineáris algebrából, nem bizonyítjuk.

Szélsőérték második derivált segítségével

Tétel

Ha az $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ függvény kétszer deriválható az $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ egy környezetében, és f'' folytonos $\mathbf{a}$-ban, akkor teljesülnek a következők:

1. *Ha f-nek $\mathbf{a}$-ban lokális minimuma van, akkor $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, és $f''(\mathbf{a})$ pozitív szemidefinit.*
2. *Ha $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ és $f''(\mathbf{a})$ pozitív definit, akkor f-nek $\mathbf{a}$-ban szigorú lokális minimuma van.*

- Ha $f''(\mathbf{a}) \neq 0$ csupán pozitív szemidefinit, akkor lehet itt:
  - lokális minimum vagy szigorú lokális minimum
  - egyáltalán nincs szélsőérték.

Szélsőérték második deriválttal - bizonyítás I.

- Írjuk fel a Taylor-formulát f-re
  - másodrendű maradéktaggal az $\boldsymbol{a}$ pont körül!
- Ekkor tetszőleges $\boldsymbol{v}$ irány és elég kis abszolútértékű $t \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{a}) + \frac{f'(\boldsymbol{a})}{1!} t\boldsymbol{v} + \frac{f''(\boldsymbol{a} + \tau t\boldsymbol{v})}{2!} (t\boldsymbol{v}, t\boldsymbol{v}) \quad (1)$$

  valamilyen $\tau \in (0, 1)$ értékkel.
- Tegyük fel, hogy f-nek $\boldsymbol{a}$-ban lokális minimuma van.
  - Ekkor a fenti formulában $f'(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$,
  - vagyis a bilinearitás miatt t^2 tel osztva:

$$0 \leqslant \frac{f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})}{t^2} = \frac{f''(\boldsymbol{a} + \tau t\boldsymbol{v})}{2!} (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) .$$

Szélsőérték második deriválttal - bizonyítás II.

- Itt mindkét oldalon
  - $t \to 0$ határértéket véve,
  - az f'' függvény $\boldsymbol{a}$-beli folytonosságát használva:

$$0 \leqslant \lim_{t \to 0} \frac{f''\left(\boldsymbol{a} + \tau t \boldsymbol{v}\right)}{2!} \left(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\right) = f''(\boldsymbol{a}) \left(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\right),$$

- amivel a tétel első felét beláttuk.

Szélsőérték második deriválttal - bizonyítás II.

- A második állítás igazolásához is ezt használjuk:

$$\frac{f\left(\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}\right)-f\left(\boldsymbol{a}\right)}{t^2}=\frac{f''\left(\boldsymbol{a}+\tau t\boldsymbol{v}\right)}{2!}\left(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\right). \tag{2}$$

- Mivel $f''(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})>0$ és f'' folytonos $\boldsymbol{a}$-ban,
- ezért $\boldsymbol{a}$-nak van olyan U környezete, hogy $\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{v}\in U$ esetén

$$\frac{f''\left(\boldsymbol{a}+\tau t\boldsymbol{v}\right)}{2!}\left(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\right)>0.$$

- Ebben a környezetben (2) bal oldala is pozitív,
- azaz $f(\boldsymbol{a})$ szigorú lokális minimum lesz. $\square$

Szélsőérték második derivált segítségével - folyt.

Tétel

Ha az $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ függvény kétszer deriválható az $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$ egy környezetében, és f'' folytonos $\boldsymbol{a}$-ban, akkor teljesülnek a következők:

1. *Ha f-nek $\boldsymbol{a}$-ban lokális maximuma van, akkor $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$, és $f''(\boldsymbol{a})$ negatív szemidefinit.*
2. *Ha $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$ és $f''(\boldsymbol{a})$ negatív definit, akkor f-nek $\boldsymbol{a}$-ban szigorú lokális maximuma van.*

- Bizonyítás: az előző álllítást $-f$-re alkalmazzuk.

Szélsőértékszámítás - algoritmus

(i) Megvizsgáljuk, hogy milyen $\boldsymbol{a}$ esetén teljesül $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$, azaz például két változó esetén

$\partial_1 f(\boldsymbol{a}) = \partial_2 f(\boldsymbol{a}) = 0.$

- Ez rendszerint egyenletrendszerre vezet (most két egyenlet, két ismeretlen).
- Ezeken az $\boldsymbol{a}$ helyeken *lehet* szélsőérték.

(ii) Kiszámoljuk az $f''(\boldsymbol{a})$ mátrixot minden "kritikus" $\boldsymbol{a}$ helyen.

(iii) Ennek (szemi)definit tulajdonsága alapján a fenti két tétel segítségével döntünk.

