Az Analízis II. előadások

Kezdés: 2024. február 12.,
utolsó javítás: 2024. .

A félév menete

- Kis bevezető: primitív függvények és kiszámításuk.
  - Kapcsolat az előző félévvel, anyag a gyakorlatokra.

  A Riemann-integrál.
  - Definíciók (többféle), tulajdonságok, példák, ellenpéldák.
  - Kiszámítás, kapcsolat a primitív függvényekkel.
- (Numerikus) Sorok; egy kicsit bővebben.
- Függvénysorok, konvergencia általában.
- Hatványsorok, kapcsolat az előző félévi anyaggal.
- Többváltozós függvények analízise.
  - Folytonosság, (parciális) derivált.
    - Alkalmazások: szélsőértékszámítás, Taylor-sorok.
    - Alkalmazások: implicit és inverz függvény tétel.

Primitív függvények: definíció, megjegyzések

Definíció

Legyen $f : I = (a, b) \to \mathbb{R}$ *adott. Ha* $F : I \to \mathbb{R}$ *olyan, hogy* $F' = f$, *akkor* F*-et az* f *primitív függvényének nevezzük.*

Jelölés(ek): $F = \int f$, $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$.

- Megjegyzések:
  - Más elnevezések: antiderivált, határozatlan integrál
    - nincs "határ" a fenti jelölésben.
  - Itt lehet akár $a = -\infty$ és/vagy $b = \infty$ is.
  - A "primitív függvény" nem egyértelmű:
    - Ha F az f primitív függvénye, akkor tetszőleges C konstansfüggvényre $F + C$ is az.

Primitív függvények: számítási szabályok

Állítás

Ha $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g = I$, $c \in \mathbb{R}$ *tetszőleges és* $\int f, \int g$ *léteznek, akkor*

- $\int c \cdot f = c \cdot \int f$
- $\int f + g = \int f + \int g.$

Amennyiben $f' : I \to \mathbb{R}$ *és* $\int f \cdot g'$ *léteznek, akkor*

- $\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'$ *- parciális integrálás elve*

Amennyiben $\int f = F, f \circ g$ *és* g' *léteznek, akkor*

- $\int f \circ g \cdot g' = F \circ g$ *- helyettesítés elve.*

  "Népszerű" alakban; $g(x)$ *helyett a* t *változót használva:*

  - $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t = F(g(x)).$

Mindenhol azt állítjuk: a bal oldalnak is van primitív függvénye, mégpedig az, amit a jobb oldalon megadtunk.

- Csak a másodikat és az utolsót látjuk be.
  - A többi bizonyítása hasonlóan történik.
- Második pont: Tudjuk, hogy

  $(\int f + \int g)' = (\int f)' + (\int g)' = f + g,$

  ami éppen azt jelenti, hogy a jobb oldal primitív függvénye a bal oldal.
- Negyedik pont: Tudjuk, hogy

  $(F \circ g)' = F' \circ g \cdot g' = f \circ g \cdot g',$

  ami éppen azt jelenti, hogy a jobb oldal primitív függvénye a bal oldal. $\square$

Számítási szabályok - két újabb észrevétel

Állítás

Minden esetben legyen $f : I = (a, b) \to \mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy az integráljel után álló mennyiségek értelmesek.

- *Ha* $\int f = F$ *és* $a, b \in \mathbb{R} = I$, *akkor*

  $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b)$ *- lineáris helyettesítés*

- *Ha* $n \neq -1$, *akkor* $\int f' \cdot f^n = \frac{1}{n+1} f^{n+1}$.
- $\int \frac{f'}{f} = \ln|f|$.

(vázlatos) *Bizonyítás:*

- $\left(x \mapsto \frac{1}{a}F(ax+b)\right)'(x) = \frac{1}{a} \cdot F'(ax+b) \cdot a = f(ax+b)$
- $\left(\frac{1}{n+1} f^{n+1}\right)'(x) = \frac{1}{n+1} \cdot (n+1) \cdot f^n(x) \cdot f'(x) = f^n(x) \cdot f'(x)$

Számítási szabályok - két újabb észrevétel (folyt.)

- Harmadik eset:

  Legyenek $J_+ := \{x : f(x) > 0\}$, és $J_- := \{x : f(x) < 0\}$.

- Ekkor
  - $x \in J_+ \Rightarrow |f|(x) = f(x) > 0 \Rightarrow (|\cdot|)'(f(x)) = 1$
  - $x \in J_- \Rightarrow -|f|(x) = f(x) < 0 \Rightarrow (|\cdot|)'(f(x)) = -1$
- Ezeket felhasználva

$$(\ln|f|)'(x) = \frac{1}{|f|(x)} \cdot (|\cdot|)'(f(x)) \cdot f'(x) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{f(x)} \cdot 1 \cdot f'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) & x \in J_+, \\ \frac{1}{-f(x)} \cdot -1 \cdot f'(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) & x \in J_-. \end{cases}$$

Primitív függvények: számítások - megjegyzések

- Ez pont olyan, mint a deriváltak kiszámítása:
  - Ismerni kell több f elemi függvényre az $F = \int f$ primitív függvényt.
  - Ezeket felhasználva "összetettebb" függvények primitív függvényét is kiszámíthatjuk.
- A kiinduláshoz: "megfordítjuk" az elemi függvények deriváltjának táblázatát:
  - A g' primitív függvénye lesz az eredeti g elemi függvény.
    - A következő fólián.
- Sok példa: gyakorlaton.
- Már a gép is "megtanulta":
  - Symbolab, Maple, Matlab, Sympy, ...

Táblázat: deriváltak, primitív függvények

- Egy táblázat deriváltfüggvényekkel:

$f(x)$	$\frac{x^n}{n}$	$\ln x$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	e^x	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arsh} x$
$f'(x)$	x^{n-1}	$\frac{1}{x}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	e^x	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

- Egy pedig primitív függvényekkel
  - Lényegében csak megfordítottuk az előzőt.

$f(x)$	$x^n, n \neq -1$	$\frac{1}{x}$	$\cos(x)$	$\sin(x)$	e^x	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$F(x)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\ln \lvert x \rvert$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$	e^x	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arsh} x$

Primitív függvények: számítások - megjegyzések

- Ez nem olyan "egyszerű", mint a derivált kiszámítása:
  - Például $\int e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x$

    nem adhatók meg véges sok elemi függvény és művelet egymásutánjával.
- Akkor nem is léteznek??
  - Dehogynem: léteznek (be is látjuk majd).
- Minderre szükségünk lesz a Riemann-integrálok kiszámításához.

Primitív függvények: számítások - példák

- Egyszerű átalakítás, összegre bontás.

$$\int \frac{x+1}{x^2} = \int \frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \int \frac{x}{x^2} + \int \frac{1}{x^2} = \int x^{-1} + \int x^{-2} =$$

$$= \ln|x| + \frac{x^{-1}}{-1} = \ln|x| - \frac{1}{x}$$

- Parciális integrálás elve.

$$\int x \cdot e^x = \int (e^x)' \cdot x = e^x \cdot x - \int e^x \cdot x' =$$

$$= e^x \cdot x - \int e^x = e^x \cdot x - e^x.$$

Primitív függvények: számítások - példák

- Helyettesítés elve.

$$\int x^3 \cdot e^{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[g(x) = x^2 = t,\ g'(x)\,\mathrm{d}x = 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\right] =$$

$$= \int \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot e^{x^2} \cdot 2x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} \cdot t \cdot e^t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \cdot (t \cdot e^t - e^t) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (x^2 \cdot e^{x^2} - e^{x^2})$$

- Lineáris helyettesítés.

$$\int \cos(1 - \frac{x}{2}) = \frac{1}{-\frac{1}{2}} \cdot \sin(1 - \frac{x}{2}) = -2 \cdot \sin(1 - \frac{x}{2})$$

- $\int \sin(x) \cdot \cos^2(x) = -\int \cos'(x) \cdot \cos^2(x) = -\dfrac{\cos^3(x)}{3}$

Primitív függvények kiszámítása: összefoglalás

- Számolással általában meghatározható f-hez egy olyan F, amelyre $F' = f$.
- Több elemi f függvényre ezt eleve ismerjük.
- A többire számítási szabályok segítségével próbáljuk meghatározni.
  - Az egyszerűbbeket rutinszerűen tudni kell kiszámolni.
  - Az összetettebb esetek: “számoljon a számítógép”.

Integrálszámítás: előzmények, magyarázat

- Motiváció: fizikai mennyiségek (térfogat, munka, energia) kiszámítása.
- Rövid matematikai válasz: függvénygrafikon alatti területeket kell kiszámítani.
  - Kezdetek: $\approx$ 1700, Newton & Leibniz
- Később tisztázták; ezt tanuljuk: Riemann-integrál.
  - Matematikai szempontból természetesnek tűnő fogalom
- Minek erre elmélet?
- Miért nem mondjuk: a függvénygrafikon alatti terület?
  - Egyrészt formulát is szeretnénk ennek kiszámítsására.
  - Másrészt nem tudjuk mi az, hogy "terület".
    - Majd megtudjuk: mértékelmélet.

Integrálszámítás: kapcsolat a továbbiakkal

- Tanulunk általánosabb integrálfogalmakat.
  - Improprius (Riemann) integrál – ebben a félévben.
  - Lebesgue - integrál – negyedik félév, mértékelmélet.
  - Főérték értelmű integrálok – ez nem is szerepel, pedig az alkalmazásokban is használják.
- Miért kell általánosítani?
  - ("Sok" függvény ezen értelemben nem integrálható.)
  - Nem teljesülnek rá fontos konvergenciatételek.
- De ha ki kell számítani valamit: ezen félév anyagára támaszkodunk.

Integrálszámítás: alapfogalmak, feltevések

- Feltevés(ek) a Riemann-integrálok elméletében: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos valós függvény ($\mathcal{D}_f = [a, b]$).
  - Riemann-integrálható függvények: ezen függvényosztály egy részhalmaza.
  - Improprius (Riemann) integrál: $\mathcal{D}_f$ és/vagy $\mathcal{R}_f$ lehet nem korlátos.
- Az $[a, b]$ intervallum osztópontjai:
  - tetszőleges $n - 1$ db belső osztópont kijelölése:
  - $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$
- Az $[a, b]$ intervallum felosztása:
  - Az osztópontok által meghatározott $\{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ intervallum-halmaz,
  - ahol $I_j = [x_{j-1}, x_j], \quad j = 1, 2, \ldots, n.$

Integrálszámítás: alapfogalmak II.

- Fontos jelölés: $|I_j| = x_j - x_{j-1}$; intervallum-hossz.
- Az $[a, b]$ intervallum egy felosztásának finomítása:
  - Az osztópontok által meghatározott halmaz bővítése:
  - az intervallum-halmaz egyes elemeit tovább osztjuk.
- Az $[a, b]$ intervallum két felosztásának egyesítése:
  - Az egyes felosztások osztópontjai által meghatározott halmazok únióját vesszük.
  - Az ehhez tartozó intervallumok általában nem az eredeti intervallumok úniójából állnak.

Integrálszámítás: alapfogalmak III.

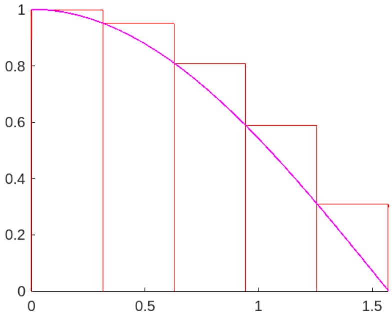
- Az f függvény fenti Φ felosztásához tartozó
  - alsó (Riemann-féle közelítő) összeg:
    $$s_f(\Phi) = s_f = \sum_{j=1}^{n} \inf_{I_j} f \cdot |I_j|,$$
  - felső (Riemann-féle közelítő) összeg:
    $$S_f(\Phi) = S_f = \sum_{j=1}^{n} \sup_{I_j} f \cdot |I_j|.$$
- Egyszerű alaptulajdonságok:
  - A feltevések miatt mindkettő létezik és véges (meggondolni!).
  - Minden esetben $s_f(\Phi) \leq S_f(\Phi)$.
  - Egyenlőség feltétele?
    - Csakis konstans függvény esetén - számoljuk azért végig.

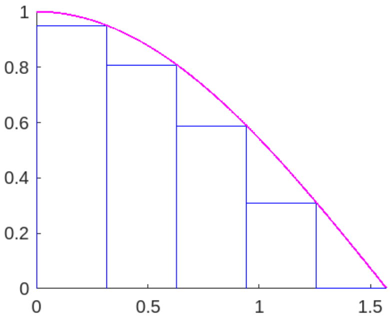
Egy triviális példa

- Legyen $f \equiv C$ egy konstans függvény.
- Most minden I_j részintervallumon $\inf_{I_j} f = \sup_{I_j} f = C$
- Így bármely Φ felosztáson
$$s_f(\Phi) = \sum_{j=1}^{n} \inf_{I_j} f \cdot |I_j| = C \cdot \sum_{j=1}^{n} |I_j| = C \cdot (b-a)$$
- Hasonlóan
$$S_f(\Phi) = \sum_{j=1}^{n} \sup_{I_j} f \cdot |I_j| = C \cdot \sum_{j=1}^{n} |I_j| = C \cdot (b-a).$$
- Így persze $\sup_{\Phi} s_f(\Phi) = \inf_{\Phi} S_f(\Phi) = C \cdot (b-a)$,

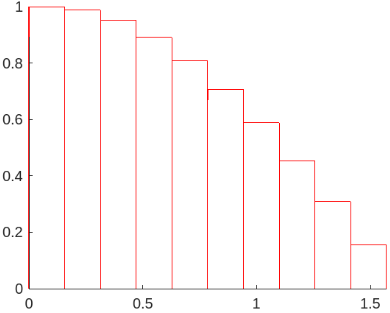
  ami tehát a konstans C függvény Riemann-integrálja $[a, b]$-n.
- Igen, ezt vártuk; a grafikon "alatti" terület egy tégla előjeles területe, amit így kell kiszámítani.

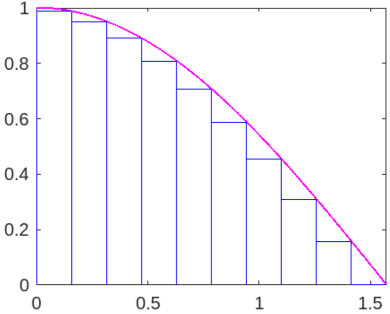
Alsó és felső közelítő összegek, finomításuk



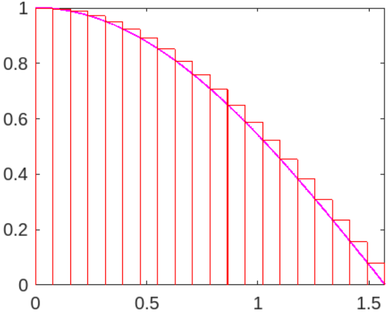


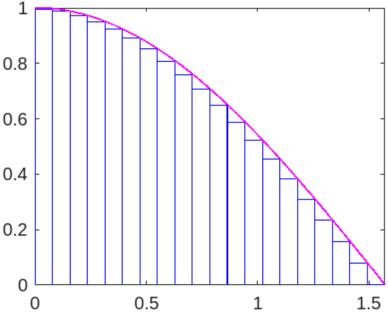
Alsó és felső közelítő összegek, finomításuk





Alsó és felső közelítő összegek, finomításuk





Közelítő összegek kapcsolata: azonos típusúak

Állítás

Ha Φ_+ finomítása Φ-nek, akkor

- $s_f(\Phi) \leq s_f(\Phi_+)$ *és* $S_f(\Phi) \geq S_f(\Phi_+)$.

Bizonyítás: Elegendő arra az esetre, amikor egyetlen osztópontot veszünk hozzá.

Legyen ez I_j-ben, amivel $I_j = I_{j_1} \cup I_{j_2} \Rightarrow |I_j| = |I_{j_1}| + |I_{j_2}|$

Ekkor $\inf\limits_{I_j} f \leq \inf\limits_{I_{j_1}} f$, $\inf\limits_{I_j} f \leq \inf\limits_{I_{j_2}} f$ miatt

$$\inf_{I_j} f \cdot |I_j| = \inf_{I_j} f \cdot (|I_{j_1}| + |I_{j_2}|) \leq \inf_{I_{j_1}} f \cdot |I_{j_1}| + \inf_{I_{j_2}} f \cdot |I_{j_2}|,$$

az alsó közelítő összegben pedig az összes többi $\inf\limits_{I_k} f \cdot |I_k|$ szorzat ugyanaz. Így valóban $s_f(\Phi) \leq s_f(\Phi_+)$.

Közelítő összegek kapcsolata - bizonyítás folytatása

Hasonlóan $\sup\limits_{I_j} f \geq \sup\limits_{I_{j_1}} f$, $\sup\limits_{I_j} f \geq \sup\limits_{I_{j_2}} f$ miatt

$$\sup_{I_j} f \cdot |I_j| = \sup_{I_j} f \cdot (|I_{j_1}| + |I_{j_2}|) \geq \sup_{I_{j_1}} f \cdot |I_{j_1}| + \sup_{I_{j_2}} f \cdot |I_{j_2}|,$$

a felső közelítő összegben pedig az összes többi $\sup\limits_{I_k} f \cdot |I_k|$ szorzat ugyanaz. Így valóban $S_f(\Phi) \leq S_f(\Phi_+)$. $\square$

- Ezután alsó és felső közelítő összegeket hasonlítunk össze.

Állítás

Tetszőleges Φ_1 és Φ_2 felosztásokra $s_f(\Phi_1) \le S_f(\Phi_2)$.

Bizonyítás: Tekintsük Φ_1 és Φ_2 közös Φ_{12} finomítását,

- amelynek osztópontjai Φ_1 és Φ_2 osztópontjainak úniója.

Ekkor az előző állítás szerint

- $s_f(\Phi_1) \le s_f(\Phi_{12}) \le S_f(\Phi_{12}) \le S_f(\Phi_2)$,

amit igazolni akartunk. $\square$

- Ezt használjuk: minden alsó közelítő összegnek felső korlátja minden felső közelítő összeg.
- Emiatt persze $\sup_{\Phi} s_f(\Phi) \le S_f(\Phi)$.
- Sőt, ekkor $\sup_{\Phi} s_f(\Phi) \le \inf_{\Phi} S_f(\Phi)$.

Két mennyiség és a fő definíció

Motiváció:

- Φ finomításával $s_f(\Phi)$ monoton nő, $S_f(\Phi)$ monoton csökken.
- A “grafikon alatti terület” a kettő között van.
- Ha ezeknek a finomítással “közös limeszük” van, akkor a rendőr-elv értelmében az *legyen* a grafikon alatti terület.

Definíció

Azt mondjuk, hogy az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény Riemann-integrálható, ha

$$\sup_{\Phi} s_f(\Phi) = \inf_{\Phi} S_f(\Phi),$$

és ezen közös értéket az f függvény $[a, b]$-n vett Riemann-integráljának nevezzük.

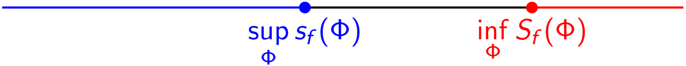
Jelölés(ek): $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

A definíció: utólagos megjegyzések

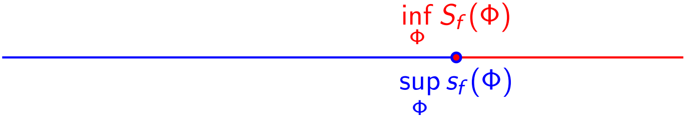
- $\sup_{\Phi} s_f(\Phi)$ létezik és véges a becslés miatt.
- f nem Riemann-integrálható $\Leftrightarrow \sup_{\Phi} s_f(\Phi) < \inf_{\Phi} S_f(\Phi)$.
- Ez szép definíció, de hogy ellenőrizzük?
  - Kiszámoljuk majd ezt a két mennyiséget?
  - Jaj, ezt ne!
  - Azért egyszer elvégezzük.