Szélsőértékszámítás: egy példa

- Határozzuk meg az $f(x,y) = -2x^3 + y^2 + 6xy + 3$ hozzárendeléssel adott függvény szélsőértékhelyeit és szélsőértékeit!

- Tudjuk, hogy

  $$\partial_1 f(x,y) = -6x^2 + 6y \quad \text{és} \quad \partial_2 f(x,y) = 2y + 6x.$$

- Vagyis ezt kell megoldanunk: $\begin{cases} 0 = -6x^2 + 6y \\ 0 = 2y + 6x. \end{cases}$

  - Az elsőből: $2y = 2x^2$,
  - a másodikba írva: $2x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -3.$

- Vagyis itt *lehet* szélsőérték ("kritikus pontok"):

  $$(x_1, y_1) = (0,0) \ \text{ és } \ (x_2, y_2) = (-3, 9)\ .$$

Szélsőértékszámítás: egy példa -folytatás

- A második derivált mátrixhoz:

  $\partial_{11} f(x,y) = -12x, \quad \partial_{12} f(x,y) = 6 \quad \text{és} \quad \partial_{22} f(x,y) = 2,$

- azaz $f''(x,y) = \begin{pmatrix} -12x & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$,

- tehát $f''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad f''(-3,9) = \begin{pmatrix} 36 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

- Most $\det(f''(0,0)) = -36$,
  - azaz sajátértékei ellentétes előjelűek,
  - tehát $f''(0,0)$ indefinit.

- Így $(0,0)$-ban nem lehet szélsőérték.

- Most a $(-3, 9)$ "kritikus pontban" vizsgáljuk meg, valóban van-e szélsőérték.
- $\det(f''(-3, 9)) = 36$,
  - $(f''(-3, 9))$ sarok-aldeterminánsai pozitívak,
  - így $f''(-3, 9)$ pozitív definit.
- Azaz f-nek $(-3, 9)$-ben szigorú lokális minimuma van.
- Grafikon - kis Matlab-kód:

```
[X,Y] = meshgrid(-4:0.05:-2,8:0.05:10);

Z = -2*X.*X.*X + Y.*Y + 6*X.*Y + 3;

surf(X,Y,Z)
```

Szélsőértékszámítás: egy újabb eset

- Mi történik, ha az $\boldsymbol{a}$ kritikus pontban $f''(\boldsymbol{a})$ indefinit, azaz sem pozitív (szemidefinit), sem negatív (szemidefinit)?
  - Ekkor pozitív és negatív is van a sajátértékek közt.
- Ekkor f-nek $\boldsymbol{a}$-ban sem lokális maximuma, sem lokális minimuma nem lehet.
  - az előző két tétel első pontja miatt.
- Ekkor azt mondjuk:
  - f-nek $\boldsymbol{a}$-ban *nyeregpontja* van.

- Mit jelent a számoláskor az $f''(\boldsymbol{a})$ mátrix sajátértéke, sajátvektora?
- Legyen ismét $f'(\boldsymbol{a}) = 0$ és tegyük fel: $f''(\boldsymbol{a})$ létezik.
- Ha $\boldsymbol{v}$ sajátvektora $f''(\boldsymbol{a})$-nak:
  - $f''(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v} = \lambda \cdot \boldsymbol{v},\ \lambda > 0,\ |\boldsymbol{v}| = 1,$
    - Azaz $\langle f''(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \lambda \cdot \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = \lambda |\boldsymbol{v}|^2 = \lambda > 0.$
  - Extra feltétel: f'' folytonos $\boldsymbol{a}$-ban.
    - Emiatt $\boldsymbol{a}$ egy $B_r(\boldsymbol{a})$ környezetében is

      $\boldsymbol{b} \in B_r(\boldsymbol{a}) \ \Rightarrow\ \langle f''(\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle > 0.$
- Az (1) formula szerint

$$f\left(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}\right) = f\left(\boldsymbol{a}\right) + \frac{f'(\boldsymbol{a})}{1!} t\boldsymbol{v} + \frac{f''(\boldsymbol{a}+\tau t\boldsymbol{v})}{2!}\left(t\boldsymbol{v}, t\boldsymbol{v}\right)$$

- Átrendezve, kiemelve, bilineáris alakot átírva:

$$f\left(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}\right) - f\left(\boldsymbol{a}\right) = t^2 \cdot \left\langle \frac{f''(\boldsymbol{a}+\tau t\boldsymbol{v})}{2!} \cdot \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \right\rangle$$

Szélsőértékek, nyeregpont: újabb kérdések

- Így ha $t < r$,
  - akkor $\boldsymbol{a} + \tau t \boldsymbol{v} \in B_r(\boldsymbol{a})$,
  - és emiatt $\left\langle \frac{f''(\boldsymbol{a}+\tau t\boldsymbol{v})}{2!} \cdot \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \right\rangle > 0$.

  Így az előző formula jobb és bal oldala is pozitív,
  - tehát itt $f(\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}) > f(\boldsymbol{a})$,
- azaz $f(a)$ a $\boldsymbol{v}$ *irányban* minimum.
- Összefoglalva: az adott λ sajátértékhez tartozó sajátvektor irányában $\lambda > 0$ esetén szigorú lokális minimum,
  - hasonlóan $\lambda < 0$ esetén szigorú lokális maximum van.
- Tudjuk: a különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok merőlegesek,
  - így különböző előjelű sajátértékek esetén $(\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a}))$ környezetében f egy "nyeregfelületet" definiál.

Szélsőértékszámítás: egy másik példa

- Határozzuk meg az $f(x,y) = x^2 - y^2$ hozzárendeléssel adott függvény szélsőértékhelyeit és szélsőértékeit!
- Tudjuk: $\partial_1 f(x,y) = 2x \quad \text{és} \quad \partial_2 f(x,y) = -2y.$
- Vagyis ezt kell megoldanunk: $\begin{cases} 0 = 2x \\ 0 = -2y. \end{cases}$
  - Az egyetlen kritikus pont: $(x_0, y_0) = (0,0)$.
- $\partial_{11} f(x,y) = \partial_{22} f(x,y) = -2$ és $\partial_{12} f(x,y) = \partial_{21} f(x,y) = 0$,
  - azaz $f''(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, tehát $(0,0)$-ban is ennyi.
  - Determinánsa negatív $\Rightarrow$ sajátértékei ellenkező előjelűek.
- Vagyis nincs szélsőértéke $(0,0)$-ban.

Egy középértéktétel többváltozós esetben

- Emlékeztető - Lagrange-tétel egy speciális esetben:
  - Ha $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos és $(0,1)$-en deriválható,
    - akkor valamilyen $\tau \in (0,1)$ esetén

      $$g(1) - g(0) = g'(\tau).$$
  - Ezt használjuk, és hasonlót látunk be:

Tétel

Ha $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ deriválható az $\boldsymbol{a}$ pont egy $B_r(\boldsymbol{a})$ környezetében, akkor tetszőleges $|\boldsymbol{v}| < r$ esetén létezik $\tau \in [0,1]$ úgy, hogy

$$f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a}) = f'(\boldsymbol{a} + \tau \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v}.$$

- Ez átrendezve egy Taylor-formula első rendű maradéktaggal.

Egy középértéktétel többváltozós esetben (folyt.)

- Bizonyítás:
  - Ismét $\Phi : [0,1] \to \mathbb{R},\ \Phi(t) = f(\boldsymbol{a} + t \cdot \boldsymbol{v})$.
  - Ez folytonos $[0,1]$-en és deriválható $(0,1)$-en.
  - Így $\Phi(1) - \Phi(0) = \Phi'(\tau)$ valamilyen $\tau \in (0,1)$ esetén.
  - Ismét: $\Phi(0) = f(\boldsymbol{a}), \Phi(1) = f(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v})$,
    - továbbá $\Phi'(\tau) = f'(\boldsymbol{a} + \tau\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v}$,
    - ahogy a másodrendű esetben kiszámoltuk.
  - Ezeket a fenti egyenlőségbe beírva kapjuk az állítást. $\square$

A Lagrange-középértéktétel egy másik lehetséges általánosítása

Tétel (Lagrange-egyenlőtlenség (egyszerű eset))

Ha $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ deriválható az $\boldsymbol{a}$ pont egy $B_r(\boldsymbol{a})$ környezetében, akkor tetszőleges $|\boldsymbol{v}| < r$ esetén létezik $\tau \in [0,1]$ úgy, hogy

$$|f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})| \leq \sup_{|\boldsymbol{b}|<r} |f'(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})| \cdot |\boldsymbol{v}|.$$

Bizonyítás:

- Az előző tétel + Cauchy–Schwarz:

  $$|f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{a})| = |f'(\boldsymbol{a}+\tau\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v}| \leq |f'(\boldsymbol{a}+\tau\boldsymbol{v})| \cdot |\boldsymbol{v}| \leq$$

  $$\leq \sup_{|\boldsymbol{b}|<r} |f'(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})| \cdot |\boldsymbol{v}|. \qquad \square$$

- Ez túl egyszerű és csak egyenlőtlenséget állít.
  - Igen, de jól általánosítható.