A definíció: ábra és egy fontos észrevétel

- Nem Riemann-integrálható függvény esete:



- Riemann-integrálható függvény esete:



- Észrevétel: Ha egyetlen olyan Φ_n felosztás-sorozatot találunk, amelyre $\lim_{n\to\infty} s_f(\Phi_n) = \lim_{n\to\infty} S_f(\Phi_n) = I$, akkor biztosan
  $\inf_{\Phi} S_f(\Phi) \leq \lim_{n\to\infty} S_f(\Phi_n) = \lim_{n\to\infty} s_f(\Phi_n) \leq \sup_{\Phi} s_f(\Phi)$.
  - Ennek eleje és vége közt csakis egyenlőség lehet.
  - Ekkor mindenhol egyenlőség szerepel, és minden I-vel egyenlő.
  - Azaz f Riemann integrálható, és integrálja I.

Egy végigszámolt példa

- Legyen $f : [0,2] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$.
  - Legyenek Φ_n osztópontjai: $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 2 - \frac{1}{n}, 2$.
  - Most minden j indexre: $|I_j| = \frac{j}{n} - \frac{j-1}{n} = \frac{1}{n}$.
  - Továbbá f monoton növekedése miatt:

    $$\sup_{I_j} f = f\left(\frac{j}{n}\right), \quad \inf_{I_j} f = f\left(\frac{j-1}{n}\right).$$

A példa folytatása

- Alsó közelítő összeg:

$$s_f(\Phi_n) = \sum_{j=1}^{2n} \inf_{I_j} f \cdot |I_j| = \sum_{j=1}^{2n} f\left(\frac{j-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{2n} f\left(\frac{j-1}{n}\right).$$

- Felső közelítő összeg:

$$S_f(\Phi_n) = \sum_{j=1}^{2n} \sup_{I_j} f \cdot |I_j| = \sum_{j=1}^{2n} f\left(\frac{j}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{2n} f\left(\frac{j}{n}\right)$$

- Különbségük: $S_f(\Phi_n) - s_f(\Phi_n) = \frac{1}{n} \cdot (f(2) - f(0))$
- Azaz $\lim\limits_{n\to\infty} S_f(\Phi_n) - s_f(\Phi_n) = 0$,
  - tehát $\lim\limits_{n\to\infty} S_f(\Phi_n) = \lim\limits_{n\to\infty} s_f(\Phi_n)$, ami a fentiek serint elegendő f Riemann-integrálhatóságához.

A definíció: egy példa (befejezés)

- Megjegyzés: csak a korlátosságot és a monoton növő tulajdonságot használtuk ki.

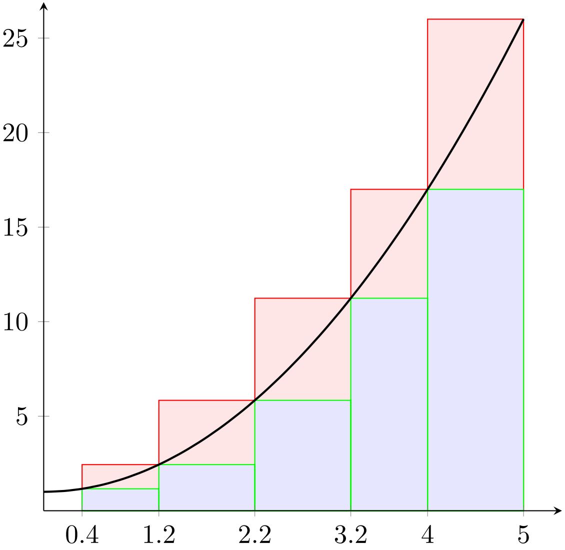
- Ez szép, de mennyi lesz az integrál értéke?

- $\lim\limits_{n\to\infty} S_f(\Phi_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \cdots + \frac{(2n)^2}{n^2} \right) =$

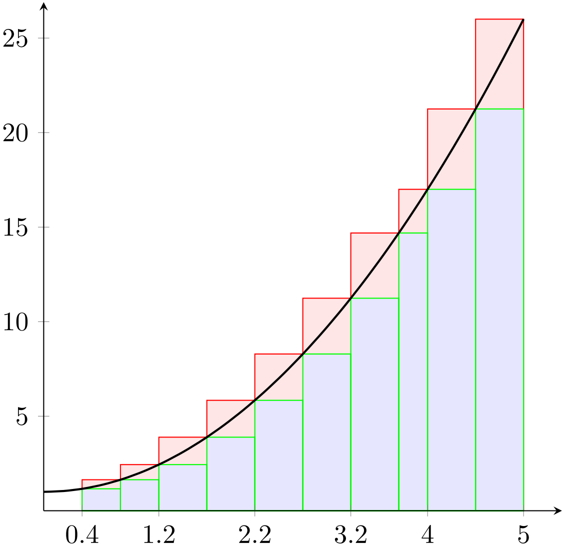
  $= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \cdot (1^2 + 2^2 + \cdots + (2n)^2) =$

  $= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n \cdot (2n+1) \cdot (2 \cdot 2n + 1)}{6 \cdot n^3} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}.$

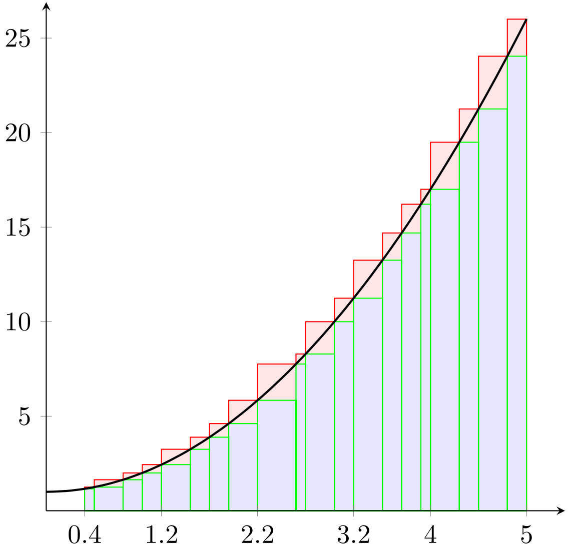
Alternatív definíció: motiváció - ábra



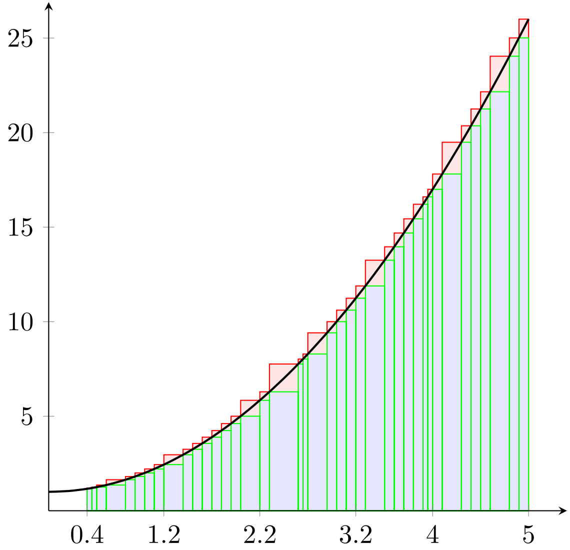
Alternatív definíció: motiváció - ábra



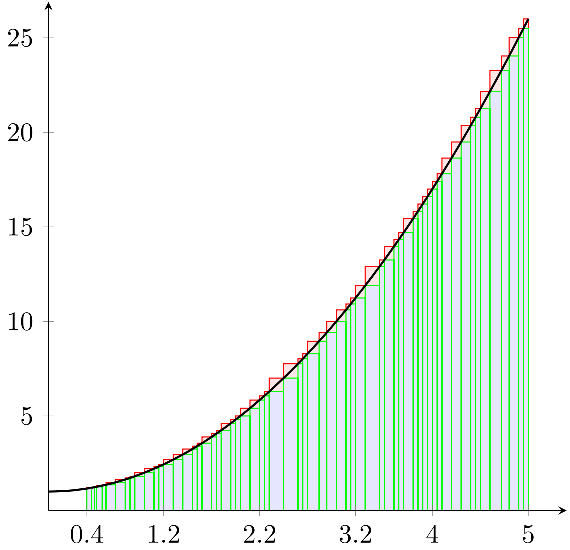
Alternatív definíció: motiváció - ábra



Alternatív definíció: motiváció - ábra



Alternatív definíció: motiváció - ábra



Alternatív definíció

- Motiváció: az előző levezetés.
- Ha a kétféle közelítő összeg különbsége nullához tart valamilyen felosztás-sorozatra, akkor f Riemann-integrálható.
- Akkor definiáljuk a különbségüket:

Definíció

Riemann-féle oszcillációs összeg:

$$S_f(\Phi) - s_f(\Phi) = \sum_{j=1}^{n} (\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f) \cdot |I_j|.$$

Tétel

f pontosan akkor Riemann-integrálható, ha valamilyen Φ_n felosztás-sorozatra $\lim_{n\to\infty} S_f(\Phi_n) - s_f(\Phi_n) = 0.$

Alternatív definíció??

- Hol van itt a definíció?
  - Tétel $\Rightarrow$ így is definiálhatjuk a Riemann-integrálhatóságot.
- És a bizonyítás?
  - Az egyik irány szerepelt:

    Ha valamilyen Φ_n felosztás-sorozatra $\lim\limits_{n\to\infty} S_f(\Phi_n) - s_f(\Phi_n) = 0$, akkor f Riemann-integrálható.
  - A másik irány:

    Ha f Riemann-integrálható, akkor tetsz. ε-hoz kellene Φ felosztás, amelyre $S_f(\Phi) - s_f(\Phi) < \varepsilon$.

"Másik irány"; bizonyítás

- Legyen Φ_- olyan, hogy $\int_{[a,b]} f - s_f(\Phi_-) < \frac{\varepsilon}{2}$,
- és hasonlóan Φ_+ olyan, hogy $S_f(\Phi_+) - \int_{[a,b]} f < \frac{\varepsilon}{2}$.
  - Az eredeti definíció miatt vannak ilyen felosztások.
- Legyen Φ a fenti felosztások egyesítése; ekkor
- $|S_f(\Phi) - s_f(\Phi)| \leq \left| S_f(\Phi) - \int_{[a,b]} f \right| + \left| \int_{[a,b]} f - s_f(\Phi) \right| \leq$

$$\left| S_f(\Phi_+) - \int_{[a,b]} f \right| + \left| \int_{[a,b]} f - s_f(\Phi_-) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

Egyszerű definíció: egy újabb átfogalmazás

Tétel (Riemann-integrálhatóság és oszcillációs összegek)

Egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény pontosan akkor Riemann-integrálható, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan Φ felosztás, amelyre $S_f(\Phi) - s_f(\Phi) < \varepsilon$.

Bizonyítás:

- Az előző tétel miatt: f Riemann-integrálható$\Rightarrow$

  valamilyen $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ esetén $S_f(\Phi_n) - s_f(\Phi_n) \to 0 \Rightarrow$
  - minden $\varepsilon > 0$ $\exists n_0$: $n > n_0$ -ra $S_f(\Phi_n) - s_f(\Phi_n) < \varepsilon$.
- A fenti tulajdonságot $\varepsilon = \frac{1}{n}$-re alkalmazva:

  létezik $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, hogy $S_f(\Phi_n) - s_f(\Phi_n) < \frac{1}{n}$.
  - Azaz ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} S_f(\Phi_n) - s_f(\Phi_n) = 0$,
  - így az előző tétel miatt f Riemann-integrálható.

Egyszerű definíció: fontos, egyszerű következmény

Tétel

Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható, akkor $|f| : [a,b] \to \mathbb{R}$ is az.

Bizonyítás:

- Felhasználjuk, hogy

$$\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f = \sup_{x_1,x_2 \in I_j} f(x_2) - f(x_1) = \sup_{x_1,x_2 \in I_j} |f(x_2) - f(x_1)| \geq$$

$$\geq \sup_{x_1,x_2 \in I_j} \big||f(x_2)| - |f(x_1)|\big| = \sup_{I_j} |f| - \inf_{I_j} |f|$$

- Így persze tetszőleges Φ felosztásra $S_f(\Phi) - s_f(\Phi) =$

$$= \sum_{j=1}^{n} (\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f) \cdot |I_j| \geq \sum_{j=1}^{n} (\sup_{I_j} |f| - \inf_{I_j} |f|) \cdot |I_j| = S_{|f|}(\Phi) - s_{|f|}(\Phi),$$

vagyis a fenti tétel értelmében $|f|$ is Riemann-integrálható. $\square$

Az eredeti definíció

- Legyenek $\xi_j \in I_j,\ j = 1, \ldots, N$ a Φ felosztásban tetszőlegesek.
- Legyen $\mathcal{S}_{\boldsymbol{\xi},f}(\Phi) = \sum_{j=1}^{N} f(\xi_j) \cdot |I_j|$.
    - Nyilván $s_f(\Phi) \leq \mathcal{S}_{\boldsymbol{\xi},f}(\Phi) \leq S_f(\Phi)$.

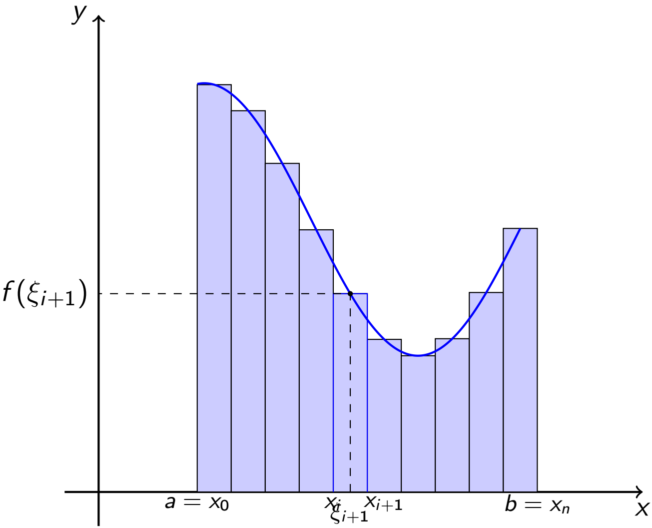
Definíció

Ha létezik olyan $\mathcal{I} \in \mathbb{R}$, hogy

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \max|I_j|\to 0}} \mathcal{S}_{\boldsymbol{\xi},f}(\Phi_n) = \mathcal{I},$$

amely Φ_n és a hozzá tartozó $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \ldots, \xi_N]$ választásától független, akkor azt mondjuk: f az I intervallumon Riemann-integrálható, és integrálja $\mathcal{I}$.

Az eredeti definíció - egy ábra



Az eredeti definíció: konstruktív átfogalmazás

- A fenti definícióban a limesz kicsit idegen; ilyet még nem vettünk.
- Ehelyett így is fogalmazhatunk:

Definíció

Azt mondjuk, hogy f az I intervallumon Riemann-integrálható, és integrálja $\mathcal{I}$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $\delta > 0$, hogy tetszőleges olyan Φ_n felosztásra, ahol $\max |I_j| < \delta$ és minden ehhez tartozó $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \ldots, \xi_n]$ belső ponthalmazra

$$|\mathcal{S}_{\boldsymbol{\xi},f}(\Phi_n) - \mathcal{I}| < \varepsilon.$$

Riemann-integrál: további fontos kérdések

- Elég volt már a sok definícióból, viszont tudni szeretnénk:
  - Konkrétan milyen függvények lesznek Riemann-integrálhatók?
    - Szeretnénk legalább az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényekről ezt igazolni.
    - Esetleg a szakaszonként folytonos függvényekre is.
  - Hogyan kell a Riemann-integrált kiszámítani?
    - Erre pedig formulát szeretnénk.
- A második ponthoz kell (és a gyakorlatokhoz): primitív függvények.

Riemann-integrál folytatás: műveleti szabályok, alapvető összefüggések

- Mindenképp elvárjuk: legyen lineáris - de milyen értelemben?

Tétel (A Riemann-integrál lineáris)

Ha $f, g : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálhatók és $c_0 \in \mathbb{R}$, akkor $c_0 \cdot f$ és $f + g$ is Riemann-integrálhatók, emellett

$$\int_I f + g = \int_I f + \int_I g \quad \text{és} \quad \int_I c_0 \cdot f = c_0 \cdot \int_I f.$$

Tétel (Intervallumok szerinti linearitás)

A Riemann-integrál lineáris: Ha $f : I = [a, c] \to \mathbb{R}$, $a < b < c$ továbbá $f_1 = f|_{[a,b]}, f_2 = f|_{[b,c]}$ mindketten Riemann-integrálhatók, akkor f is az, emellett

$$\int_I f = \int_a^c f = \int_a^b f_1 + \int_b^c f_2 = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

“A Riemann-integrál lineáris” igazolása

- Első lépés: belátjuk, hogy tetszőleges Φ felosztáson

  $s_f(\Phi) + s_g(\Phi) \leq s_{f+g}(\Phi)$ és $S_f(\Phi) + S_g(\Phi) \geq S_{f+g}(\Phi)$.

  Ehhez használjuk, hogy

  $\inf_{I_j} f + \inf_{I_j} g \leq \inf_{I_j}(f+g)$,

  - ugyanis minden $x \in I_j$-re: $\inf_{I_j} f + \inf_{I_j} g \leq f(x) + g(x)$, azaz a bal oldal *egy* alsó korlátja $f+g$-nek.

  Emiatt tehát tényleg

  $$s_f(\Phi) + s_g(\Phi) = \sum_{j=1}^{n} \inf_{I_j} f \cdot |I_j| + \sum_{j=1}^{n} \inf_{I_j} g \cdot |I_j| =$$

  $$\sum_{j=1}^{n} (\inf_{I_j} f + \inf_{I_j} g) \cdot |I_j| \leq \sum_{j=1}^{n} \inf_{I_j}(f+g) \cdot |I_j| = s_{f+g}(\Phi).$$

"A Riemann-integrál lineáris" igazolása (folyt.)

- Hasonlóan $\sup_{I_j} f + \sup_{I_j} g \geq \sup_{I_j}(f+g)$,
  - ugyanis minden $x \in I_j$-re: $\sup_{I_j} f + \sup_{I_j} g \geq f(x) + g(x)$, azaz a bal oldal egy felső korlátja $f+g$-nek I_j-n.

Emiatt tehát tényleg

$$S_f(\Phi) + S_g(\Phi) = \sum_{j=1}^{n} \sup_{I_j} f \cdot |I_j| + \sum_{j=1}^{n} \sup_{I_j} g \cdot |I_j| =$$

$$\sum_{j=1}^{n} (\sup_{I_j} f + \sup_{I_j} g) \cdot |I_j| \geq \sum_{j=1}^{n} \sup_{I_j}(f+g) \cdot |I_j| = S_{f+g}(\Phi).$$

“A Riemann-integrál lineáris” igazolása - befejezés

- Az előzőekből tudjuk, hogy tetszőleges Φ felosztáson
  $s_f(\Phi) + s_g(\Phi) \leq s_{f+g}(\Phi) \leq S_{f+g}(\Phi) \leq S_f(\Phi) + S_g(\Phi)$,
- f és g Riemann-integrálhatók $\Rightarrow$
  - létezik $(\Phi_{f,n})_{n\in\mathbb{N}}$: $s_f(\Phi_{f,n}) \to \int_I f$ és $S_f(\Phi_{f,n}) \to \int_I f$
  - létezik $(\Phi_{g,n})_{n\in\mathbb{N}}$: $s_g(\Phi_{g,n}) \to \int_I g$ és $S_g(\Phi_{g,n}) \to \int_I g$
- Ha $\Phi_{f,n}$ és $\Phi_{g,n}$ egyesítése Ψ_n, arra a rendőr-elv miatt szintén
  $s_f(\Psi_n) \to \int_I f$, $s_g(\Psi_n) \to \int_I g$ és $S_f(\Psi_n) \to \int_I f$, $S_g(\Psi_n) \to \int_I g$.
- $s_f(\Psi_n) + s_g(\Psi_n) \leq s_{f+g}(\Psi_n) \leq S_{f+g}(\Psi_n) \leq S_f(\Psi_n) + S_g(\Psi_n)$, ahol
  a jobb és bal oldal, így a középső két tag is $\to \int_I f + \int_I g$.