Az implicitfüggvény-tétel: motiváció

- Fő kérdés:
  - Adott $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény esetén a $\Phi(x, y) = 0$ egyenlet milyen feltételek mellett határoz meg egy $y = f(x)$ függvényt?
  - Azaz: ki lehet fejezni az y változót a fenti egyenletből?
- Egyszerű, szemléletes példa:

$$\Phi(x, y) := x^2 + y^2 - 1 = 0$$

- Megoldásai az origó körüli egységkörvonal pontjai.
- Lehet $y = \sqrt{1 - x^2}$ és $y = -\sqrt{1 - x^2}$.
- y valamilyen plusz feltétellel lehet x függvénye.

Az implicitfüggvény-tétel: motiváció (folyt.)

- Életszerűbb példa - rugóra függesztett test mozgása:
  - adott: E össz energia és m, r paraméterek,
  - tudjuk, hogy

    $$E = \frac{1}{2}mv^2 + rd \Leftrightarrow \Phi(v, d) := \frac{1}{2}mv^2 + rd - E = 0$$

- Meghatározható-e a v mozgási sebesség E, m, r és d függvényében?

  Vagyis az utóbbi egyenlőségből ki lehet-e fejezni?

- Sőt, lehetne mozgó objektumok rendszere adott össz energiával, egyenkénti tömegekkel (pl. naprendszer vagy egy atom).

- Az egyik objektum helyzetét/sebességét meg lehet-e az összes többi hasonló adatából határozni?

Az implicitfüggvény-tétel: motiváció - ráadás

- Ilyen már szerepelt - és itt el is akadunk:
  - Adott az alábbi KDE-re vonatkozó kezdeti érték feladat:
    $$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{e^{-x(t)}}{1+x(t)} \\ x(0) = 1. \end{cases}$$
  - Van-e ennek $x : (0, t_*) \to \mathbb{R}$ megoldása legalább elég kis t_*-ra?
- Átrendezünk, primitív függvényt keresünk:
  $$\dot{x}(t) \cdot e^{x(t)}(1 + x(t)) = \left[x(t) \cdot e^{x(t)}\right]' = 1$$
- Azaz kapjuk:
  $$\dot{x}(t) \cdot e^{x(t)}(1 + x(t)) = \left[x(t) \cdot e^{x(t)}\right]' = 1$$
- Vagyis valamilyen $C \in \mathbb{R}$ konstanssal
  $$x(t) \cdot e^{x(t)} = t + C.$$
- Sőt $t = 0$ esetét véve $x(0) = 1$ miatt:
  $$x(0) \cdot e^{x(0)} = 1 \cdot e = 0 + C \Rightarrow C = e.$$

Az implicitfüggvény-tétel: motiváció - ráadás (folyt.)

- A megoldásra tehát

  $x(t) \cdot e^{x(t)} = t + e.$

- Ebből ki lehet a megoldást fejezni?
  - Legalább $t = 0, x(t) = 1$ "körül" kellene ez.
- Ismét nem is a konkrét képletre van szükségünk,
  - hanem arra, hogy ez meghatározható-e $x(t)$ a t változó segítségével, azaz *létezik-e* megoldás.

Az implicit függvény tétel: motiváció, példa (folyt.)

- Egyrészt egy adott pont egy környezetében akarjuk ezt:
  - Tudjuk, hogy $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ megoldás, és ennek egy környezetében a körvonal valóban elképzelhető egy $y = f(x)$ függvény grafikonjaként.
- Még egy feltétel kellene: milyen pontok körül kapunk ilyen grafikont?
- Sejtés: ahol a ponthalmazt adó görbe nem "függőleges", azaz y változtatásával x is változik, tehát $\partial_2\Phi(x, y) \neq 0.$
- A szabatos megfogalmazáshoz, általánosításhoz:
  - Legyen $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
  - Fent $n = m = 1$ szerepelt.

Az implicit függvény tétel

Tétel

Tegyük fel, hogy

- $\Phi\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\right)=\boldsymbol{0}$,
- Φ *függvény folytonos az* $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^n$ *egy* U *környezetében,*
- $\boldsymbol{y}\mapsto\Phi\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ *folytonosan differenciálható* U*-ban*
- $\det\left(\partial_{\boldsymbol{y}}\Phi\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\right)\right)\neq 0.$ *Egydimenziós eset:* $\partial_y\Phi(x,y)\neq 0.$