Linearitás; befejezés

- Ezt kaptuk: egy Ψ_n felosztássorozatra:

  $$s_{f+g}(\Psi_n) \to \int_I f + \int_I g \quad \text{és} \quad S_{f+g}(\Psi_n) \to \int_I f + \int_I g$$

  egyaránt teljesülnek.
- Ekkor az "észrevétel" miatt $f+g$ is Riemann-integrálható, és integrálja $\int_I f + \int_I g$.
- A konstans c_0 kiemelhető: ezt nem bizonyítjuk. $\square$

Linearitás: a másik állítás

- Legyen $f_1 = f|_{[a,b]}$ és $f_2 = f|_{[b,c]}$. A feltevés alapján:
  - Az $[a,b]$-on van olyan $(\Phi_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ felosztássorozat, hogy
$$s_{f_1}(\Phi_{1,n}) \to \int_a^b f_1 \quad \text{és} \quad S_{f_1}(\Phi_{1,n}) \to \int_a^b f_1.$$
  - A $[b,c]$-on van olyan $(\Phi_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ felosztássorozat, hogy
$$s_{f_2}(\Phi_{2,n}) \to \int_b^c f_2 \quad \text{és} \quad S_{f_2}(\Phi_{2,n}) \to \int_b^c f_2.$$
- A felosztássorozatok Φ_n egyesítésére (csak b a közös pontjuk):
$$s_f(\Phi_n) = s_{f_1}(\Phi_{1,n}) + s_{f_2}(\Phi_{2,n}) \to \int_a^b f_1 + \int_b^c f_2$$
$$S_f(\Phi_n) = S_{f_1}(\Phi_{1,n}) + S_{f_2}(\Phi_{2,n}) \to \int_a^b f_1 + \int_b^c f_2.$$

Linearitás: a másik állítás

- Összefoglalva: a $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ felosztássorozaton $s_f(\Phi_n)$ és $S_f(\Phi_n)$ limesze egyaránt $\int_a^b f_1 + \int_b^c f_2$.
- Így az észrevétel alapján: $f : [a, c] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható és integrálja $\int_a^b f_1 + \int_b^c f_2$.
  - Egyszerűen csak így szoktuk írni: $\int_a^b f + \int_b^c f$. $\square$

Tétel

Ha $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálhatók, akkor $f \cdot g$ is az.

- Nem bizonyítjuk.

Tétel (monotonitás)

Ha $f, g : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ mindketten Riemann-integrálhatók, emellett $f \leq g$, akkor $\int_I f \leq \int_I g$.

Bizonyítás: Tudjuk, hogy tetszőleges Φ felosztásra

$$s_f(\Phi) = \sum_{j=1}^{n} \inf_{I_j} f \cdot |I_j| \leq \sum_{j=1}^{n} \inf_{I_j} g \cdot |I_j| = s_g(\Phi).$$

- Emiatt viszont $\int_I f = \sup_{\Phi} s_f(\Phi) \leq \sup_{\Phi} s_g(\Phi) = \int_I g$,

  amit igazolni kellett. $\square$

Állítás (Következmény: "háromszög-egyenlőtlenség")

Ha $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrálható, akkor* $\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$.

Bizonyítás: Tudjuk, hogy $-|f| \leq f \leq |f|$, vagyis itt mindkét egyenlőtlenségre az előző tételt alkalmazva:

- De előtte -1 -et kiemelve:

$$-\int_I |f| = \int_I -|f| \leq \int_I f \leq \int_I |f|,$$

ami éppen azt jelenti, hogy $\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$. □

Riemann-integrál: további fontos tulajdonságok

Állítás (Következmény: "integrál triviális becslése")

Ha $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható, akkor

$$\inf_I f \cdot (b-a) \leq \int_a^b f \leq \sup_I f \cdot (b-a).$$

Bizonyítás: Tudjuk, hogy $\inf_I f \leq f \leq \sup_I f$, vagyis itt mindkét egyenlőtlenségre (konstans függvény integrálja!!) a monotonitást alkalmazva:

$$\inf_I f \cdot (b-a) = \int_a^b \inf_I f \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \sup_I f = \sup_I f \cdot (b-a)$$

amit igazolni kellett. $\square$

Riemann-integrál: hol tartunk, mi van még hátra?

- Definiáltuk a Riemann-integrál fogalmát (többféle módon).
- Kiszámítottuk egy konkrét esetben.
- Igazoltuk több tulajdonságát, amit “elvárunk”.
- De hátra van még:
  - Egy “nagy” függvényosztályt mutassunk, amelynek tagjai mind Riemann-integrálhatók.
  - Módszert adjunk a Riemann-integrál viszonylag egyszerű kiszámítására.

Tétel (Folytonos függvények Riemann-integrálhatósága)

Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor egyúttal Riemann-integrálható is.

Bizonyítás:

- Tudjuk, hogy ekkor f korlátos is (Weierstraß).
- "Riemann-integrálhatóság oszcillációs összegekkel" értelmében
  - ε-hoz olyan Φ kellene, amelyre $S_f(\Phi) - s_f(\Phi) < \varepsilon$.
- f egyenletesen folytonos $\Rightarrow$

  $\frac{\varepsilon}{b-a}$-hoz $\exists\, \delta$, hogy $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_2) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.
- Olyan felosztást választva, ahol minden j-re $|I_j| < \delta$, teljesül:

Folytonos függvények Riemann-integrálhatók - bizonyítás folyt.

$$\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f = \sup_{x_1,x_2 \in I_j} f(x_2) - f(x_1) = \sup_{x_1,x_2 \in I_j} |f(x_2) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

- Vagyis az oszcillációs összegre:

$$S_f(\Phi) - s_f(\Phi) = \sum_{j=1}^{n} (\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f) \cdot |I_j| < \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot |I_j| =$$

$$= \tfrac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_{j=1}^{n} |I_j| = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon,$$

amit igazolni akartunk. $\square$

Tétel (Monoton függvények Riemann-integrálhatósága)

Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton, akkor egyúttal Riemann-integrálható is.

Bizonyítás:

- Most is ez a cél:
  - ε-hoz olyan Φ kellene, amelyre $S_f(\Phi) - s_f(\Phi) < \varepsilon$.
- Feltehető, hogy f monoton növő.
- Ekkor konkrétan: $\sup\limits_{I_j} f - \inf\limits_{I_j} f = f(x_j) - f(x_{j-1})$, vagyis
  - egy egyenletes, $\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$-nél finomabb felosztásra

$$S_f(\Phi) - s_f(\Phi) = \sum_{j=1}^{n} (\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f) \cdot |I_j| = \sum_{j=1}^{n} (f(x_j) - f(x_{j-1})) \cdot |I_j|$$

$$< \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \cdot \sum_{j=1}^{n} f(x_j) - f(x_{j-1}) = \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \cdot (f(b) - f(a)) = \varepsilon.$$

Riemann-integrálhatóság: ellenpélda

- Ez nem Riemann-integrálható: $d : [0,1] \to \mathbb{R}$ Dirichlet-függvény.
  - $d(x) = 1$, ha $x \in \mathbb{Q}$, és $d(x) = 0$, ha $x \notin \mathbb{Q}$.
- Csak azt kell tudnunk: tetszőleges I_j felosztás-intervallumban van racionális és irracionális szám is.
- Emiatt tetszőleges Φ felosztásra teljesülnek:

$$s_d(\Phi) = \sum_{j=1}^{n} \inf_{I_j} f \cdot |I_j| = 0, \quad S_d(\Phi) = \sum_{j=1}^{n} \sup_{I_j} f \cdot |I_j| = \sum_{j=1}^{n} |I_j| = 1.$$

- Tehát $\sup_{\Phi} s_d(\Phi) = 0, \quad \inf_{\Phi} S_d(\Phi) = 1,$
  - azaz d valóban nem Riemann-integrálható.

Riemann-integrálhatóság: ellenpélda egy másik definíció alapján

Legyen Φ_n felosztások sorozata úgy, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{I_j\in\Phi_n} |I_j| = 0$.

- Tekintsünk minden részintervallumon $\xi_j \in I_j \cap \mathbb{Q}$ pontokat!
  - Mivel itt $d(\xi_j) = 1$, ezért
$$\mathcal{S}_{\boldsymbol{\xi},d}(\Phi_n) = \sum_{j=1}^{N} d(\xi_j)|I_j| = \sum_{j=1}^{N} |I_j| = 1.$$
- Hasonlóan a részintervallumokon $\xi_j \in I_j \cap \mathbb{Q}^*$ pontokat véve
  - Most $d(\xi_j) = 0$, ezért $\mathcal{S}_{\boldsymbol{\xi},d}(\Phi_n) = \sum\limits_{j=1}^{N} d(\xi_j)|I_j| = 0$.
- Összefoglalva: $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{I_j\in\Phi_n} |I_j| = 0$ esetén valamilyen $\boldsymbol{\xi}$ belső ponthalmazra a fenti limesz 0, egy másféle $\boldsymbol{\xi}$ belső ponthalmazra 1, így a definícióban adott limesz nem létezik.

Riemann-integrálok kiszámítása

- Gyakorlatilag ez a legfontosabb kérdés.
- Ez volt az eredeti motiváció is.
- A válasz meglepően egyszerű,
  - de a feltételeket lehet(ne) élesíteni.

Tétel (Newton–Leibniz-formula)

Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható. Tegyük fel, hogy $f|_{(a,b)}$-nek létezik egy $F \in C[a, b]$ primitív függvénye. Ekkor

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Bizonyítás: Tekintsük $[a, b]$ egy Φ felosztását.

- Tetszőleges I_j intervallumára és valamilyen $\xi_j \in I_j$ esetén

  $$F(x_j) - F(x_{j-1}) = |I_j| \cdot F'(\xi_j) = |I_j| \cdot f(\xi_j)$$

  - Lagrange-középértéktétel !! Emiatt

$$s_f(\Phi) \leq \sum_{j=1}^{n} |I_j| \cdot f(\xi_j) = \sum_{j=1}^{n} F(x_j) - F(x_{j-1}) \leq S_f(\Phi),$$

Newton–Leibniz-formula: bizonyítás folytatása

- Egy "teleszkopikus" összegünk van középen:

$$\sum_{j=1}^{n} F(x_j) - F(x_{j-1}) =$$

$$F(x_1)-F(x_0)+F(x_2)-F(x_1)+\cdots+F(x_n)-F(x_{n-1}) = F(b)-F(a),$$

- tehát az előző becslés: $s_f(\Phi) \leq F(b) - F(a) \leq S_f(\Phi)$.
- f Riemann-integrálható $\Rightarrow$ valamilyen $(\Phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra

$$\lim_{n\to\infty} s_f(\Phi_n) = \lim_{n\to\infty} S_f(\Phi_n) = \int_a^b f,$$

- így a rendőr-elv miatt

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f. \qquad \square$$

Számítási eljárás

- Egyszerűen ki tudunk számítani sok Riemann-integrált:
  - Keressük: $\int_a^b f$.
  - Kiszámítjuk f egy primitív függvényét (legyen ez F).
    - Mindegy melyiket?
    - Kell: F folytonosan kiterjeszthető az a és b pontokra.

      "Általában teljesül" - nehéz ellenpéldát mutatni.
  - $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.
- Most kapcsoltuk össze a primitív függvények kis elméletét integrálok kiszámításával.

Számítási eljárás: ami a keretbe nem fér be

- Legyen $f : [0,2] \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2, & \text{ha } x \in [0,1) \\ 3, & \text{ha } x \in [1,2] \end{cases}$
- Most f-nek nincs primitív függvénye;
  - mert f nem Darboux-tulajdonságú, így nem lehet derivált.
- De $f|_{[0,1]}$ és $f|_{[1,2]}$ is Riemann-integrálhatók, így az "egyik fajta linearitás" miatt f is az.
- Sőt $\displaystyle\int_0^1 f = 2$ - ez majdnem triviális,

  és $\displaystyle\int_1^2 f = 3$ - ez triviális.
- Így a fent idézett tétel miatt $\displaystyle\int_0^2 f = 2 + 3 = 5.$

- Attól, hogy f-re a Newton–Leibniz formula nem alkalmazható, még lehet Riemann-integrálható.

Számítási eljárás: "határozott" integrálok

- A primitív függvények kiszámítására vonatkozó összefüggések Riemann-integrálokra.

Állítás

Ha $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálhatók, akkor

- $\displaystyle\int_a^b c \cdot f = c \cdot \int_a^b f$, *ahol* $c \in \mathbb{R}$ *tetszőleges*
- $\displaystyle\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$.

Ha $f \cdot g'$ is Riemann-integrálható és $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$ létezik, akkor

- $$\int_a^b f' \cdot g = f \cdot g(b) - f \cdot g(a) - \int_a^b f \cdot g' = \left[f \cdot g\right]_a^b - \int_a^b f \cdot g',$$
  - *parciális integrálás elve.*

Parciális integrálás: bizonyítás

- A Newton–Leibniz - formula miatt a bal oldal:
  - $\left(\int f'g\right)(b) - \left(\int f'g\right)(a)$
- Az eredeti parciális integrálás elve miatt:
  - $\int f'g = fg - \int fg',$

  így ezt kell a-ban és b-ben kiértékelni, azaz

$$\left(\int f'g\right)(b) - \left(\int f'g\right)(a) = fg(b) - fg(a) - \left[\left(\int f'g\right)(b) - \left(\int f'g\right)(a)\right]$$

$f'g$ primitív függvénye b és a-beli értékeinek különbsége: $\left(\int_a^b f'g\right)$.

- Ezt beírva kapjuk az állítást. $\square$

Állítás (helyettesítés Riemann-integrálra)

Tegyük fel, hogy

- f *teljesíti a Newton–Leibniz-formula feltételeit,*
- $g : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ *differenciálható bijekció,*
- $(f \circ g) \cdot g' : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ *is Riemann-integrálható.*

Ekkor $\displaystyle \int_a^b f = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f \circ g \cdot g'.$

- Ezt nem igazoljuk, de példát mutatunk alkalmazásra.

- Írjuk le most "változókkal":

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t)) \cdot g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Nagyon formálisan: x helyett $g(t)$, $\mathrm{d}x$ helyett $g'(t)\,\mathrm{d}t$.
- Hogy lehet megjegyezni; a határokat miért így választjuk?
  - Ha az x változó, azaz $g(t)$ az a és b értékek közt fut,
  - akkor a t változó: $g^{-1}(a)$ és $g^{-1}(b)$ értékek közt.
- Előfordulhat, hogy g szig. mon. csökken.
  - Ekkor $g^{-1}(a) > g^{-1}(b)$.
  - Emiatt (is) rögzítjük, hogy $\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a h(x)\,\mathrm{d}x$.

Riemann-integrál helyettesítéssel: egy gyakorlati példa

Számítsuk ki egy r sugarú kör területét!

- Konkrétan az origó középpontú r sugarú félkörét számítjuk.
- Ezt egy függvénygrafikon alatti területként kell elképzelni.
  - Ezért nem az egész körét számítjuk.
- A megfelelő függvény: $f : [-r, r] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.
- Ezt az integrált kell kiszámítani: $\displaystyle\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$.
  - Itt már van értelme $\mathrm{d}x$-et írni.
- Alkalmazzunk valami okos helyettesítést,
  - amellyel a gyökjel eltűnik.

Riemann-integrál helyettesítéssel: egy gyakorlati példa

Számítsuk ki egy r sugarú kör területét!

- Konkrétan az origó középpontú r sugarú félkörét számítjuk.
- Ezt egy függvénygrafikon alatti területként kell elképzelni.
  - Ezért nem az egész körét számítjuk.
- A megfelelő függvény: $f : [-r, r] \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.
- Ezt az integrált kell kiszámítani: $\displaystyle\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, \mathrm{d}x$.
  - Itt már van értelme $\mathrm{d}x$-et írni.
- Alkalmazzunk valami okos helyettesítést,
  - amellyel a gyökjel eltűnik.
  - Legyen $x = r \cdot \sin t$.

Riemann-integrál helyettesítéssel: egy gyakorlati példa

- Ismét itt a képlet: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))\cdot g'(t)\,\mathrm{d}t$,
- és a feladat: $\displaystyle\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x$, amelyhez $x = g(t) = r\cdot\sin t$.
- Most $g : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton növő, és
  - $g^{-1}(-r) = -\frac{\pi}{2}$, ill. $g^{-1}(r) = \frac{\pi}{2}$.
- Továbbá “ $\mathrm{d}x = g'(t)\,\mathrm{d}t = r\cdot\cos t\,\mathrm{d}t$”.
- Mindezt behelyettesítve:

$$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2-r^2\cdot\sin^2 t}\;\cdot r\cdot\cos t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos t\;\cdot r\cdot\cos t\,\mathrm{d}t = r^2\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t =$$

Riemann-integrál helyettesítéssel: példa - befejezés

$$= r^2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, \mathrm{d}t = r^2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} \, \mathrm{d}t =$$

$$r^2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \, \mathrm{d}t + r^2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2t}{2} \, \mathrm{d}t = \frac{r^2}{2} \cdot \pi + \left[\frac{\sin 2t}{4} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r^2}{2} \cdot \pi,$$

ami tehát a félkör területe.

- Így az (origó középpontú) r sugarú körlap területe $r^2\pi$.
- A "terület" eltolásinvariáns:
  - $t = x + c$ helyettesítés: $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$.
- A "terület" r-szeres nagyítással r^2-szeresére változik:
  - $t = r \cdot x$ helyettesítés: $\mathrm{d}t = r^2 \cdot \mathrm{d}x$.

Ezeket érdemes fejből tudni; gyakran használjuk.

- Egy szinusz "félperiódus" alatti terület:

$$\int_0^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = \Big[-\cos\Big]_0^{\pi} = \Big[-\cos x\Big]_{x=0}^{x=\pi} = -(-1)-(-1) = 2.$$

- x^n integrálja $[0,1]$-en, ahol $n>0$.

$$\int_0^1 x^n \,\mathrm{d}x = \Big[\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{n+1}.$$

- Egy teljes szinusz periódus alatti terület:

$$\int_0^{2\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = \Big[-\cos\Big]_{-\pi}^{\pi} = \Big[-\cos x\Big]_{x=-\pi}^{x=\pi} = (-1)-(-1) = 0.$$

- Ugyanakkora "területrészek" az x-tengely alatt és felett.

Riemann-integrálok: további példák

- Ezt számoljuk ki!

$$\int_{-2}^{2} x^2 \sin x^3 \,\mathrm{d}x$$

  - Ez biztosan nulla, mert páratlan függvényt integráltunk 0-ra szimmetrikus intervallumon.
  - Fogalmazzunk meg egy vonatkozó állítást!

Állítás

Egy páratlan folytonos függvény integrálja $[-a, a]$ típusú intervallumon nulla.

- Az előző fólián szereplő utolsó példa is ilyen volt, csak "el volt tolva" a függvény.

Riemann-integrálok: páratlan folytonos függvény Riemann-integrálja

Az előző állítás bizonyítása:

- Tekintsünk egy egyenletes felosztást, ahol $|I_j| = \frac{2a}{2N}$, $j = 1, 2, \dots, 2N$, és nulla az egyik osztópontja.
- Az egyes részintervallumokban a $-\xi_N, -\xi_{N-1}, \dots, -\xi_1, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{N-1}, \xi_N$ osztópontokat.
- Az ehhez tartozó közelítő összeg:

$$|I_1| \cdot f(-\xi_N) + |I_2| \cdot f(-\xi_{N-1}) + \cdots + |I_{2N-1}| \cdot f(\xi_{N-1}) + |I_{2N}| \cdot f(\xi_N) =$$

$$-|I_1| \cdot f(\xi_N) - |I_2| \cdot f(\xi_{N-1}) + \cdots + |I_{2N-1}| \cdot f(\xi_{N-1}) + |I_{2N}| \cdot f(\xi_N) = 0.$$

- N tetszőleges, azaz bármilyen finom felosztásra teljesül.
- Az "eredeti" definíció szerint ennek határértéke (vagyis nulla) kell, hogy legyen a Riemann-integrál.