Ekkor létezik $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$*-nek olyan* $B_r\left(\boldsymbol{a}\right)\times B_\rho\left(\boldsymbol{b}\right)$ *környezete, és olyan* $f:B_r\left(\boldsymbol{a}\right)\to B_\rho\left(\boldsymbol{b}\right)\subset\mathbb{R}^n$ *folytonos függvény, hogy*

$$\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in B_r\left(\boldsymbol{a}\right)\times B_\rho\left(\boldsymbol{b}\right):\Phi\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=0\right\}=\left\{(\boldsymbol{x},f\left(\boldsymbol{x}\right)):\boldsymbol{x}\in B_r\left(\boldsymbol{a}\right)\right\}.$$

Az implicit függvény tétel - folytatás

- A tételt nem igazoljuk.
- A bizonyítás $n = 1$ esetén: kis trükkel a Bolzano-tétel alkalmazása.
- Az állítás élesítése:

Tétel

Tegyük fel, hogy teljesülnek a fenti tétel feltételei és az $\boldsymbol{x} \mapsto \Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ hozzárendeléssel adott függvény is folytonosan deriválható $\boldsymbol{a}$ egy U környezetében.
Ekkor a fenti $f : B_r(\boldsymbol{a}) \to \mathbb{R}^n$ differenciálható.

- A bizonyítás itt már összetett; ezt sem írjuk le.
- De ha a feltételek teljesülnek, kiszámoljuk a deriváltat.

Az f implicit függvény deriválása

- Ha f deriválható $\boldsymbol{x}$-ben, induljunk ki ebből: $\mathbf{0} = \Phi\left(\boldsymbol{x}, f\left(\boldsymbol{x}\right)\right)$.
- Ennek mindkét oldalát $\boldsymbol{x}$ szerint deriválva kapjuk:
  - a $B_r\left(\boldsymbol{a}\right)$ halmazon

$$\mathbf{0} = \partial_1 \Phi\left(\boldsymbol{x}, f\left(\boldsymbol{x}\right)\right) \cdot I + \partial_2 \Phi\left(\boldsymbol{x}, f\left(\boldsymbol{x}\right)\right) \cdot f'\left(\boldsymbol{x}\right),$$

- vagyis a $\det\left(\partial_2\left(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\right)\right) \neq 0$ feltételt valamint a derivált folytonosságát használva

$$f'\left(\boldsymbol{x}\right) = -\left[\partial_2 \Phi\left(\boldsymbol{x}, f\left(\boldsymbol{x}\right)\right)\right]^{-1}\left[\partial_1 \Phi\left(\boldsymbol{x}, f\left(\boldsymbol{x}\right)\right)\right].$$

- Ez ijesztő, de a gyakorlatban nem ebbe a formulába helyettesítünk,
  - hanem egyszerűen kiszámoljuk a deriváltat.
- Miért érdekes (furcsa) ez?
  - Ha f nem ismert, deriváltja $\boldsymbol{x}$-ban akkor is kiszámolható.

Az f implicitfüggvény-tétel és deriválása: példák

- Példa - a legegyszerűbb: $x^2 + y^2 = 3$.
  - Mikor fejezhető ki ebből az y?
  - Az ebből kapott $y(x)$ deriváltja hogyan adható meg?
- Most $\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - 3$.
- Tudjuk, hogy $\partial_y x^2 + y^2 - 3 = 2y$.
- Ez pontosan akkor nulla, ha $y = 0$.
  - Így a $(-\sqrt{3}, 0)$ és $(\sqrt{3}, 0)$ helyek kivételével

    bármelyik körvonalbeli pont egy környezetében y kifejezhető x-ből,
    - azaz a körvonal egy (x-tól függő) függvény grafikonja.
  - Ez persze szemléletesen is látszik.

Az f implicitfüggvény-tétel és deriválása: példák (folyt.)

- Az $y'(x)$ derivált kiszámításához (most) meghatározhatnánk konkrétan az $y(x)$ függvényt.
- De eljárhatunk enélkül is:
  - $\partial_x(x^2 + y(x)^2 + 3) = 2x + 2y(x) \cdot y'(x) = 0$, azaz
  - $y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$, azaz minden (x, y) pontban $-\frac{x}{y}$.

Az f implicitfüggvény-tétel és deriválása: példák (folyt.)

- Példa - kissé komplexebb: $x^5 + y^5 = 2xy$.
  - Mikor fejezhető ki ebből az y?
  - Az ebből kapott $y(x)$ deriváltja $(1,1)$-ben hogyan adható meg?
- Itt a konkrét "kifejezés" nehéz volna.
- Tudjuk, hogy $\partial_y x^5 + y^5 - 2xy = 5y^4 - 2x$.
- Ez pontosan akkor nulla, ha $y^4 = 0.4x$.
  - Ha ez a grafikonon van, akkor behelyettesítve, számolva:

    a $(0,0)$ és $(\frac{5}{2} \cdot \sqrt[4/15]{\frac{8}{5}}, \sqrt[15]{\frac{8}{5}})$ helyek kivételével

    bármely pont egy környezetében y kifejezhető x-ből.
- $\partial_x(x^5+y^5(x)-2xy(x)) = 5x^4+5y^4(x)\cdot y'(x)-2y(x)-2x\cdot y'(x) = 0$,

  ahol $x = y(x) = 1$ esetén$5 + 5 \cdot y'(1) - 2 - 2 \cdot y'(1) = 0$, azaz

  $y'(1) = -1$.