Riemann-integrálok kiszámítása: még néhány példa

- Helyettesítés másképp avagy számítsuk ki ezt: $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.
  - Legyen $t = \sqrt{x}$.
  - Az eredeti képletben $x = g(t)$ szerepelt.
  - Most formálisan $\mathrm{d}t = (\sqrt{x})'\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.
  - Továbbá ha $x \in (1,4)$, akkor $t = \sqrt{x} \in (1,2)$.
- Ezeket behelyettesítve

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^4 2 \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 2 \cdot e^t\,\mathrm{d}t = 2 \cdot e^2 - e.$$

Az előző példa; megjegyzések

- A helyettesítés lehetett volna az eredeti alakú is:
  - Legyen $t = \sqrt{x} \Leftrightarrow g(t) = t^2 = x$.
  - Ez szigorúan monoton és deriválható $(1, 2)$-n.
  - Ekkor $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$,
  - továbbá $g^{-1}(1) = 1, g^{-1}(4) = 2$.
- Ezeket is be tudjuk helyettesíteni:

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{e^{\sqrt{t^2}}}{\sqrt{t^2}} 2t\,\mathrm{d}t = \int_1^2 2 \cdot e^t\,\mathrm{d}t = 2 \cdot e^2 - e.$$

Újabb példa

- Számítsuk ki ezt: $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$
- Ekkor $\int \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x}$ alapján

  $$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -1 - (-(-1)) = -2.$$
- Itt valammi nem stimmel: nemnegatív függvény Riemann-integrálja nem lehet negatív!
- Két gond is van:
  - Egyrészt nem korlátos a függvény.
  - Másrészt a primitív függvény nem létezik az egész $(-1, 1)$ intervallumon.
- Lesz majd elmélet ilyen függvények integráljára is.

Példa; a ráadás

- Számítsuk ki $j, k \in \mathbb{N}^+$ esetén: $\displaystyle\int_0^\pi \sin jx \cdot \sin kx \, \mathrm{d}x$.
- Bonyolult trigonometrikus képlet helyett: parciális integrálások.
  - Ehhez: $\sin jx = \left(-\frac{1}{j} \cdot \cos jx\right)'$, azaz

$$\int_0^\pi \left(-\frac{1}{j} \cdot \cos jx\right)' \sin kx \, \mathrm{d}x =$$

$$\left[-\frac{1}{j} \cdot \cos jx \cdot \sin kx\right]_{x=0}^{x=\pi} + \int_0^\pi \frac{1}{j} \cdot \cos jx \cdot k \cdot \cos kx \, \mathrm{d}x =$$

$$\int_0^\pi \left(\frac{1}{j^2} \cdot \sin jx\right)' \cdot k \cdot \cos kx \, \mathrm{d}x =$$

$$\left[\frac{k}{j^2} \cdot \sin jx \cdot \cos kx\right]_{x=0}^{x=\pi} + \int_0^\pi \frac{1}{j^2} \cdot \sin jx \cdot k^2 \cdot \sin kx \, \mathrm{d}x.$$

A ráadás: folytatás

- Mivel ismét $\left[\frac{k}{j^2} \cdot \sin jx \cdot \cos kx\right]_{x=0}^{x=\pi} = 0$,
- az elejét és végét összevetve

$$\int_0^\pi \sin jx \cdot \sin kx \,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{k^2}{j^2} \cdot \sin jx \cdot \sin kx \,\mathrm{d}x.$$

- Vagyis ha $k \neq j$, akkor az eredeti nulla.
- Ha pedig egyenlők, akkor
$$\int_0^\pi \sin^2 jx \,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{1-\cos 2jx}{2} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} - \left[\frac{\sin 2jx}{4j}\right]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{\pi}{2}.$$
- A trigonometrikus Fourier-sorok elméletében használni fogjuk ezt az állítást.

Kitekintés: mit tegyünk, ha nem tudjuk kiszámolni az integrált?

- Akkor közelíteni kell.
  - Ez már a numerikus analízis tárgyhoz tartozik.
  - Különösen többdimenziós esetben lesz fontos.
- Egy példa közelítésre:
  - Legyen $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ (mindent ide tudunk transzformálni):
  - $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{5}{9} \cdot f(-\sqrt{0.6}) + \frac{8}{9} \cdot f(0) + \frac{5}{9} \cdot f(\sqrt{0.6})$
  - Hogy jön ez ki?
  - Milyen mértékben/rendben közelít? Mitől függ a hiba?

Egy fontos alkalmazás: forgástestek térfogata

- Legyen $f : [a, b] \to (0, \infty)$ folytonos.
  - Elegendő lenne, hogy Riemann-integrálható.
- Tekintsük ennek $\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$ grafikonját.

Tétel

A fenti Γ grafikon x-tengely körüli forgatásával nyert forgástest

- *térfogata:* $\pi \cdot \displaystyle\int_a^b f^2$,
- *palástjának felszíne:* $2\pi \cdot \displaystyle\int_a^b f \cdot \sqrt{1 + f'^2}$.

- Nem bizonyítjuk.

- Az $f : [0, 9] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ függvény grafikonját forgattunk meg.
  - Egy Goegebra-ábra.

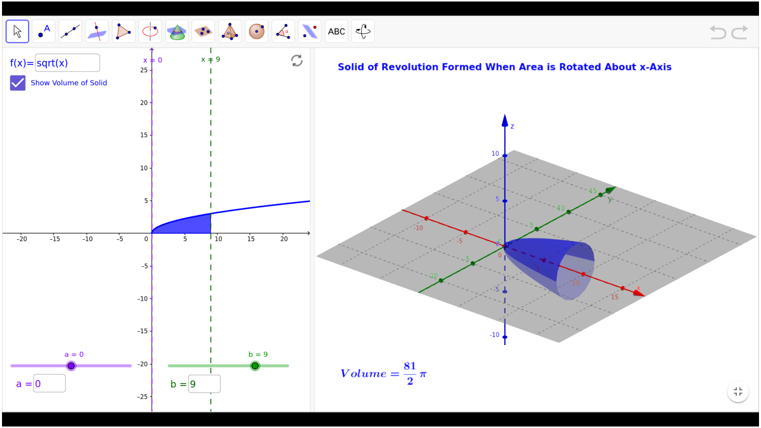


Figure: A forgástest palástja: sötét- és világoskék.

- Mi más lenne, mint az r sugarú gömb térfogata és felszíne?
- Ehhez a gömböt forgástestként kell leírnunk.
  - Vegyük az origó közepű r sugarú félkörívet
  - a felső félsíkban.
  - Ezt forgassuk meg!
- Formálisan: $f : [-r, r] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$.
- A térfogat: $\pi \cdot \int_{-r}^{r} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi \cdot \int_{-r}^{r} r^2 - x^2\,\mathrm{d}x =,$

  $$\pi \cdot 2r \cdot r^2 - \pi \cdot \int_{-r}^{r} x^2\,\mathrm{d}x = 2\pi \cdot r^3 - \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} = 2\pi \cdot r^3 - \frac{2}{3}\pi \cdot r^3,$$

  ami $\frac{4}{3}\pi \cdot r^3$.

- A felszín - ez most a forgástest palástja:

$$2\pi \cdot \int_{-r}^{r} f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$\pi \cdot \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi \cdot \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 2\pi \cdot \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\pi \cdot \int_{-r}^{r} r\,\mathrm{d}x = 2\pi \cdot 2r \cdot r,$$

ami $4\pi \cdot r^2$.

Definíció

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ *tetszőleges intervallum, és tegyük fel, hogy minden* $[a, b] \subset I$ *esetén* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrálható. Ekkor az* $x \to c + \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s$ *hozzárendeléssel adott függvényt a fenti* f *egy integrálfüggvényének nevezzük.*

Megjegyzések:

- Tipikus példa a feltételek teljesülésére:
  - $I = \mathbb{R}, \ f : I \to \mathbb{R}$ mindenütt folytonos.
- Többes szám: függ a-tól és c-től is.
- a és c rögzítésével: $f \to$ (f integrálfüggvénye).
  - Egy végtelen dimenziós vektortéren értelmezett lineáris függvény.

Integrálfüggvények - megjegyzések (folyt.)

- Ha f-nek létezik F primitív függvénye, akkor a Newton–Leibniz-formula miatt

  $F(x) = F(a) + \int_a^x f(x)$, vagyis $c = F(a)$ választással

  - F egy integrálfüggvénye f-nek.

- Fordítva, ha F egy integrálfüggvénye f-nek, akkor

  - minden $x, u \in [a, b] \subset I$-re

$$F(x) - F(u) = c + \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s - \left(c + \int_a^u f(s)\,\mathrm{d}s\right) = \int_u^x f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Tétel

Legyen I nyílt intervallum, minden $[a,b] \subset I$ esetén $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálható és f folytonos az $u \in I$ helyen. Ekkor f bármely F integrálfüggvényére $F'(u) = f(u)$.

Következmény: F automatikusan egy primitív függvény.

Bizonyítás: Igazolni kell tehát, hogy $\lim\limits_{x \to u} \dfrac{F(x) - F(u)}{x - u} = f(u)$.

Tudjuk (ld. előző oldal), hogy

$$\left| \frac{F(x) - F(u)}{x - u} - f(u) \right| = \left| \frac{1}{x-u} \int_u^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{x-u} \int_u^x f(u)\,\mathrm{d}t \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{x-u} \int_u^x f(t) - f(u)\,\mathrm{d}t \right| \leq \frac{1}{|x-u|} \int_u^x |f(t) - f(u)|\,\mathrm{d}t.$$

- Ekkor adott $\varepsilon > 0$-hoz vegyünk olyan $\delta > 0$ számot, hogy
  - $|x-u| < \delta$ esetén $|f(x)-f(u)| < \varepsilon$.
- Így az előző becslést folytatva $u \neq x$-re

$$\left|\frac{F(x)-F(u)}{x-u} - f(u)\right| \leq \frac{1}{|x-u|}\int_u^x |f(t)-f(u)|\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{|x-u|}\int_u^x \varepsilon\,\mathrm{d}t = \varepsilon.$$

Összefoglalva: Adott $\varepsilon > 0$-hoz tudtunk olyan $\delta > 0$ számot találni, hogy

- $|x-u| < \delta, u \neq x$ esetén az előző sor teljesül, azaz

  $\lim\limits_{u \to x} \dfrac{F(x)-F(u)}{x-u} = f(u)$, amit akartunk. $\square$

Integrálfüggvények vs. primitív függvények - összefoglalás

Fontos következmény:

- Intervallumon értelmezett folytonos függvénynek biztosan van primitív függvénye:
  - Az integrálfüggvénye az lesz.
  - Akkor is létezik, ha elemi függvényekkel nem tudjuk megadni.
- Fordítva láttuk: ha primitív függvény létezik, az biztos egy integrálfüggvény.
- Angol irodalom (az előző tétel feltételével):
  $\left(x \mapsto \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s\right)'(x_0) = f(x_0)$. elnevezése:
  - "fundamental theorem of calculus".

Riemann integrálok egy kiterjesztése

- Impropriust (nem valódi) integrálok
  - Ez meg mire jó?
  - A valószínűségszámításban egy val. változó várható értéke így van *definiálva*:
    - $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$
  - De ez nem fér bele az eddigi keretbe.
  - Ezért tágítjuk a keretet.
- Kétféle feltételt kellene enyhíteni:
  - f korlátos
  - $\mathcal{D}_f$ korlátos.

- Most "végtelenig tartó" inegrálokat kellene definiálni.
- Volt már hasonló: végtelen sok szám összegét akartuk defniálni.
  - Akkor azt mondtuk: véges k tagot összegzünk, majd ezen összegek határértékét vesszük, ha $k \to \infty$.
- Most ugyanezt tesszük (az egyik példán jól látszik), csak véges k-ig integrálunk, majd ezek határértékét vesszük, ha $k \to \infty$.
  - Azért ez kicsit bonyolultabb: itt két irányban is lehet végtelen, vagy véges határérték is lehet, ha annak közelében a függvény nem korlátos.

Riemann integrálok egy kiterjesztése

Definíció

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges, I_0, I_1 végpontokkal, $f : I \to \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy

- *a Riemann-integrálhatóság feltételei nem teljesülnek,*
- *minden $[a, b] \subset I$ esetén $f|_{[a,b]}$ Riemann-integrálható,*

▷ $\displaystyle\lim_{a \searrow I_0, b \nearrow I_1} \int_a^b f$ *létezik.*

Ekkor az utóbbi limeszt az f függvény I intervallumon vett improprius integráljának nevezzük.

▷ részletesen: Létezik olyan $\mathcal{I}$, hogy tetszőleges monoton csökkenő, $(a_n) \to I_0$, illetve monoton növő $(b_n) \to I_1$ sorozatra

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f = \mathcal{I}.$$

Improprius integrál definíciója: utólagos megjegyzések

- Ha az improprius integrál véges, akkor azt konvergensnek nevezzük.
  - Gyakran csak ez a kérdés.
- A második feltétel csak ahhoz kellett, hogy a limeszen minden tag értelmes legyen.
- Sajnos, még ez sem fed le minden fontos esetet, egy "kicsit" tovább terjesztjük az integrál fogalmát.
- Ha a feltételek mellett $f \geq 0$ is teljesül, akkor az improprius integrál létezik (hogy véges-e, ebből nem tudjuk).
  - Nem bizonyítjuk.

Magyarázat egy példán keresztül

Számítsuk ki az $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ improprius integrált!

- Igen, ez improprius: $I = [1, \infty)$
  - Nem korlátos az intervallum.
- De $f(x) = \frac{1}{x^2}$ itt folytonos, tehát minden $[a, b] \subset I$ intervallumon f Riemann-integrálható.

Akkor most tényleg számoljunk!

- A legegyszerűbb eset: $a_n \equiv 1$; és legyen $b_n \to \infty$ monoton növő.

$$\int_1^{b_n} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_{x=1}^{x=b_n} = -\frac{1}{b_n} - (-\frac{1}{1}) = 1 - \frac{1}{b_n},$$

azaz $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_1^{b_n} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{b_n} = 1.$

Magyarázat egy másik példán keresztül

Számítsuk ki az $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ improprius integrált!

- Ez ismét improprius: $I = (-\infty, \infty)$ nem korlátos.
- De $f(x) = \frac{1}{x^2}$ itt folytonos, tehát minden $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon f Riemann-integrálható.
- Legyenek $a_n \to -\infty$ mon. csökkenő és $b_n \to \infty$ mon. növő.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \overset{\text{DEF}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \Big[\mathrm{arc\ tg}\, x\Big]_{x=a_n}^{x=b_n} =$$

$$= \lim_{b_n\to\infty} \mathrm{arc\ tg}\, b_n - \lim_{a_n\to-\infty} \mathrm{arc\ tg}\, a_n = \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} = \pi.$$

Először legyen $0 < \alpha \neq 1$.

- $$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{b_n\to\infty}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{x=1}^{x=b_n} = \lim_{b_n\to\infty}\frac{b_n^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} =$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1, \\ \infty, & 0 < \alpha < 1, \end{cases}$$

hasonlóan

- $$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{b_n\to 0}\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{x=b_n}^{x=1} = \frac{1}{1-\alpha} - \lim_{b_n\to 0}\frac{b_n^{1-\alpha}}{1-\alpha} =$$
$$= \frac{1}{1-\alpha}\cdot\left(1 - \lim_{b_n\to 0} b_n^{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & 0 < \alpha < 1, \\ \infty, & \alpha > 1. \end{cases}$$

Végül $\alpha = 1$ esetén $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \infty.$

Improprius integrálok: egy fontos speciális eset - befejezés

- Az előzőeket meg kell jegyezni; minden hivatkozás nélkül használjuk majd ezeket.
- Fontos következmény: minden $\alpha > 0$ esetén $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x = \infty.$
- A linearitás és az intervallumok szerinti additivitás kiterjeszthető improprius integrálokra is:

Állítás

Ha f és g Riemann-integrálható minden $I \subset (a,b)$ intervallumon, továbbá a bal oldalon levő mindkét improprius integrál és azok összege is értelmes, akkor a jobb oldalon álló integrál is, és ezek megegyeznek:

$$\int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{b} f = \int_a^b f, \qquad \int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b f + g.$$

A második eset igazolása:

- Tudjuk, hogy tetszőleges monoton növő $b_n \to b$ és monoton csökkenő $a_n \to a$ sorozatok esetén

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f = \int_a^b f \text{ és } \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} g = \int_a^b g .$$

- Emiatt, ha a jobb oldalak összege létezik, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f + g = \int_a^b f + \int_a^b g ,$$

ami az improprius integrál definíciója miatt azt jelenti, hogy

$$\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g . \quad \square$$

Nevezetes egyenlőségek: további megjegyzések

- Igazából az előző állítás eredményét használtuk ahhoz, hogy
$$\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \infty$$
- Azt az esetet nem vizsgáltuk, amikor $\displaystyle\int_0^B x^\alpha\,\mathrm{d}x$ alakú integrálokat kell kiszámítani $\alpha > 0$ esetén.
- Itt $B > 0$ lehet véges vagy ∞.
- Ez viszont ennyi: $\displaystyle\lim_{x\to B} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$,
  - ami pontosan akkor véges, ha B véges.

Nevezetes egyenlőségek: egy példa

- avagy legyünk kritikusak a fizikai "törvényekkel"
- Mennyi munkát kell végeznünk, míg két "összeragadt" tömegpontot egymástól S távolságra eltávolítunk?
- Munka kiszámítása (iskola): "megtett út · kifejtett erő".
- Pontosabban: az "F : hely $\mapsto$ kifejtett erő" függvény integrálja a hely szerint.
- Most a Newton-törvény szerint a fenti:

  $F(s) = m_1 \cdot m_2 \cdot G \cdot \frac{1}{s^2}$, ahol

  - m_1 és m_2 a tömegpontok tömege,
  - s az (aktuális) távolságuk
  - G egy állandó.

- Összefoglalva; ezt kell kiszámítanunk:

$$\int_0^S m_1 \cdot m_2 \cdot G \cdot \frac{1}{s^2}\,\mathrm{d}s = m_1 \cdot m_2 \cdot G \cdot \int_0^S \frac{1}{s^2}\,\mathrm{d}s$$

- Most $\alpha = 2$, így a nevezetes egyenlőségek miatt
  - ez az integrál végtelen.
- Hol a hiba?
  - A jelenségre vonatkozó fizikai modellben.
- Nagyon kis távolságokra már nem érvényes ez a törvény.

Ellenpéldák

- A jegyzetben is az eredeti definíció szerepel.
- Ennek feltételeit nem teljesíti az alábbi:
  - $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$.
  - Ugyanis a nullát tartalmazó részintervallumokon f nem korlátos,
  - így nem lehet Riemann-integrálható.
- Pedig a nevezetes egyenlőségek szerint ($\alpha = \frac{1}{2}$)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2,$$

- továbbá $y = -x$, helyettesítéssel
  - $\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}y$ és a határokra $-(-1) = 1, -0 = 0$, így

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{-x}}\,\mathrm{d}x = -\int_1^0 \frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y.$$

Ellenpéldák (folyt.)

- Összefoglalva: $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{-1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{d}x = 2 + 2 = 4.$
- Ennek alapján értelmezni kellene az

  $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{d}x$ improprius integrált.
- Konkrétan: az eredeti definíciót ki kell terjeszteni az intervallumokra vett linearitás alapján.
- Több dimenzióban vannak ilyen típusú integrálok (egy töltéspont által meghatározott erőtér modellje).

Ellenpélda: egy majdnem igazi

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{a_n \to -\frac{\pi}{2} \\ b_n \to \frac{\pi}{2}}} \int_{a_n}^{b_n} \frac{\sin x}{\cos x} \,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{a_n \to -\frac{\pi}{2} \\ b_n \to \frac{\pi}{2}}} \int_{a_n}^{b_n} -\frac{\cos' x}{\cos x} \,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{\substack{a_n \to -\frac{\pi}{2} \\ b_n \to \frac{\pi}{2}}} \Big[-\ln(\cos x) \Big]_{a_n}^{b_n} = \lim_{\substack{a_n \to -\frac{\pi}{2} \\ b_n \to \frac{\pi}{2}}} \left(-\ln(\cos b_n) - (-\ln(\cos a_n)) \right) =$$

$= \text{``}\infty - \infty\text{''}$, ami nem létezik.

- Azaz: két végtelenhez tartó sorozat tagjainak különbsége.
  - $b_n = \operatorname{arc\,cos} e^{-n}$, $a_n = -\operatorname{arc\,cos} e^{-n^2}$ esetén
  - $-\ln(\cos b_n) - (-\ln(\cos a_n)) = n - n^2 \xrightarrow{n \to \infty} -\infty$.
  - $a_n = -b_n$ esetén pedig $-\ln(\cos b_n) - (-\ln(\cos a_n)) \xrightarrow{n \to \infty} 0$.
- De még ez a szituáció is menthető lenne:
  - $a_n = -b_n$ kikötésével – főérték-integrál (nem tárgyaljuk).

Ellenpélda: egy igazi

$$\int_0^\infty \sin x \,\mathrm{d}x = \lim_{b_n \to \infty} \int_0^{b_n} \sin x \,\mathrm{d}x,$$

ha a jobb oldal tetszőleges $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \to \infty$ esetén létezik és egyértelmű.

- Ha $b_n = n \cdot 2\pi$, akkor láttuk, hogy ez nulla.
- Ha $b_n = n \cdot 2\pi + \pi$, akkor

  $$\int_0^{b_n} \sin x \,\mathrm{d}x = \int_0^{n\cdot 2\pi} \sin x \,\mathrm{d}x + \int_{n\cdot 2\pi}^{n\cdot 2\pi+\pi} \sin x \,\mathrm{d}x = 0 + 2 = 2,$$

  - de ezek nem azonosak.

Véges/konvergens egy improprius integrál?

Ennek eldöntéséhez keresünk szükséges, ill. elégséges feltételeket.

- Láttuk, hogy a $(0,\infty)$ halmazon $\lim_{\infty} f = 0$ esetén
  - lehetséges, hogy $\int_0^\infty f$ konvergens,
  - lehetséges, hogy $\int_0^\infty f$ divergens.
- Olyan ez, mint a sorösszegek végessége.
  - Ez nem véletlen; össze is kapcsoljuk a kettőt.
- Fontos elv: a konvergencia eldöntéséhez folytonos függvény esetén elegendő a függvényt akármilyen pozitív x-től ismernünk.

Véges/konvergens egy improprius integrál?

Állítás

Ha $\int_0^{\infty} f < \infty$ *és* $\lim_{\infty} f = a$, *akkor csakis* $a = 0$ *lehet.*

Bizonyítás: Indirekt bizonyítunk.

- Ha $\lim_{\infty} f = a > 0$ (ez feltehető), akkor valamilyen K-ra:
  - $x \geq K \Rightarrow f(x) > \frac{a}{2}$.
- Emiatt teljesül, hogy
$$\int_0^{b_n} f = \int_0^{K} f + \int_K^{b_n} f \geq \int_0^{K} f + (b_n - K) \cdot \frac{a}{2}.$$
- Így $\int_0^{\infty} f = \lim_{b_n \to \infty} \int_0^{b_n} f \geq \lim_{b_n \to \infty} \int_0^{K} f + (b_n - K) \cdot \frac{a}{2} = \infty$,

ami ellentmondás. $\square$

Véges/konvergens egy improprius integrál?

- De fordítva nem igaz: van olyan érdekes példa, hogy $\lim\limits_{\infty} g$ nem létezik, azonban $\displaystyle\int_0^\infty g < \infty$ teljesül.
- Szóval egy $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvénynek nem kell nullához tartania ahhoz, hogy $\displaystyle\int_0^\infty g < \infty$ legyen.
- Ez különbözik a sorösszegek esetétől.
- A példa: $g(x) = \begin{cases} 1, & x \in [n, n + \frac{1}{n^2}],\ n \in \mathbb{N}^+ \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$
  - Most $\displaystyle\int_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{j^2} < \infty.$
  - Ugyanakkor $\lim\limits_{\infty} g$ nem létezik.

- Egyszerű eset: nemnegatív függvényeket vizsgálunk.

Állítás

Ha $f : (a, \infty) \geq 0$ *folytonos, továbbá egy* $g \geq f$ *függvényre* $\displaystyle\int_a^\infty g < \infty$*, akkor* $\displaystyle\int_a^\infty f < \infty$*.*

Bizonyítás: A feltételek miatt $\displaystyle\int_a^{b_n} f \leq \int_a^{b_n} g$, ezért

- $$\int_a^\infty f \stackrel{\text{DEF}}{=} \lim_{b_n \to \infty} \int_a^{b_n} f \leq \lim_{b_n \to \infty} \int_a^{b_n} g = \int_a^\infty g < \infty,$$

ahol a nemnegativitás miatt a bal oldalnak is léteznie kell, és az állításban szereplő becslés teljesül rá. □

Improprius integrálok: összehasonlító elvek II.

- Ismét nemnegatív függvényeket vizsgálunk.

Állítás

Ha $f:(a,\infty)\ge 0$ *folytonos, továbbá egy* $g\le f$ *függvényre* $\int_a^\infty g=\infty$, *akkor* $\int_a^\infty f=\infty$.

Bizonyítás: A feltételek miatt $\int_a^{b_n} f\ge\int_a^{b_n} g$, ezért

- $$\int_a^\infty f\overset{\text{DEF}}{=}\lim_{b_n\to\infty}\int_a^{b_n} f\ge\lim_{b_n\to\infty}\int_a^{b_n} g=\int_a^\infty g=\infty,$$

ahol a nemnegativitás miatt a bal oldalnak is léteznie kell, és az állításban szereplő becslés teljesül rá. $\square$

Improprius integrálok: kapcsolat sorok összegével

Tétel (Integrálkritérium sorok összegére)

Legyen $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}^+$ *monoton fogyó függvény. Ekkor*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergens} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f \text{ konvergens}$$

Bizonyítás: Legyen Φ az $[1, k]$ intervallum felosztása $2, 3, \ldots, k-1$ osztópontokkal és $f = f|_{[1,k]}$.

- f monoton fogyó $\Rightarrow f(2) + f(3) + \ldots f(k) = s_f(\Phi)$
- f monoton fogyó $\Rightarrow$
  $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(k-1) = S_f(\Phi)$

$$\int_1^k f \leq S_f(\Phi) \leq \sum_{j=1}^{k} f(j) \leq f(1) + s_f(\Phi) \leq f(1) + \int_1^k f.$$

Integrálkritérium; bizonyítás befejezése

- Vegyünk mindkét oldalon $k \to \infty$ határértéket!

$$\lim_{k\to\infty} \int_1^k f \le \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} f(j) \le \lim_{k\to\infty} f(1) + \int_1^k f,$$

azaz definíció szerint

$\displaystyle\int_1^\infty f \le \sum_{j=1}^{\infty} f(j) \le f(1) + \int_1^\infty f$, így valóban a középső és a két szélső tag véges tulajdonsága ekvivalens. $\square$

Integrálkritérium alkalmazása I.

- Legyen $f : [1, \infty),\ f(x) = \frac{1}{x}$.
- Ekkor $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} f(j) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$;
  - a harmonikus sor.
- A tétel szerint ennek konvergenciája ekvivalens $\displaystyle\int_1^{\infty} f = \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ konvergenciájával.
- Ez utóbbi divergens, így a harmonikus sor is.
- Ugyanez a helyzet a $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{\alpha}}$ sor esetében, ha $\alpha < 1$.

Integrálkritérium alkalmazása II.

- Legyen $f : [1, \infty), f(x) = \frac{1}{x^2}$.
- Ekkor $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} f(j) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$;
- A tétel szerint ennek konvergenciája ekvivalens $\displaystyle\int_1^{\infty} f = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ konvergenciájával.
- Ez utóbbi konvergens, így a $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ sor is.
- Sőt a bizonyítás utolsó formulája becslést is ad:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq \frac{1}{1^2} + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x,$$

azaz $\displaystyle 1 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \leq 1 + 1 = 2.$

Régi-új témakör: (numerikus) sorok

- A sorok összegének, konvergenciájának fogalma szerepelt, de gyakoroljuk.

Definíció

Azt mondjuk, hogy a $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} a_n$ *sor abszolút konvergens, ha* $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} |a_n|$ *konvergens.*

- Egy egyszerű állítás - gyakorlásra tökéletes:

Állítás

Ha $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} a_n$ *sor abszolút konvergens, akkor konvergens is.*

Abszolút konvergencia$\Rightarrow$ konvergencia: bizonyítás

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |a_j| < \infty \overset{\text{DEF}}{\Leftrightarrow} \left(\sum_{j=0}^{k} |a_j|\right)_k \text{ konvergens, azaz Cauchy-sorozat}$$

$$\overset{\text{DEF}}{\Leftrightarrow} \left(\forall\, \varepsilon\, \exists k \in \mathbb{N} : k < k_1 < k_2 \Rightarrow \sum_{j=k_1+1}^{k_2} |a_j| < \varepsilon\right)$$

$$\Rightarrow \left(\forall\, \varepsilon\, \exists k \in \mathbb{N} : k < k_1 < k_2 \Rightarrow \left|\sum_{j=k_1+1}^{k_2} a_j\right| < \varepsilon\right)$$

$$\overset{\text{DEF}}{\Leftrightarrow} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j\right)_k \text{ Cauchy-sorozat, azaz konvergens} \overset{\text{DEF}}{\Leftrightarrow} \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j < \infty,$$

ami a bizonyítandó következtetés. $\square$

- Fordítva nem biztos, hogy igaz: sok ellenpélda lesz.

Egy újabb egyszerű állítás

Állítás (Összehasonlító kritérium)

Legyen $0 \le a_n \le b_n \quad n \in \mathbb{N}$*. Ekkor*

(i) $\sum_{j\in\mathbb{N}} b_n$ *konvergens* $\Rightarrow \sum_{j\in\mathbb{N}} a_n$ *konvergens.*

(ii) $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_n$ *divergens* $\Rightarrow \sum_{j\in\mathbb{N}} b_n$ *divergens.*

Bizonyítás: Tudjuk, hogy $\left(\sum_{j=0}^{k} a_j\right)_k$ monoton növő, és $\sum_{j\in\mathbb{N}} b_j$ felső korlátja. Emiatt $\left(\sum_{j=0}^{k} a_j\right)_k$ konvergens, azaz $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j$ konvergens.

Egyszerű állítás (bizonyítás folyt.)

(ii) Tudjuk, hogy $\left(\sum_{j=0}^{k} a_j\right)_k \leq \left(\sum_{j=0}^{k} b_j\right)_k$,

- ahol a bal oldal határértéke végtelen,
  - így a jobb oldalé is az,
- vagyis $\sum_{j\in\mathbb{N}} b_j$ is divergens. $\square$
- Sőt, ha $0 \leq a_n \leq b_n \quad n \in \mathbb{N}$ egy adott N_0 indextől teljesül, akkor is igaz a tétel.
  - Ezt fogjuk használni.

Egyszerű (gyenge) konvergenciakritériumok I.

- Azaz egyszerűen ellenőrizhető feltételeket adunk egy sor konvergenciájára és divergenciájára.
- Nekünk elég lesz, de gyakran nem teljesülnek: nem tudunk dönteni.

Tétel (Hányadoskritérium)

Legyen $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ pozitív tagú.

(i) *Ha léteznek $q \in (0,1), N \in \mathbb{N}$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ minden $n > N$-re,*

- *akkor $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j$ konvergens.*

(ii) *Ha léteznek $q > 1, N \in \mathbb{N}$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q$ minden $n > N$-re,*

- *akkor $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j$ divergens.*

Hányadoskritérium: bizonyítás

(i) A feltétel szerint

$$a_{N+j} \leq a_{N+j-1} \cdot q \leq a_{N+j-2} \cdot q \cdot q \leq \cdots \leq a_N \cdot q^j,$$

- ahol $\sum\limits_{j \in \mathbb{N}} a_N \cdot q^j = \dfrac{a_N}{1-q}$, vagyis
- az előző állítás miatt $\sum\limits_{j \in \mathbb{N}} a_{N+j}$, így $\sum\limits_{j \in \mathbb{N}} a_j$ is konvergens.

(ii) A feltétel szerint

$$a_{N+j} \geq a_{N+j-1} \cdot q \geq a_{N+j-2} \cdot q \cdot q \geq \cdots \geq a_N \cdot q^j,$$

- ahol $\sum\limits_{j \in \mathbb{N}} a_N \cdot q^j = \infty$, vagyis
- az előző állítás miatt $\sum\limits_{j \in \mathbb{N}} a_{N+j}$, így $\sum\limits_{j \in \mathbb{N}} a_j$ is divergens. $\square$

Hányadoskritérium: megjegyzések

- Ez nem valami erős:
  - A harmonikus sor: $\sum_{j\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{j}$, ahol $\frac{a_{j+1}}{a_j} = \frac{j}{j+1} \longrightarrow 1.$
  - Így egyik kritériumnak sem felel meg.
- "Csak exponenciálisan növő vagy csökkenő tagú sorokra mond valamit."
- Egy példa, amire működik:
  - Faktoriálisok reciprokösszege: $\sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{j!}$, ahol
  - $\frac{a_{j+1}}{a_j} = \frac{\frac{1}{(j+1)!}}{\frac{1}{j!}} = \frac{1}{j+1} < \frac{1}{2}$, ha $j > 2$.
  - Az (i) kritérium alapján tehát ez konvergens.
  - Ez nem túl erős eredmény, mert egyrészt az összeget is ismerjük, másrészt az összehasonlító kritérium alapján azonnal adódik innen: $\sum_{j\in\mathbb{N}^2} \frac{1}{j^2} < \infty$.

Hányadoskritérium: további megjegyzések

- Ha ilyen gyenge, miért használjuk mégis?
  - Mert egyszerű alkalmazni;
    - különösen faktoriálisokat tartalmazó esetben.
- Általában a következő határértéket vizsgáljuk: $\lim\limits_{j\to\infty} \dfrac{a_{j+1}}{a_j}$.
  - Ha ez 1-nél kisebb, akkor tényleg egy tagtól valamilyen $q < 1$-re (i) teljesül.
  - Ha ez 1-nél nagyobb, akkor tényleg egy tagtól valamilyen $q > 1$-re (ii) teljesül.
  - Ha ez 1, akkor a kritérium semmit nem mond.

Egyszerű (gyenge) konvergenciakritériumok II.

Tétel (Gyökkritérium (Cauchy))

Legyen $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ pozitív tagú.

(i) *Ha léteznek $q \in (0,1), N \in \mathbb{N}$: $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ minden $n > N$-re,*

- *akkor $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j$ konvergens.*

(ii) *Ha létezik $q > 1, N \in \mathbb{N}$: $\sqrt[n]{a_n} > q$ végtelen sok n-re,*

- *akkor $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j$ divergens.*

Bizonyítás: (i) A feltétel $\Rightarrow$ $n > N$-re $0 < a_n < q^n$, ahol $q \in (0,1)$.

$$\sum_{n>N} q^n \text{ konvergens} \xRightarrow{\text{összehas. krit.}} \sum_{n>N} a_n \text{ konvergens} \Leftrightarrow \sum_{n>N} a_n < \infty$$

Gyökkritérium bizonyítása (folyt.)

(ii) A feltétel $\Rightarrow$ végtelen sok n-re $a_n > q^n$, ahol $q > 1$.

- $a_{j\in\mathbb{N}}$ tagjai közül végtelen sok 1-gyel alulról becsülhető, a többi nullával
  - ezen alulról becslő sorozat legyen $(b_j)_{j\in\mathbb{N}}$.
- Tudjuk, hogy $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} b_j = \infty$.
- Ismét az összehasonlító krit. miatt $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} a_j = \infty$ is teljesül. $\square$

Alkalmazzuk a $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ sorozatra!

- Most $\sqrt[j]{\frac{1}{j^2}} = \frac{1}{(\sqrt[j]{j})^2} \xrightarrow[j\to\infty]{} 1$,
  - vagyis sem (i), sem (ii) nem alkalmazható.

Gyökkritérium: további megjegyzések

- Ez most megint egy "gyenge" kritérium?
  - Igen; ismét az exponenciálisan változó sorozattal való összehasonlításból nyertük.
- Akkor mire jó?
  - Hatványokat tartalmazó sorösszegeket becsülhetünk vele egyszerűen.
- Gyakorlatilag ismét többször csak a következő határértéket vizsgáljuk: $\lim_{j \to \infty} \sqrt[j]{a_j}$.
  - Ha ez 1-nél kisebb, akkor tényleg egy tagtól valamilyen $q < 1$-re (i) teljesül.
  - Ha ez 1-nél nagyobb, akkor tényleg egy tagtól valamilyen $q > 1$-re (ii) teljesül.
  - Ha ez 1, akkor a kritérium semmit nem mond.

Gyökkritérium: példa

- $\sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{x^j}{j!}$ - az exponenciális függvény Taylor-sorában szerepelt.
  - Most $x \in \mathbb{R}^+$ rögzített.
- $\lim_{j\to\infty} \sqrt[j]{\frac{x^j}{j!}} = \lim_{j\to\infty} \frac{x}{\sqrt[j]{j!}} = \frac{x}{\infty} = 0.$
  - Minden $q > 1$-nél egy tagtól nagyobb, azaz (ii) teljesül.
- Tudtuk persze, hogy konvergens, mert összege e^x.
- Fontos megjegyzés:
- Mindkét kritériumot gyakran $\sum_{j\in\mathbb{N}} |a_j|$ alakú sorokra alkalmazzuk,
  - Aztán (i) esetén "abszolút konvergencia $\Rightarrow$ konvergencia".

Konvergenciakritériumok: végre valami erősebb

- Sőt, általános is:

Tétel (Leibniz-kritérium)

Ha $(a_j)_{j\in\mathbb{N}^+}$ *monoton fogyó és* $(a_j)_{j\in\mathbb{N}^+} \to 0$, *akkor*

- $\sum_{j\in\mathbb{N}^+} (-1)^{j+1} a_j$ *konvergens.*

Bizonyítás:

- A részletösszegeket csoportosítjuk:

$$S_1 = a_1,\ S_3 = a_1 - a_2 + a_3,\ S_5 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5,\ \ldots$$

$$S_2 = a_1 - a_2,\ S_4 = a_1 \underbrace{-a_2 + a_3}_{<0} - a_4,\ \ S_6 = a_1 \underbrace{-a_2 + a_3}_{<0} \underbrace{-a_4 + a_5}_{<0} - a_6$$

- Változás: növő, csökkenő.

Leibniz-kritérium: bizonyítás (folyt.)

- Páronként csoportosítva: $S_{2j+1} > 0$ ($j \in \mathbb{N}$), azaz
  - $(S_{2j+1})_{j\in\mathbb{N}}$ mon. csökkenő, korlátos $\Rightarrow$ $(S_{2j+1})_{j\in\mathbb{N}}$ konvergens.
- a_1 után páronként csoportosítva: $S_{2j+2} < a_1$ ($j \in \mathbb{N}$),
  - $(S_{2j+2})_{j\in\mathbb{N}}$ mon. növő, korlátos $\Rightarrow$ $(S_{2j+2})_{j\in\mathbb{N}}$ konvergens.
- Továbbá használjuk, hogy $(a_j)_{j\in\mathbb{N}^+} \to 0$:

$$\lim(S_{2j+2})_{j\in\mathbb{N}} - \lim(S_{2j+1})_{j\in\mathbb{N}} = \lim(S_{2j+2} - S_{2j+1})_{j\in\mathbb{N}} = \lim_{j\to\infty} a_{2j+2} = 0.$$

- A részletösszeg-sorozat tehát
  - két részsorozat összefésüléséből kapható,
  - amelyek konvergensek, határértékük azonos.
- Így a részletösszeg-sorozat (azaz a vizsgált sor) is konvergens. $\square$

Leibniz-kritérium: ez sok példát ad

- ▷ Mire ad példákat?
- Konvergens, de nem abszolút konvergens sorokra.
- $\sum_{j\in\mathbb{N}^+} \frac{(-1)^{j+1}}{j}$ - ez nem abszolút konvergens.
- Ugyanakkor teljesíti a Leibniz-tétel kritériumait:
  - $\left(\frac{1}{j}\right)_{j\in\mathbb{N}^+}$ monoton csökkenő, $\left(\frac{1}{j}\right)_{j\in\mathbb{N}^+} \to 0$
- “Akármilyen lassan is tart egy monoton csökkenő sorozat nullához, a váltakozó előjellel vett összegük biztosan konvergens.”

- Tanultunk ilyet az iskolában:

  $(a+b+c)\cdot(a+b+c) = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac =$

  $= a\cdot(a+b+c)+b\cdot(a+b+c)+c\cdot(a+b+c).$

- Jó; de két sor szorzata melyik formula általánosítása legyen?
  - Miért, nem mindegy?
- Nem szabad őket csak úgy "átzárójelezni"!

$$1+(-1)+1+(-1)+\dots \neq (1+(-1))+(1+(-1))+(1+(-1))+\dots$$

- Általában átrendezni sem. Mi az, hogy átrendezni?

Definíció

Ha $p:\mathbb{N}\mapsto\mathbb{N}$ egy bijekció (permutáció), akkor a $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} a_{p(j)}$ sort a $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} a_j$ sor egy átrendezésének nevezzük.