További érdekes példa

- $\{(x, y) : (x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)\}$
- Ábrázoljuk géppel (pl. Desmos), hogy lássuk!
- Nem számolunk vele, de megjegyezzük:
  - Ha az implicit függvény tételei nem (x, y)-ban nem teljesülnek, az nem vonja maga után, hogy "függőleges érintő" van ott.
- Hasonló, egyszerűbb példa:
  - $\{(x, y) : x^2 - y^2 = 0\}$

Inverz függvények és deriválásuk

- Fontos kérdések egy $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ függvény esetén:
  - Milyen feltétellel van f-nek inverze?
  - Az inverz deriváltja milyen feltétellel létezik?
  - Ezt egy adott pontban hogyan számíthatjuk ki?

Előzetes megjegyzések:

- Az inverz létezését is csak egy-egy adott pont környezetében vizsgáljuk.
- f és f^{-1} folytonosságára akkor van esély, ha $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ (a "kitevők" azonosak - topológia).

Az inverz függvény tétel

Tétel

(Inverz függvény tétel) Legyen $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ *olyan, hogy értelmezve van és folytonosan differenciálható a* $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^d$ *egy környezetében, továbbá* $det\, g'(\boldsymbol{b}) \neq 0$. *Ekkor az* $\boldsymbol{a} := g(\boldsymbol{b})$ *jelöléssel kapjuk, hogy léteznek* $B_r(\boldsymbol{a})$ *és* $B_r(\boldsymbol{b})$ *környezetek, és*

$$g^{-1} : B_r(\boldsymbol{a}) \to B_r(\boldsymbol{b})$$

folytonosan differenciálható függvény, hogy

$$\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in B_r(\boldsymbol{a}) \times B_r(\boldsymbol{b}) : \boldsymbol{x} = g(\boldsymbol{y})\} = \left\{\left(\boldsymbol{x}, g^{-1}(\boldsymbol{x})\right) : \boldsymbol{x} \in B_r(\boldsymbol{a})\right\}$$

teljesül.

Legyen

$$\Phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \ \Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \boldsymbol{x} - g(\boldsymbol{y})$$

hozzárendeléssel adott (ford. jelölés). Ekkor

$$\Phi(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} - g(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{0}, \ \partial_{\boldsymbol{y}} \Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = -g'(\boldsymbol{y}),$$

továbbá $\det(g'(\boldsymbol{b})) \neq 0$, tehát az implcit függvény tétel feltételei teljesülnek a Φ függvényre.
Ezért valóban létezik olyan

$$g^{-1} : B_r(\boldsymbol{a}) \to B_r(\boldsymbol{b})$$

függvény, amelyre a következő teljesül:

$$\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in B_r(\boldsymbol{a}) \times B_r(\boldsymbol{b}) : \boldsymbol{x} = g(\boldsymbol{y})\} =$$

$$\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in B_r(\boldsymbol{a}) \times B_r(\boldsymbol{b}) : \Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0\} = \left\{\left(\boldsymbol{x}, g^{-1}(\boldsymbol{x})\right) : \boldsymbol{x} \in B_r(\boldsymbol{a})\right\}.$$

Az inverz függvény tétel - bizonyítás (folyt.)

Az így (implicit módon) adott g^{-1} függvény definíció miatt valóban g lokális inverze.

Az implicit függvény deriválási szabálya szerint

$$\left[g^{-1}\right]'(\boldsymbol{x}) = -[\partial_{\boldsymbol{y}}\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]^{-1}\partial_{\boldsymbol{x}}\Phi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -[-g'(\boldsymbol{y})]^{-1} I =$$

$\left[g'\left(g^{-1}(\boldsymbol{x})\right)\right]^{-1}$, ahol a jobb oldalon a $g'\left(g^{-1}(\boldsymbol{x})\right)$ mátrix inverzét vettük, vagyis a fent definiált g^{-1} függvény deriváltja létezik, és $B_r(\boldsymbol{a})$-ban folytonosan deriválható. $\square$

Az inverz függvény tétel - példa

Számítsuk ki az

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y \\ xy \end{pmatrix}$$

függvény $(1,1)$ körüli megszorításának $g(1,1) = (2,1)$ helyen vett lokális inverzének deriváltját!

$$g'(1,1) = \begin{pmatrix} 2x & 1 \\ y & x \end{pmatrix} (1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

azaz

$$[g^{-1}]'(2,1) = [g'(1,1)]^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Feladat: Számítsuk ki az $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény szélsőértékét azzal a feltétellel, hogy a változókra a $f(x, y) = 0$ egyenlőség teljesül!