Állítás

Az $\sum_{j\in\mathbb{N}^+} \frac{(-1)^{j+1}}{j}$ *sort nem szabad átrendezni, azaz létezik olyan átrendezése, amelynek összege nem az eredeti.*

Bizonyítás: Mutatunk olyan átrendezését, amely nem is konvergens.

- Felhasználjuk: $\sum_{j\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{2j-1}$ és $\sum_{j\in\mathbb{N}^+} \frac{1}{2j}$ divergensek.
- Így néz ki a sor:

  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \dots$
- Vegyük az első annyi pozitív előjelűt, amelynek öszege legalább 1.
  - Ez nem lesz nehéz.

Sorok átrendezése és szorzása - utolsó témakör

- Aztán az első annyi negatív előjelűt vegyük, amelyek összege legalább 1.
- Aztán a maradékból az első annyi pozitív előjelűt vegyük, amelyek összege legalább 1.
  - Ezt folytatjuk.
  - Ez a részsorozatokból kapott sorok divergenciája miatt mindig megtehető.
- Így néz ki (kezdődik) az átrendezett sor:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{10}-\dots$$

- Ez divergens, mert a Cauchy-kritériumban bármilyen nagy $k_1 < k_2$ esetén is lehet $S_{k_2} - S_{k_2} \geq 1$. $\square$

Sorok átrendezése: erősebb állítások

Tétel

Ha $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j$ *sor abszolút konvergens, akkor az átrendezhető, azaz bármely átrendezésének ugyanaz az összege.*

Ha $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j$ *sor konvergens, de nem abszolút konvergens, (azaz feltételesen konvergens), akkor tetszőleges* $A \in \mathbb{R}$ *esetén átrendezhető úgy, hogy összege éppen* A *legyen.*

- Érdekes, de nem bizonyítjuk.

Sorok szorzása: definíció

- Úgy szorzunk majd, hogy az indexek összege szerint növekvő sorrendbe rendezzük a szorzatot.

Definíció

A $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j$ *és* $\sum_{j\in\mathbb{N}} b_j$ *sorok Cauchy-szorzatának nevezzük azt a sort, amelynek k-adik tagja* $a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \cdots + a_k b_0$.

Tétel (Mertens)

Ha a $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j$ *sor abszolút konvergens, valamint* $\sum_{j\in\mathbb{N}} b_j$ *konvergens, akkor Cauchy-szorzatuk is konvergens és*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \cdots + a_k b_0 = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j \cdot \sum_{j\in\mathbb{N}} b_j.$$

Sorok szorzása: folytatás

- A tételt nem bizonyítjuk (kicsit technikás).
- De példát mutatunk:
  - Belátjuk a hatványozás egy azonosságát.
  - Igazolni fogjuk, hogy $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$.
- Tudjuk: $e^x = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{x^j}{j!}$ és $e^y = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{y^j}{j!}$.
  - Mindkettő abszolút konvergens.
    - Igazoltuk gyökkritériummal.
- Mertens-tétel $\Rightarrow$ $e^x \cdot e^y$ a fenti sorok Cauchy-szorzata.
  - Akkor ezt kiszámoljuk.

- A Cauchy-szorzat k-adik tagja:

$$\frac{x^0}{0!}\cdot\frac{y^k}{k!}+\frac{x^1}{1!}\cdot\frac{y^{k-1}}{(k-1)!}+\frac{x^2}{2!}\cdot\frac{y^{k-2}}{(k-2)!}+\cdots+\frac{x^k}{k!}\cdot\frac{y^0}{0!}=$$

$$=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!\cdot(k-j)!}\cdot x^j y^{k-j}=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\cdot x^j y^{k-j}=$$

$$=\frac{1}{k!}(x+y)^k.$$

- Így a Cauchy-szorzat: $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{k!}(x+y)^k=e^{x+y}$,

amit igazolni akartunk. $\square$

Függvénysorozatok: miért? mik azok?

- Összetett f függvényeket egyszerű alakúakkal akarunk közelíteni.
  - Konstruálunk egy g_n függvényekből álló sorozatot, ami f-hez tart.
  - Eleve csak függvények határértékeként tudunk egy "összetett függvényt értelmezni".
    - Ellenpéldákhoz többször szükség lesz erre.
- Emiatt fő kérdések:
  - Mi az, hogy g_n "függvényekből álló sorozatot"?
  - Mi az, hogy "f-hez tart"?
    - Meglátjuk: ez nagyon nem egyértelmű.

Függvénysorozatok: definíció, példák

Definíció

Egy $\mathbb{N} \to \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ *típusú függvényt, amely tehát egy természetes számhoz egy valós függvényt rendel, függvénysorozatnak nevezzük.*

Jelölés: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vagy* $f_0, f_1, f_2, \ldots$

- Megjegyzések:
  - Általában magát az értékkészletet nevezzük függvénysorozatnak.
  - Ha nem mondunk mást, felteszük, hogy az összes f_n függvény értelmezési tartománya azonos.
- Példák:
  - $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = x^n$.
  - $f_n : [0, \pi] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \sin(nx)$.

Függvénysorozatok: konvergenciafogalmak I.

- Általános dilemma:
  - Könnyen ellenőrizhető, gyakran teljesülő definíciót adunk,
    - amiből nem sok minden következik.
  - Nehezebben ellenőrizhető, ritkábban teljesülő definíciót adunk,
    - de ebből sokminden következik.
- A "gyenge" definíció:

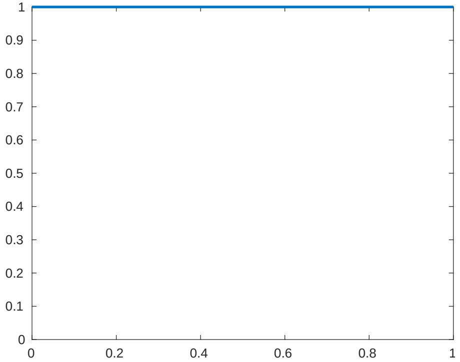
Definíció (pontonkénti konvergencia)

Azt mondjuk, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat a H halmazon pontonként tart az f függvényhez, ha $\forall\, x \in H : (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \to f(x)$. A H halmazt az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat konvergenciahalmazának, az f függvényt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***pontonkénti*** *limeszének nevezzük.*

Jelölés: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \to f$ vagy $f_n \to f$ (pontonként H-n).

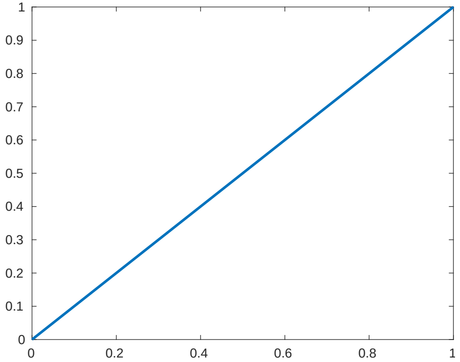
Pontonkénti konvergencia: példák

- Példa:
  - $f_n : [0,2] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n$.
  - $$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1, \\ \infty, & x > 1. \end{cases}$$
- Próbáljuk is elképzelni (azaz nézzük meg a mozit):



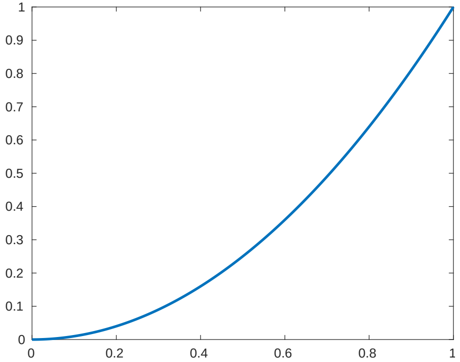
Pontonkénti konvergencia: példák

- Példa:
  - $f_n : [0,2] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n.$
  - $$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1, \\ \infty, & x > 1. \end{cases}$$
- Próbáljuk is elképzelni (azaz nézzük meg a mozit):



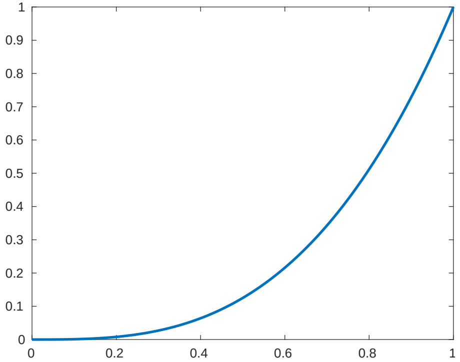
Pontonkénti konvergencia: példák

- Példa:
  - $f_n : [0,2] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n.$
  - $$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1, \\ \infty, & x > 1. \end{cases}$$
- Próbáljuk is elképzelni (azaz nézzük meg a mozit):



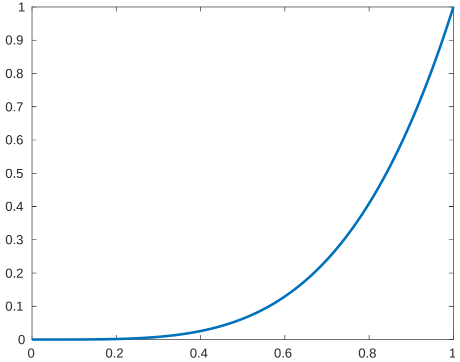
Pontonkénti konvergencia: példák

- Példa:
  - $f_n : [0,2] \to \mathbb{R}, \; f_n(x) = x^n.$
  - $$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1, \\ \infty, & x > 1. \end{cases}$$
- Próbáljuk is elképzelni (azaz nézzük meg a mozit):



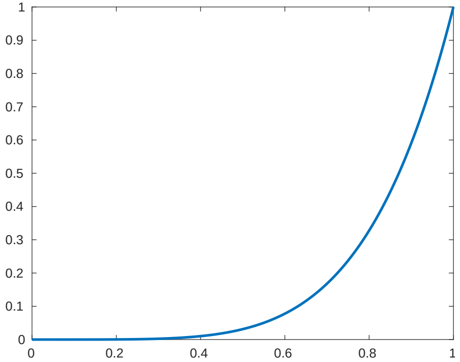
Pontonkénti konvergencia: példák

- Példa:
  - $f_n : [0, 2] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n.$
  - $$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1, \\ \infty, & x > 1. \end{cases}$$
- Próbáljuk is elképzelni (azaz nézzük meg a mozit):



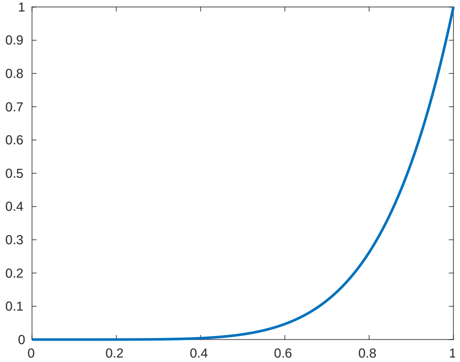
Pontonkénti konvergencia: példák

- Példa:
  - $f_n : [0,2] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n.$
  - $\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1, \\ \infty, & x > 1. \end{cases}$
- Próbáljuk is elképzelni (azaz nézzük meg a mozit):



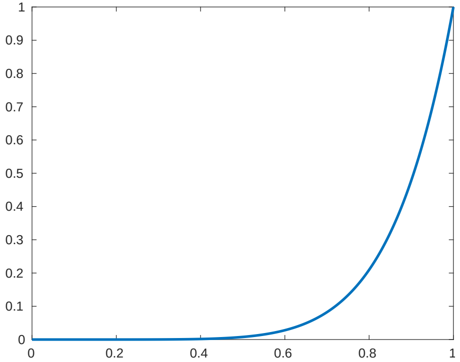
Pontonkénti konvergencia: példák

- Példa:
  - $f_n : [0,2] \to \mathbb{R}, \ f_n(x) = x^n.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1, \\ \infty, & x > 1. \end{cases}$
- Próbáljuk is elképzelni (azaz nézzük meg a mozit):



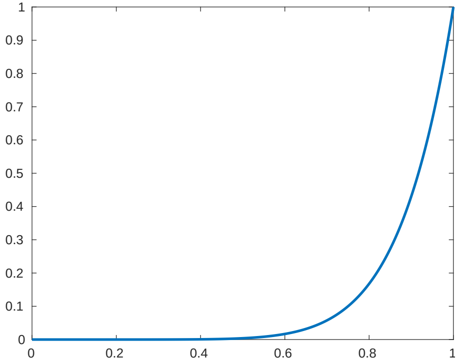
Pontonkénti konvergencia: példák

- Példa:
  - $f_n : [0,2] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n.$
  - $$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1, \\ \infty, & x > 1. \end{cases}$$
- Próbáljuk is elképzelni (azaz nézzük meg a mozit):



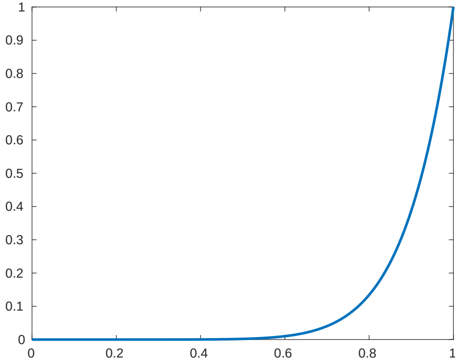
Pontonkénti konvergencia: példák

- Példa:
  - $f_n : [0, 2] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n.$
  - $$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x = 1, \\ \infty, & x > 1. \end{cases}$$
- Próbáljuk is elképzelni (azaz nézzük meg a mozit):



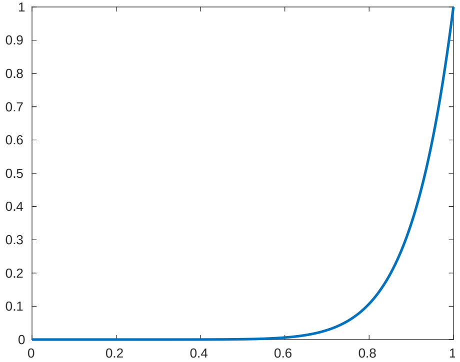
Pontonkénti konvergencia: példák

- Példa:
  - $f_n : [0,2] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n$.
  - $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1, \\ \infty, & x > 1. \end{cases}$
- Próbáljuk is elképzelni (azaz nézzük meg a mozit):



Pontonkénti konvergencia: példák

- Példa:
  - $f_n : [0,2] \to \mathbb{R}, \; f_n(x) = x^n$.
  - $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1, \\ \infty, & x > 1. \end{cases}$
- Próbáljuk is elképzelni (azaz nézzük meg a mozit):



Pontonkénti konvergencia: példák

- Példa - folytatás:
  - most a konvergenciahalmaz $H = [0, 1]$
  - Ezen a halmazon a pontonkénti limesz az
    $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ hozzárendeléssel adott függvény.
  - Összefoglalva: $f_n \to f$ pontonként a $H = [0, 1]$ halmazon.
- Ez furcsa: A függvénysorozat tagjai H-n folytonosak, de a limeszfüggvény nem folytonos $x = 1$-ben.
- Megjegyzés: Most $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} : H \to \mathbb{R}$ monoton csökkenő, azaz
  - minden $x \in H$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$.
  - Röviden így írjuk: $f_{n+1} \leq f_n$ a H halmazon.

- Módosított példa:
  - $f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = (n+1)\cdot x^n.$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} (n+1)\cdot x^n = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ \infty, & x = 1. \end{cases}$
  - most a konvergenciahalmaz $H = [0,1)$.
  - Összefoglalva: $f_n \to f \equiv 0$ pontonként a $H = [0,1)$ halmazon.
- Ez is furcsa:
  - $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (n+1)x^n\,\mathrm{d}x = \frac{n+1}{n+1} = 1.$
  - Ugyanakkor $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

Pontonkénti konvergencia: példák

- Egy másik példa:
  - $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{1}{1+(x-n)^2}$
  - Itt az adott $f_0(x) = \frac{1}{1+x^2}$ függvény grafikonját "tagonként jobbra toljuk 1-gyel".
  - Most minden valós x esetén
  $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+(x-n)^2} = 0.$$
  - Azaz összefoglalva: $f_n \to f \equiv 0$ pontonként $\mathbb{R}$-en.
    - Itt az összes f_n-re: $\max_H f_n = 1$, azonban $\max_H f = 0$.
- Látunk majd jónéhány további példát is.

Egyenletes konvergencia: motiváció és definíció

- Motiváció: követeljük meg azt a konvergenciához, hogy a függvénysorozat tagjainak grafikonjai tetszőlegesen megközelítsék a limeszfüggvény grafikonját!

Definíció (egyenletes konvergencia)

Azt mondjuk, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *függvénysorozat a* H *halmazon egyenletesen tart az* f *függvényhez, ha* $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{H} |f_n - f| = 0$. *Ekkor az* f *függvényt az* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *függvénysorozat (*H *halmazon vett) egyenletes limeszének nevezzük.*

Jelölés: $f_n \hookrightarrow f$ *vagy* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \hookrightarrow f$ *(a* H *halmazon)*

- A feltétel átfogalmazása:
  - Minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan n_0, hogy minden $n > n_0$-ra és minden $x \in H$-ra $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Egyenletes konvergencia: alapelv

Állítás

Ha $f_n \hookrightarrow f$ egyenletesen a H halmazon, akkor ott $f_n \to f$ pontonként is.

Bizonyítás:

- $f_n \hookrightarrow f$ a H halmazon, akkor $|f_n(x) - f(x)| \leq \sup\limits_H |f_n - f|$ miatt
  - minden $x \in H$ pontban $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$.
  - Ez azt jelenti, hogy $f_n \to f$ pontonként a H halmazon. $\square$
- Így használjuk: csak akkor *lehet* f az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat egyenletes limesze, ha pontonkénti limesze.

Egyenletes konvergencia: egy ellenpélda

- Az előző példák ezen definíció feltételeit nem teljesítik.
- Ha $f_n : [0,1) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, akkor csak a nulla lehet az egyenletes limesze.
  - De belátjuk, hogy nem az: most

$$\lim_{n\to\infty} \sup_H |f_n - f| = \lim_{n\to\infty} \sup_H |f_n| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1)} x^n = 1,$$

- Ez tényleg nem nulla, vagyis
  - az $f \equiv 0$ függvény nem egyenletes limesze $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ -nek.
- A többi példa esetére hasonlóan lehet belátni, hogy a pontonkénti limesz nem egyenletes.
  - De azért majdnem az.

Egyenletes konvergencia: ellenpéldából példa

- Az előző példát kicsit átfogalmazzuk.
- Legyen most $f_n : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n$.
  - Ismét csak a nulla lehet az egyenletes limesze,
  - és tényleg az lesz:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_H |f_n - f| = \lim_{n\to\infty} \sup_H |f_n| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} x^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

- Ezzel a szituációval többször találkozunk:
  - $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nem konvergens egyenletesen az I intervallumon,
  - hanem “csak” annak minden korlátos zárt részintervallumán.

Egyenletes konvergencia: ez már "mindent tud"?

- Igen, a következők valóban teljesülnek:

Tétel (egyenletes konvergencia és folytonosság)

Ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \hookrightarrow f$ egyenletesen az I intervallumon és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ minden tagja I-n folytonos, akkor f is az.

Tétel (egyenletes konvergencia és Riemann-integrál)

Ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \hookrightarrow f$ egyenletesen az $[a,b]$ intervallumon és $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ minden tagja $[a,b]$-n Riemann-integrálható, akkor f is az, emellett

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f.$$

Egyenletes konvergencia és folytonosság: bizonyítás

- Tegyük fel, hogy az összes f_n folytonos a $x_0 \in I$ pontban.
- Akkor adott ε-hoz mutatunk olyan $\delta > 0$ számot, hogy $|x - x_0| < \delta$ (és $x \in I$) esetén $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \hookrightarrow f$ egyenletesen $\Rightarrow$ $\varepsilon/3$-hoz van olyan N_0, hogy
  - $N > N_0$-ra minden $x \in I$ esetén $|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon/3$.
- f_N folytonos x_0-ban $\Rightarrow$ $\varepsilon/3$-hoz van olyan δ, hogy
  - $N > N_0$-ra $|x - x_0| < \delta$ (és $x \in I$) esetén $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon/3$.
- Mindent összevetve (háromszög-egyenlőtlenséggel) $|x - x_0| < \delta$ (és $x \in I$) esetén:

$$|f(x)-f(x_0)| \leq |f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(x_0)|+|f_N(x_0)-f(x_0)| <$$

$$\varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \qquad \square$$

Egyenletes konvergencia és Riemann-integrál: bizonyítás

- Első lépés; belátjuk: $\left(\int_a^b f_n\right)_n$ konvergens $\Leftrightarrow$ Cauchy-sorozat.
- Adott ε-hoz van olyan n_0, hogy $n_1, n_2 > n_0$-re:
  - $|f_{n_j}(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2\cdot|I|}$ $j = 1, 2$, így
  - $|f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)| \leq |f_{n_1}(x) - f(x)| + |f(x) - f_{n_2}(x)| \leq \frac{2\varepsilon}{2\cdot|I|} = \frac{\varepsilon}{|I|}$,
  - azaz $\sup_I |f_{n_1} - f_{n_2}| \leq \frac{\varepsilon}{|I|}$.
- A fenti n_0 és $n_1, n_2 > n_0$ esetén:

$$\left|\int_I f_{n_1} - \int f_{n_2}\right| = \left|\int_I f_{n_1} - f_{n_2}\right| \leq \int_I |f_{n_1} - f_{n_2}| \leq \int_I \sup_I |f_{n_1} - f_{n_2}|$$

$$\leq \int_I \frac{\varepsilon}{|I|} = \varepsilon,$$

ami valóban a Cauchy-konvergenciát jelenti.

- Rendezzük át ezt: $-\sup_I |f_n - f| \le f - f_n \le \sup_I |f_n - f|$

$$f_n - \sup_I |f_n - f| \le f \le f_n + \sup_I |f_n - f| \quad \text{(konstansfüggvény)}.$$

- Így tetszőleges Φ felosztáson teljesül:

$$s_{f_n - \sup_I |f_n - f|}(\Phi) \le s_f(\Phi) \le S_f(\Phi) \le S_{f_n + \sup_I |f_n - f|}(\Phi), \quad (*)$$

ahol a Φ_j egyenletes, $\frac{|I|}{j}$ közű felosztásra:

$$s_{f_n - \sup_I |f_n - f|}(\Phi_j) = s_{f_n}(\Phi_j) - s_{\sup_I |f_n - f|}(\Phi_j) =$$

$$= s_{f_n}(\Phi_j) - |I| \cdot \sup_I |f_n - f| \xrightarrow{j \to \infty} -|I| \cdot \sup_I |f_n - f| + \int_I f_n$$

és hasonlóan

$$S_{f_n + \sup_I |f_n - f|}(\Phi_j) \xrightarrow{j \to \infty} |I| \cdot \sup_I |f_n - f| + \int_I f_n.$$

- Vagyis a $(*)$ formulára $\lim\limits_{j\to\infty}$ határértéket alkalmazva:

$$-|I|\cdot\sup_I|f_n-f|+\int_I f_n \le \lim_{j\to\infty} s_f(\Phi_j) \le \lim_{j\to\infty} S_f(\Phi_j) \le |I|\cdot\sup_I|f_n-f|+\int_I f_n.$$

- Most a két szélén $\lim\limits_{n\to\infty}$ határértéket véve

$$\lim_{n\to\infty} -|I|\cdot\sup_I|f_n-f|+\int_I f_n = \lim_{n\to\infty}\int_I f_n$$

$$\lim_{n\to\infty} |I|\cdot\sup_I|f_n-f|+\int_I f_n = \lim_{n\to\infty}\int_I f_n,$$ amelyek egymással egyenlők.

- Így a rendőr-elv miatt

$$\lim_{j\to\infty} s_f(\Phi_j) = \lim_{j\to\infty} S_f(\Phi_j) = \lim_{n\to\infty}\int_I f_n,$$

- amiből követezik, hogy $\int_I f = \lim\limits_{n\to\infty}\int_I f_n.$ $\square$

Egyenletes konvergencia és Riemann-integrál: megjegyzések

- Egyszerűen: "egyenletes konvergencia esetén a limesz és az integrál felcserélhetők".
  - Igen, ez történt: $\lim_{n\to\infty} \int_I f_n = \int_I \lim_{n\to\infty} f_n$,
    - ha $f_n \hookrightarrow f$ az I intervallumon.
- Nem lehetne magát a konvergenciát így értelmezni?

$$f_n \xrightarrow{int} f \text{ az } I \text{ intervallumon} \overset{DEF}{\Longleftrightarrow} \int_I |f - f_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

  - Dehogynem, ez jó ötlet; értelmes,
    - de sem a pontonkénti, sem az egyenletes konvergenciával nem ekvivalens.

Egyenletes konvergencia és deriválhatóság

- Az egyenletes konvergencia erős feltételnek látszik.
- Az is teljesül, hogy ha
  - $f_n : (a, b) \to \mathbb{R}$ mindenütt deriválhatók,
  - $f_n \hookrightarrow f$ az (a, b) intervallumon,
  - akkor tetszőleges $x \in (a, b)$ pontban $f_n'(x) = f'(x)$?
- Sajnos, ez már nem igaz.
- Ellenpélda: $f_n : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$.
  - Világos, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x^2} = |x|$,
    - azaz $f_n \to f$ pontonként $(-1, 1)$-en, ahol $f(x) = |x|$.
  - Sőt, $\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} \le \sqrt{\frac{1}{n}}$ miatt a konvergencia egyenletes.

Egyenletes konvergencia és deriválhatóság

- Itt valóban $f_n'(0) = \frac{1}{2} \cdot \left.\frac{2x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}}\right|_{x=0} = 0,$
  - ugyanakkor f a nullában nem deriválható.
- Szóval összetettebb feltételek kellenek.
- De milyenek; hogy fordulhat a fenti eset elő?
  - f_n' nem konvergál egyenletesen
  - Így nem is biztos, hogy folytonos.
  - Elképzelhető: f_n' pontonkénti limesze nem lehet deriváltfüggvény. nem

Egyenletes konvergencia és deriválhatóság: tétel

Tétel

Legyenek $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ *folytonosan deriválhatók, emellett*

- *tegyük fel, hogy* $\exists\, x_0 \in [a, b] : \ (f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ *konvergens,*
- *tegyük fel, hogy* $f_n' \hookrightarrow g$ *valamilyen* $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *függvényre.*

Ekkor $f_n \hookrightarrow f$ *valamilyen* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *függvényre és* $f' = g$.

Egyenletes konvergencia és deriválhatóság: bizonyítás

- Legyen $f_n(x_0) \xrightarrow{n\to\infty} c$ a feltétel szerint.
- Második feltétel $\Rightarrow g : (a, b) \to \mathbb{R}$ folytonos.
  - Ötlet: mindent integrál alakjában adjunk meg!
- Legyen $f(x) = c + \displaystyle\int_{x_0}^{x} g(s)\,\mathrm{d}s$.
  - Innen: $f'(x) = g(x)$.
- Be kell látni még: $f_n \hookrightarrow f$ az (a, b)-n.
- Newton–Leibniz formula $\Rightarrow f_n(x) = f_n(x_0) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f_n'(s)\,\mathrm{d}s$, így

$$f_n(x) - f(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(s)\,\mathrm{d}s - c - \int_{x_0}^{x} g(s)\,\mathrm{d}s.$$

Egyenletes konvergencia és deriválhatóság: bizonyítás

- Becsüljük meg $f(x)$ és $f_n(x)$ eltérését!

$$|f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x_0) - c| + \left| \int_{x_0}^{x} f_n'(s) - g(s)\,\mathrm{d}s \right| \le$$

$$\le |f_n(x_0) - c| + \int_{x_0}^{x} |f_n'(s) - g(s)|\,\mathrm{d}s \le$$

$$\le |f_n(x_0) - c| + |b - a| \cdot \sup_{s \in (a,b)} |f_n'(s) - g(s)|,$$

- vagyis az x-től való függetlenség miatt

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| \le \lim_{n\to\infty} |f_n(x_0) - c| + |b - a| \cdot \lim_{n\to\infty} \sup_{s \in (a,b)} |f_n'(s) - g(s)|,$$

- ahol a feltételek miatt mindkét tag, így az összeg is nulla. $\square$

Függvénysorok: definíció

Definíció

Adott $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *függvénysorozat esetén a* $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *szimbólumot függvénysornak nevezzük.*

- *Azt mondjuk, hogy ez a* H *halmazon pontonként konvergens, és összege itt* f, *azaz* $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *pontonként, ha*
  - $\left(\sum_{j=0}^{n} f_j\right)_n \to f$ *pontonként* H*-n.*
- *Azt mondjuk, hogy ez a* H *halmazon egyenletesen konvergens, és összege itt* f, *azaz azaz* $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *egyenletesen, ha*
  - $\left(\sum_{j=0}^{n} f_j\right)_n \hookrightarrow f$ *a* H *halmazon.*

Függvénysorok definíciója: megjegyzések

- A pontonkénti sorösszeget ez alapján lehet kiszámítani:
- Az alábbiak ekvivalensek:
  - $\left(\sum_{j=0}^{n} f_j\right)_n \to f$ pontonként a H halmazon.
  - $\left(\sum_{j=0}^{n} f_j(x)\right)_n \to f(x)$ minden $x \in H$ esetén.
  - $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x)$ minden $x \in H$ esetén.
    - Ahol a jobb oldal véges, az összegfüggvény ott értelmezett.

Függvénysorok: első példa

- Ismét a hatványfüggvények:
  - $f_n : [0,2] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$.
  - A pontonkénti függvénysor-összeg az $f(x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} x^j$ képlettel adott.
    - $$\sum_{j \in \mathbb{N}} x^j = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x \in [0,1), \\ \infty, & x \geq 1. \end{cases}$$
  - Így a pontonkénti konvergenciahalmaz $H = [0,1)$.
  - A pontonkénti összeg az $f(x) = \frac{1}{1-x}$ képlettel adott.

Függvénysorok: első példa (folytatás)

- Ismét felmerül a kérdés: ez egyenletes limesz is?
  - Azaz formálisan: $\sum_{j\in\mathbb{N}} x^j = \frac{1}{1-x}$ egyenletesen is $[0,1)$ -en?
  - Másképpen: $\left(\sum_{j=0}^{n} x^j\right)_n \hookrightarrow \frac{1}{1-x}$ egyenletesen is $[0,1)$ -en?
- Azaz ezt kell vizsgálni: $\sup_{x\in[0,1)} \left|\sum_{j=0}^{n} x^j - \frac{1}{1-x}\right| =$

$$= \sup_{x\in[0,1)} \left|\frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x}\right| = \sup_{x\in[0,1)} \frac{x^{n+1}}{1-x} \geq \lim_{x\to 1-} \frac{x^{n+1}}{1-x} = \infty.$$

- Emiatt $\sup_{x\in[0,1)} \left|\sum_{j=0}^{n} x^j - \frac{1}{1-x}\right| \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, ami nem nulla,
- tehát a limesz nem egyenletes.

Függvénysorok: első példa kis változtatással

- Ha szűkítjük H-t, akkor egyenletes limesz lesz?
  - Azaz formálisan: $\sum_{j\in\mathbb{N}} x^j = \frac{1}{1-x}$ egyenletesen is $[0,\frac{1}{2}]$ -en?
- Az előző alapján ezt kell vizsgálni:

$$\sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]}\left|\sum_{j=0}^{n} x^j - \frac{1}{1-x}\right| = \sup_{x\in[0,\frac{1}{2}]} \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

- Emiatt $\sup_{x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]}\left|\sum_{j=0}^{n} x^j - \frac{1}{1-x}\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, ami nulla,
- tehát a limesz most $[0,\frac{1}{2}]$-on egyenletes.
  - Ugyanez lett volna a végeredmény, ha $\frac{1}{2}$ helyett tetsz. $b \in (-1,1)$-et veszek.

Folytonosság és Riemann-integrál függvénysorokra

- Átfogalmazzuk a függvénysorozatokra érvényes állításokat.
  - Nekünk függvénysorokra vonatkozók kellenek:
  - Tudjuk, hogy $\sum_{j=1}^{n} \int_I f_j = \int_I \sum_{j=1}^{n} f_j$,
    - ha $f_j : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrálhatók ($j = 1, 2, \ldots, n$).
  - Igaz ez akkor is ha "végtelen összeget", azaz sort tekintünk?
  - Hasonló kérdés deriváltakra is.
- Mindenhol ezt használjuk:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \text{ sor konvergens} \overset{\text{DEF}}{\Leftrightarrow} \left(\sum_{j=1}^{n} f_j \right)_n \text{ sorozat konvergens}$$

Folytonosság és Riemann-integrál függvénysorokra

Tétel (egyenletes konvergencia és folytonosság)

Ha $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n = f$ *egyenletesen az* I *intervallumon és* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *minden tagja* I*-n folytonos, akkor* f *is az.*

Tétel (egyenletes konvergencia és Riemann-integrál)

Ha $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n = f$ *egyenletesen az* $[a,b]$ *intervallumon és* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *minden tagja* $[a,b]$*-n Riemann-integrálható, akkor* f *is az, emellett*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_a^b f_n = \int_a^b f\,.$$

Bizonyítás (folytonosság):

- $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n = f$ egyenletesen $\overset{\text{DEF}}{\Leftrightarrow}$ $\left(\sum_{j=0}^{n} f_j\right)_n \hookrightarrow f$ egyenletesen,
  - ahol a sorozat is I-n folytonos függvényekből áll,
- így egyenletes limesze szintén folytonos I-n.
- Azaz f folytonos I-n. $\square$

Bizonyítás (Riemann-integrálok):

- $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n = f$ egyenletesen $\overset{\text{DEF}}{\Leftrightarrow}$ $\left(\sum_{j=0}^{n} f_j\right)_n \hookrightarrow f$ egyenletesen,
  - vagyis a sorozat tagjainak integráljaira
$$\left(\sum_{j=0}^{n} \int_I f_j\right)_n = \int_I \left(\sum_{j=0}^{n} f_j\right)_n \xrightarrow{n\to\infty} \int_I f,$$
- ahol a bal és jobb oldalt összevetve (sorösszeg definíciója!!)
- $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_I f_j = \int_I f = \int_I \sum_{n\in\mathbb{N}} f_j. \quad \square$
  - Utolsó egyenlőség formálisan: Egyenletes konvergencia esetén
    - a sorösszeg és az integrál felcserélhetők,
    - szabad tagonként integrálni.

- A fenti tétel $[a, b]$ helyett
  - $[a, x]$-re is igaz, ha $x \in [a, b]$.
- Így az $x \to \int_a^x f_n =: F_n(x)$, $x \to \int_a^x f =: F(x)$ függvényekre:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} F_n(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_a^x f_n = \int_a^x \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n = \int_a^x f = F.$$

- De ezek az eredeti függvények (bizonyos) primitív függvényei!
- Tehát a tétel feltételeivel:
  - Bizonyos (??) primitív függvények összege az összeg primitív függvénye.

Deriválhatóság függvénysorokra

Tétel

Legyenek $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ *folytonosan deriválhatók, emellett*

- *tegyük fel, hogy* $\exists\, x_0 \in [a, b] : \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x_0)$ *konvergens,*
- *tegyük fel, hogy* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n' = g$ *egyenletesen valamilyen* $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *függvényre.*

Ekkor $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n = f$ *egyenletesen valamilyen* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *függvényre*

- *és* $\left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n\right)' = f' = g = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n'$

Deriválhatóság függvénysorokra: megjegyzés és bizonyítás

- Ha a tétel feltételei teljesülnek:
  - a sorösszeg és a deriválás felcserélhetők,
  - szabad tagonként deriválni.

A tétel bizonyítása:

- A feltételek részletösszeg sorozatokra:
  - $\exists\, x_0 \in [a, b] : \left(\sum_{j=0}^{n} f_j\right)_n (x_0)$ konvergens,
  - $\left(\sum_{j=0}^{n} f_j'\right)_n \hookrightarrow g$ egyenletesen, ahol $g : (a, b) \to \mathbb{R}$
- Erre alkalmazható a függvénysorozatokról szóló tétel.

Deriválhatóság függvénysorokra: bizonyítás (folyt.)

- Azaz $\left(\sum_{j=0}^{n} f_j\right)_n \hookrightarrow f$ valamilyen $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ függvényre.
  - Ismét sor alakba írva:

    $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n = f$ egyenletesen valamilyen $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ függvényre.
- Azaz $f' = g$.
  - Ezzel készen vagyunk. $\square$

- Egyelőre a legegyszerűbb, de lesznek még.
- Ebből indulunk: $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n = \frac{1}{1-x}$ egyenletesen $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$-on.
- A Riemann-integrálokra vonatkozó tétel szerint:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^n \,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{n\in\mathbb{N}} x^n \,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} \,\mathrm{d}x$$

- A bal oldal: $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}} 2\cdot\frac{1}{2^{2k+1}}\frac{1}{2k+1} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{2k}}\cdot\frac{1}{2k+1}$
- A jobb oldal: $\left[-\ln(1-x)\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \ln 2 + (\ln 3 - \ln 2) = \ln 3.$

Tagonkénti deriválás és integrálás: példa (foly.)

- Most a primitív függvényre:
- Ebből indulunk: $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n = \frac{1}{1-x}$ egyenletesen $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$-on.
- A Riemann-integrálokra vonatkozó tétel szerint:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int x^n \,\mathrm{d}x = \int \sum_{n\in\mathbb{N}} x^n \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1-x} \,\mathrm{d}x$$

- A bal és jobb oldal összevetésével:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-x).$$

  - Csak $|x| < 1$ esetén biztosított ez.
  - Mindkét primitív függvényt nullától vett integrálással kaptuk.

Összefoglalás, motiváció a továbbiakhoz

- Függvénysorok egyenletes konvergenciája esetén:
  - Folytonosság az összegre öröklődik.
  - Riemann-integrálhatóság az összegre öröklődik.
  - Szabad tagonként integrálni.
  - Extra feltételekkel szabad tagonként deriválni.
- Ez igazán szép.
- De milyen (egyszerű) módon ellenőrizhetjük, hogy a függvénysor tényleg egyenletesen konvergens?
- Erre vonatkozó feltételt adunk.

Feltétel egyenletes konvergenciához

Tétel (Weierstraß-kritérium)

Ha egy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *függvénysorozat tagjaira* $\mathcal{D}_{f_n} \supset H$ *és*

- $\sup\limits_{H} |f_n| \leq a_n$, *ahol* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *konvergens,*

akkor

- $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *egyenletesen konvergens a* H *halmazon.*

Bizonyítás: Először belátjuk, hogy H-n pontonként konvergens.

- Tudjuk: tetszőleges $x \in H$, $n \in \mathbb{N}$ esetén $|f_n(x)| \leq a_n$:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \text{ konvergens} \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| \text{ konvergens} \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \text{ konvergens}$$

- Legyen akkor $f(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$.
  - Ez lesz a pontonkénti limeszfüggvény H-n.

Feltétel egyenletes konvergenciához (bizonyítás folyt.)

- Belátjuk: f egyenletes limesz is H-n. Most minden $x \in H$-ra:

$$\left| f(x) - \sum_{j=0}^{n} f_j(x) \right| \overset{\text{DEF}}{=} \left| \sum_{j=0}^{\infty} f_j(x) - \sum_{j=0}^{n} f_j(x) \right| = \left| \sum_{j=n+1}^{\infty} f_j(x) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=n+1}^{\infty} |f_j(x)| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j, \text{ így teljesül az is, hogy}$$

$$\sup_H \left| f(x) - \sum_{j=0}^{n} f_j(x) \right| \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j.$$

- Mindkét oldal határértékét véve

$$\lim_{n\to\infty} \sup_H \left| f(x) - \sum_{j=0}^{n} f_j(x) \right| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{j=n+1}^{\infty} a_j = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j - \sum_{j=0}^{n} a_j \right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} a_j - \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} a_j \overset{\text{DEF}}{=} 0.$$

- ami definíció az $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n = f$ egyenletes konvergenciát jelenti a H halmazon. $\square$

Weierstraß-kritérium: előnyök, példák

- A kritérium feltétele: $\sup_H |f_n| \leq a_n$, ahol $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konvergens:
  - Függvényértékek becslése és numerikus sor konvergenciájának ellenőrzése.
- Első példa: $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ konvergenciája $H = [-b, b]$-n,
  - ahol $b \in (0, 1)$.
  - Most $|f_n(x)| = |x^n| \leq b^n$,
    - ahol $b \in (0, 1)$.
    - Itt $\sum_{n\in\mathbb{N}} b^n = \frac{1}{1-b}$, ha $b \in (0, 1)$.
  - Így a feltételek teljesülnek.
  - Azaz $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n = \frac{1}{1-x}$ egyenletesen a $H = [-b, b]$ halmazon.