Volt már ilyen feladatunk:

Adott K kerületű téglalapok esetén melyik területe a legnagyobb?

Azaz: számítsuk ki $h(x, y) = xy$ szélsőértékét azzal a feltétellel, hogy $f(x, y) = 2x + 2y - K = 0$.

Megoldás módszere:

1. Bűvészkedünk számtani-mértani középpel.
2. Kifejezzük x-et a feltételből ($x = \frac{K}{2} - y$), aztán a kapott $f(x, y) = xy = (\frac{K}{2} - y)y$ mennyiség maximumát keressük.

   Mi kell ehhez? Hát, hogy a feltétel segítségével az egyik változót a másikból ki tudjuk fejezni.

- A fenti példa szemléltetése:
- Sejtés: a szélsőértéket jelentő helyen a feltételt adó görbe (piros) és a keresett függvény-szélsőértékhez tartozó görbe érintői *párhuzamosak*.

Tétel

Legyenek $h, f_1, f_2, \dots f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *folytonosan deriválhatók és* $n < d$. *Tegyük fel, hogy* h*-nak az* $f_1(\boldsymbol{x}) = f_2(\boldsymbol{x}) = \dots = f_n(\boldsymbol{x}) = 0$ *feltétel mellett szélsőértéke van az* $\boldsymbol{a}$ *pontban. Tegyük fel továbbá, hogy a következő mátrix rangja* n*:*

$$\begin{pmatrix} \partial_1 f_1(\boldsymbol{a}) & \partial_2 f_1(\boldsymbol{a}) & \dots & \partial_d f_1(\boldsymbol{a}) \\ \partial_1 f_2(\boldsymbol{a}) & \partial_2 f_2(\boldsymbol{a}) & \dots & \partial_d f_2(\boldsymbol{a}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_n(\boldsymbol{a}) & \partial_2 f_n(\boldsymbol{a}) & \dots & \partial_d f_n(\boldsymbol{a}) \end{pmatrix}.$$

Ekkor léteznek olyan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *számok, hogy*
$\nabla h(\boldsymbol{a}) + \lambda_1 \nabla f_1(\boldsymbol{a}) + \lambda_2 \nabla f_2(\boldsymbol{a}) + \dots \lambda_n \nabla f_n(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}.$

A tétel bizonyítása

Ha $\boldsymbol{a}$-ban maximum van, akkor *rendezzük úgy* a változókat, hogy a fenti mátrix utolsó n oszlopa lineárisan független legyen!

A változókat első $d-n$ darabra és második n darabra bontjuk: $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ és $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$; az elsők szerinti deriválást ∂_1 a második szerintit ∂_2 jelöli.

A mátrix rang-feltétele $\Rightarrow$ $\det \partial_2 \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}) \neq 0$.

Implicit függvény tétel $\Rightarrow$ $\boldsymbol{a}$ egy környezetében $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ feltételből $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1)$ a $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^{d-n} \to \mathbb{R}^n$ implicit függvénnyel, amelynek deriváltjára

$$\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{a}_1) = -[\partial_2 f(\boldsymbol{a})]^{-1} \partial_1 f(\boldsymbol{a}).$$

A tétel bizonyítása - folyt.

Az implicit függvénnyel ezt kell minimalizálni: $\boldsymbol{x}_1 \to h(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1)))$;
a feltételt $\boldsymbol{g}$ tartalmazza.

h-nak $\boldsymbol{a}$-ban szélsőértéke van $\Rightarrow$ a fenti deriváltja $\boldsymbol{a}_1$-ben nulla:

$$\mathbf{0} = (\boldsymbol{x}_1 \to h(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1))'(\boldsymbol{a}_1) = \partial_1 h(\boldsymbol{a}) + \partial_2 h(\boldsymbol{a})\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{a}_1) =$$
$$= \partial_1 h(\boldsymbol{a}) - \partial_2 h(\boldsymbol{a})[\partial_2 f(\boldsymbol{a})]^{-1}\partial_1 f(\boldsymbol{a}), \quad \text{azaz}$$

$$\partial_1 h(\boldsymbol{a}) = \partial_2 h(\boldsymbol{a})[\partial_2 f(\boldsymbol{a})]^{-1}\partial_1 f(\boldsymbol{a}) \ \text{ és}$$
$$\partial_2 h(\boldsymbol{a}) = \partial_2 h(\boldsymbol{a})[\partial_2 f(\boldsymbol{a})]^{-1}\partial_2 f(\boldsymbol{a}),$$

vagyis $[\partial_1 h(\boldsymbol{a})\partial_2 h(\boldsymbol{a})] = \partial_2 h(\boldsymbol{a})[\partial_2 f(\boldsymbol{a})]^{-1}[\partial_1 f(\boldsymbol{a})\partial_2 f(\boldsymbol{a})]$.

Ez a tétel állítása, ahol $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \partial_2 h(\boldsymbol{a})[\partial_2 f(\boldsymbol{a})]^{-1}$. $\square$

1. A vizsgált h függvény és a feltételeket jelentő $f_1, f_2, \dots f_n$ függvények gradiensét kiszámoljuk.
2. Ezeket az $\boldsymbol{a}$ ismeretlen helyen tekintve felírjuk az $\nabla h(\boldsymbol{a}) + \lambda_1 \nabla f_1(\boldsymbol{a}) + \lambda_2 \nabla f_2(\boldsymbol{a}) + \dots \lambda_n \nabla f_n(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$ egyenletet *komponensenként* (d db), valamint a feltételt jelentő $f_1(\boldsymbol{a}) = f_2(\boldsymbol{a}) = \dots f_n(\boldsymbol{a}) = 0$ egyenleteket (n db) .
3. Itt $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^d$ és $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ az ismeretlenek, ($d + n$ db) és $d + n$ egyenletünk van.
4. Megvizsgáljuk, hogy a kapott megoldás(ok) milyen szélsőértéket adnak.

Feltételes szélsőérték - kérdések

- Hogy látjuk a választ az utolsó kérdésre?
  - Általános esetben nem vizsgáljuk.
- Egyáltalán milyen feltétellel létezik feltételes és feltétel nélküli minimum/maximum?
  - Weierstraß -maximumelvet kell általánosítani (majd megtesszük).
- De a gyakorlatban a feltételek inkább egyenlőtlenséggel adhatók meg!
  - Igen; ezzel az operációkutatás tárgy foglalkozik.

Feltételes szélsőérték - példa

Ismét: Egy közgazdasági modell szerint

$$Q = (p-10)^{\frac{6}{5}} \cdot c^{\frac{9}{5}}, \qquad \text{ahol}$$

Q-termékmennyiség, p-munkaerő mennyisége, c-befektetett tőke.

Most a termékmennyiséget akarjuk maximalizálni úgy, hogy $5p + c = S > 50$ rögzített.

Egyszerűsítünk: $Q^{\frac{5}{3}} = (p-10)^2 \cdot c^3$; ezt maximalizáljuk.

- $f(p,c) = 5p + c - S = 0$.
- $h(p,c) = (p-10)^2 \cdot c^3$.
- $d = 2, n = 1$.

Feltételes szélsőérték - példa

Most olyan λ_1 kellene, hogy $5p + c - S = 0$ mellett

$[\partial_1 h(p, c) \quad \partial_2 h(p, c)] = \lambda_1 \cdot [\partial_1 f(p, c) \quad \partial_2 f(p, c)]$

teljesül, azaz, hogy

$$\begin{cases} 2(p-10) \cdot c^3 = 5\lambda_1 \\ 3(p-10)^2 \cdot c^2 = \lambda_1 \\ 5p + c = S. \end{cases}$$

Az első kettőt egymással osztva: $\frac{c}{3 \cdot (p-10)} = 5 \Leftrightarrow 2c = 15(p-10)$.

Ezt a harmadikba helyettesítve: $10p + 15p - 150 = 2S$, azaz

$$p = \frac{2S}{25} + 6, \qquad c = \frac{3S}{5} - 30.$$

Feltételes szélsőérték - példa - befejezés

Akkor ez most milyen szélsőérték?

Tudjuk, hogy az $5p + c = S > 50$ feltétellel

$$Q = (p - 10)^{\frac{6}{5}} \cdot c^{\frac{9}{5}} = 0, \qquad \text{ha}$$

$p = 10,\ c = S - 50$ és ha $p = \frac{S}{5},\ c = 0.$

Vagyis a feltételt jelentő egyenesen Q két pontban nulla.

De a köztük levő szakaszon csak egyetlen pontban van szélsőértéke (ezt kaptuk a hosszú számolásal és a tétellel),

és mivel itt Q pozitív, ez egy maximum lesz.