Weierstraß-kritérium: példák (folyt.)

- Szabad ezt tagonként deriválni?
- Ellenőrizzük a feltételeket!
  - Azt tudjuk, hogy $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$ pontonként (is) konvergens.
  - A deriváltakból álló függvénysor: $\sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1)\cdot x^n$.
    - x-től független felső becslés: $|(n+1)\cdot x^n| \leq (n+1)\cdot b^n$.
    - Itt $\sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1)\cdot b^n$ konvergens, mert a hányadoskritériummal

      $$\frac{(n+2)\cdot b^{n+1}}{(n+1)\cdot b^n} = b\cdot\frac{n+2}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} b < 1.$$
    - Weierstraß-kritérium teljesül $\Rightarrow$

  $\sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1)\cdot x^n$ egyenletesen konvergens H-n.

Weierstraß-kritérium: példák (folyt.)

- Így szabad ezt tagonként deriválni, azaz
  - $$\sum_{n\in\mathbb{N}}(n+1)\cdot x^n = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$
    - amely $x < b$ esetén teljesül biztosan.
  - A következő elméletben (hatványsorok) ezt kell csak általánosítani.

Weierstraß-kritérium: további példák

- Egy trigonometrikus Fourier-sor: $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2}$.
- Most $|f_n(x)| = \left|\frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2}\right| \le \frac{1}{(n+1)^2}$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.
- Tudjuk: $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(n+1)^2} < \infty$,
  - így a Weierstraß-kritérium teljesül.
- Azaz kaptuk: $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2}$ egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$-en.

Weierstraß-kritérium: további példák

- A fenti trigonometrikus Fourier-sort szabad tagonként deriválni?
  - $$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\right)' \stackrel{?}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\cos(n+1)x}{n+1}.$$
- Ellenőrizni kell, hogy a deriváltakból kapott sor is egyenletesen konvergens-e.
  - Most $\left|\frac{\cos(n+1)x}{n+1}\right| \leq \frac{1}{n+1}$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.
  - Itt azonban $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1} = \infty$,
  - így a Weierstraß-kritérium feltételei nem teljesülnek.
- Az eddigi elmélet alapján itt tagonkénti deriválhatóságot nem tudunk garantálni.

Weierstraß-kritérium: példa kis változtatással

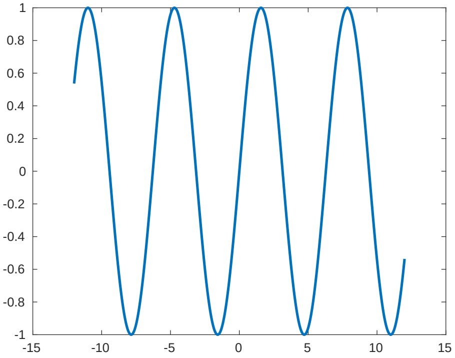
- Hogy módosítsuk az előzőt, hogy tagonkénti deriválhatóságot is kapjunk?
  - Legyen ez: $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^3}$.
- A nevezőben $n+1$ hatványa mindig eggyel nő:
  - A deriváltfüggvények összegére is egyenletes konvergenciát kapunk.
- Azaz ezt már szabad tagonként deriválni.

Weierstraß-kritérium: példa másik kis változtatással

- Hogy módosítsuk az előzőt, hogy az egyenletes konvergenciát is elveszítsük?
  - Legyen ez: $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sin(n+1)x}{n+1}$.
- Most $|f_n(x)| = \left|\frac{\sin(n+1)x}{n+1}\right| \leq \frac{1}{n+1}$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.
- Tudjuk: $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1} = \infty$,
  - így a Weierstraß-kritérium nem teljesül.
  - Vagyis az egyenletes konvergenciát, így az összeg folytonosságát sem tudjuk garantálni.
  - Sőt, azt sem látjuk, mi lesz a konvergenciahalmaz.

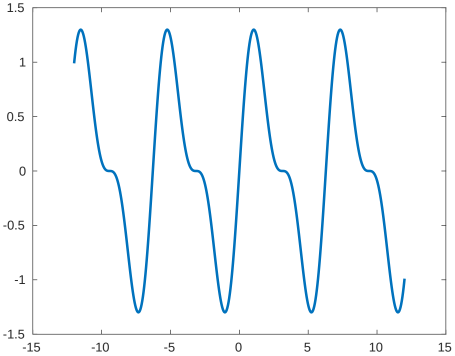
Az újabb példa: mozi ismét

- Legyen $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sin(n+1)x}{n+1}$.
  - Nézzük a részletösszeg-sorozat első tagjait!



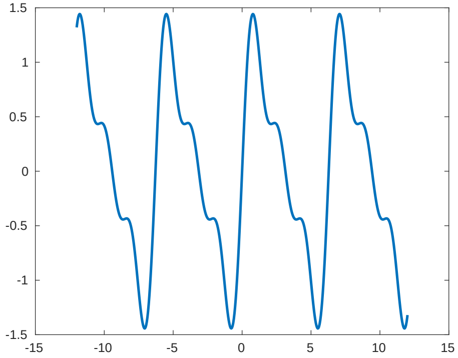
Az újabb példa: mozi ismét

- Legyen $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sin(n+1)x}{n+1}$.
  - Nézzük a részletösszeg-sorozat első tagjait!



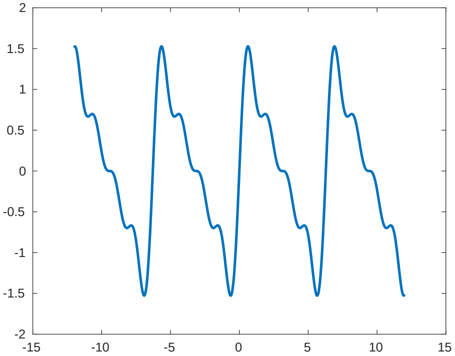
Az újabb példa: mozi ismét

- Legyen $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sin(n+1)x}{n+1}$.
  - Nézzük a részletösszeg-sorozat első tagjait!



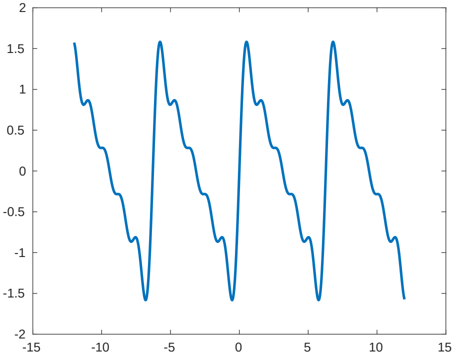
Az újabb példa: mozi ismét

- Legyen $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sin(n+1)x}{n+1}$.
  - Nézzük a részletösszeg-sorozat első tagjait!



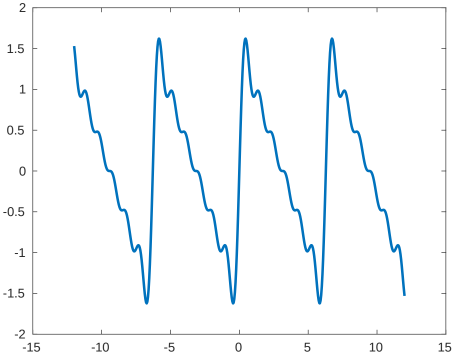
Az újabb példa: mozi ismét

- Legyen $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sin(n+1)x}{n+1}$.
  - Nézzük a részletösszeg-sorozat első tagjait!



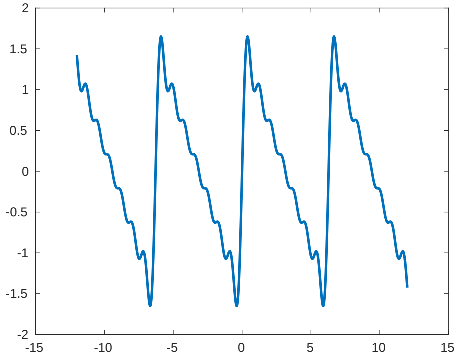
Az újabb példa: mozi ismét

- Legyen $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sin(n+1)x}{n+1}$.
  - Nézzük a részletösszeg-sorozat első tagjait!



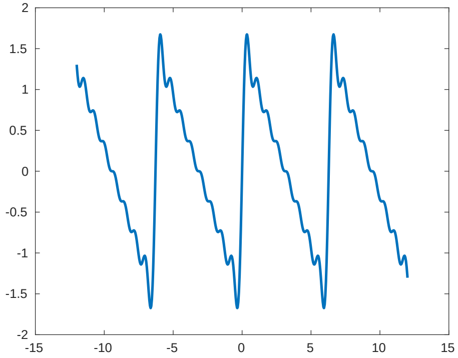
Az újabb példa: mozi ismét

- Legyen $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sin(n+1)x}{n+1}$.
  - Nézzük a részletösszeg-sorozat első tagjait!



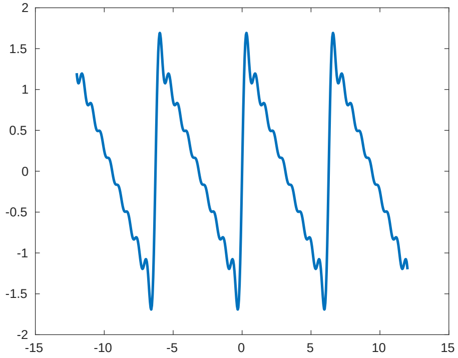
Az újabb példa: mozi ismét

- Legyen $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sin(n+1)x}{n+1}$.
  - Nézzük a részletösszeg-sorozat első tagjait!



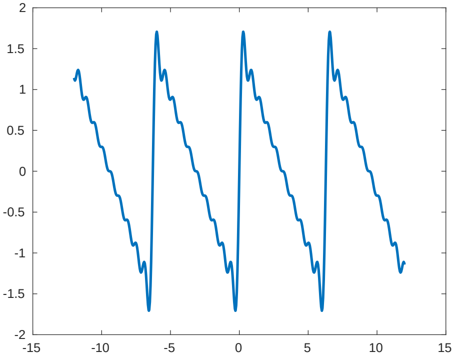
Az újabb példa: mozi ismét

- Legyen $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sin(n+1)x}{n+1}$.
  - Nézzük a részletösszeg-sorozat első tagjait!



Az újabb példa: mozi ismét

- Legyen $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\sin(n+1)x}{n+1}$.
  - Nézzük a részletösszeg-sorozat első tagjait!



Függvénysorok: speciális esetek

- A fenti példákat a Fourier-analízis tárgyban folytatjuk.
- Most hatványfüggvényekből álló sorokat vizsgálunk részletesen.
  - Pontosan ilyeneket:

Definíció

Adott $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ és $x_0 \in \mathbb{R}$ esetén a $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n$ alakú függvénysort hatványsornak nevezzük.

- Most $f_n(x) = a_n \cdot (x-x_0)^n$.
- Itt x_0 csak egy eltolásparaméter.
- Főként erre vagyunk kíváncsiak:
  - $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ függvényében hogyan viselkedik függvénysor?

Hatványsorok vizsgálata: előkészítés

- Láttunk már ilyet: $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n$.
  - Most $x_0 = 0$ és $a_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Tétel (Módosított gyökkritérium)

Legyen $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tetszőleges.

(i) *Ha* $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} < 1$,

- *akkor* $\sum_{j\in\mathbb{N}} c_j$ *abszolút konvergens.*

(ii) *Ha* $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} > 1$,

- *akkor* $\sum_{j\in\mathbb{N}} c_j$ *divergens.*

Hatványsorok vizsgálata: előkészítés

- Ezt a verziót nem igazoljuk.
- Minek ez a bonyolult alak?
  - Egyrészt, hogy a következő tételt egyszerű legyen kimondani.
  - Lehet $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ilyen: 0,1,0,1,0,1 ...
  - Ennek határértéke nincs, azzal nem tudjuk jellemezni.
- Fontos jelölés: $r = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$.
  - Elnevezés: konvergenciasugár (azonnal látjuk, miért).
  - Ez mindig létezik.
  - Lehet (sőt szokott lenni) ∞ vagy 0 is.

Hatványsorok vizsgálata: a fő állítás.

Tétel (Cauchy–Hadamard)

Ha a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n$ *hatványsorból konvergenciasugara* r *és*

(i) $|x-x_0|<r$, *akkor a hatványsor* x*-ben konvergens.*

(ii) $|x-x_0|>r$, *akkor a hatványsor* x*-ben divergens.*

- Mi történik $|x-x_0|=r$ esetén?
  - Általában nem lehet megmondani.
  - De ez csak két pont; azokra külön vizsgálni kell a konvergenciát.
- Keresztkérdés: Lehet, hogy sehol sem konvergens?
  - Ilyen nincs: $x=x_0$ esetén biztos az.

Hatványsorok vizsgálata: Cauchy–Hadamard-tétel bizonyítása

- Legyen $|x - x_0| < r$.
- Módosított gyökkritérium a hatványsor tagjaira:

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n \cdot (x - x_0)^n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \sqrt[n]{|(x - x_0)^n|} =$$

$$= \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x - x_0| < \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \cdot r =$$

$$\overset{\text{DEF}}{=} \frac{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = 1,$$

- vagyis a kritérium szerint most a sor konvergens.

Cauchy–Hadamard-tétel bizonyítása (folyt.)

- Legyen $|x - x_0| > r$.
- Módosított gyökkritérium a hatványsor tagjaira:

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n \cdot (x - x_0)^n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \sqrt[n]{|(x - x_0)^n|} =$$

$$= \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x - x_0| > \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \cdot r =$$

$$\overset{\text{DEF}}{=} \frac{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = 1,$$

- vagyis a kritérium szerint most a sor divergens. $\square$

Cauchy–Hadamard-tétel: 1. példa

- Vizsgáljuk a következő hatványsort: $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{(n+1)^2}$.
- Most $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$, így
  - $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{\frac{1}{(n+1)^2}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)^2}} = 1.$
  - Ekkor $r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = 1.$
- Így $x_0 = 0$ miatt
  - $|x - x_0| = |x| < 1$ esetén a sor konvergens,
  - $|x - x_0| = |x| > 1$ esetén a sor divergens.

Cauchy–Hadamard-tétel: 1. példa (folyt.)

- Az $|x| = 1$ eset:
  - Ha $x = 1$, akkor $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{(n+1)^2} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{(n+1)^2}$.
  - Ez konvergens.
  - Ha $x = -1$, akkor $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{(n+1)^2} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$.
  - Ez is konvergens (mert abszolút konvergens).
- Összefoglalva: mind $x = 1$, mind $x = -1$ esetén konvergens a fenti hatványsor.
  - Így konvergenciahalmaza $[-1, 1]$.

Cauchy–Hadamard-tétel: 2. példa

- Vizsgáljuk a következő hatványsort: $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n+1}$.
- Most $a_n = \frac{1}{n+1}$, így
  - $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{\dfrac{1}{n+1}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}} = 1.$
  - Ekkor $r = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = 1.$
- Így $x_0 = 0$ miatt
  - $|x - x_0| = |x| < 1$ esetén a sor konvergens
  - $|x - x_0| = |x| > 1$ esetén a sor divergens.

Cauchy–Hadamard-tétel: 2. példa (folyt.)

- Az $|x| = 1$ eset:
  - Ha $x = 1$, akkor $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n+1}$.
  - Ez divergens.
  - Ha $x = -1$, akkor $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n+1}$.
  - Ez konvergens (Leibniz-típusú).
- Összefoglalva: $x = 1$ esetén divergens, $x = -1$ esetén konvergens a fenti hatványsor.
  - Így konvergenciahalmaza $[-1, 1)$.

- Vizsgáljuk a következő hatványsort: $\sum_{n\in\mathbb{N}} n \cdot x^n$.
- Most $a_n = n$, így
  - $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1}$.
  - Ekkor $r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = 1$.
- Így $x_0 = 0$ miatt
  - $|x - x_0| = |x| < 1$ esetén a sor konvergens
  - $|x - x_0| = |x| > 1$ esetén a sor divergens.

- Az $|x| = 1$ eset:
  - Ha $x = 1$, akkor $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} n \cdot x^n = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} n$.
  - Ez divergens.
  - Ha $x = -1$, akkor $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} n \cdot (-1)^n$.
  - Ez divergens (mert tagjai nem tartanak nullához).
- Összefoglalva: mind $x = 1$, mind $x = -1$ esetén divergens a fenti hatványsor.
  - Így konvergenciahalmaza $(-1, 1)$.

Cauchy–Hadamard-tétel: 4. példa

- Vizsgáljuk a következő hatványsort: $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$.
  - Tudjuk, hogy pontonként az összege: e^x.
- Most $a_n = \frac{1}{n!}$, így
  - $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}} = \frac{1}{\infty} = 0.$
  - Ekkor $r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{0} = \infty.$
- Így a sor $|x - x_0| < \infty$ esetén,
  - azaz minden $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens.
- Másik ötlet a konvergenciasugár meghatározásához:
  - Minden x-re konvergens $\Rightarrow$ konvergenciasugár csak ∞ lehet.

Hatványsorok: további kérdések

- Egy keresztkérdés: lehet egy hatványsor konvergenciahalmaza $(0,1) \cup (2,3)$?
  - Nem, az mindig egy intervallum; középpontja x_0.
- Ez eddig szép elmélet, de
  - szeretnénk tagonkénti deriválással, integrálással új hatványsorokat kapni.
  - Ehhez ismerünk kell, hol egyenletesen konvergensek.

Hatványsorok: további állítások

Tétel (hatványsorok egyenletes konvergenciája)

Ha egy $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n$ *hatványsor konvergenciasugara* r, *akkor az tetszőleges* $r_0 < r$ *esetén az* $[x_0 - r_0, x_0 + r_0] = H$ *intervallumon egyenletesen is konvergens.*

Bizonyítás: Ellenőrizzük a Weierstraß-kritériumot.

- Ha $x \in H$, akkor $|x - x_0| \leq r_0$,
- emiatt $|f_n(x)| = |a_n(x-x_0)^n| \leq |a_n| \cdot r_0^n$.
- Most a $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \cdot r_0^n$ numerikus sorra a gyökkritériumot alkalmazva:

- $\limsup \sqrt[n]{|a_n| \cdot r_0^n} = r_0 \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{r_0}{r} < 1$,
  - így a numerikus sor konvergens.
- A Weierstraß-kritérium tehát teljesült a H halmazon,
  - így ott a hatványsor tényleg egyenletesen konvergens. $\square$
- Következmények:
  - Egy hatványsor összege (összegfüggvénye) az $(x_0 - r, x_0 + r)$ halmazon folytonos.
  - Egy hatványsor esetén az $[a, b] \subset (x_0 - r, x_0 + r)$ halmazon vett integrálás és az összegzés felcserélhető, vagyis
    - az összegfüggvényt ilyen halmazon szabad tagonként integrálni.

Hatványsorok egyenletes konvergenciája: megjegyzések

- Komoly különbség:
  - "Egy függvénysor egyenletesen konvergens az I intervallumon."
  - "Egy függvénysor egyenletesen konvergens az I intervallum minden korátos, zárt részintervallumán."
- Példák: $\sin, \exp, x \mapsto \frac{1}{1-x}, \ldots$
  - Egy animáció a sin függvény részletösszeg-közelítéséről.
- Keresztkérdés:

  Látszik ránézésre, hogy exp nulla körüli hatványsora nem tart exp-hez egyenletesen *az egész* $\mathbb{R}$ halmazon?

  - Igen: részletösszeg - polinom; limesz - exponenciálisan növő.

    Különbségük szuprémuma $\mathbb{R}$-en mindig ∞.

Hatványsorok tagonkénti deriválása

- Ehhez tudnunk kellene:
  - a tagok deriváltjaiból alkotott sor hol egyenletesen konvergens.

Állítás

Az eredeti $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x-x_0)^n$ *hatványsor és a tagonkénti deriválással kapott* $\sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1)\cdot a_{n+1}(x-x_0)^n$ *hatványsor konvergenciasugara megegyezik.*

- Nem bizonyítjuk (kicsit technikás, de nem nehéz).
- Következmény:
  - Egy hatványsor esetén az $[a,b]\subset(x_0-r,x_0+r)$ halmazon vett deriválás és az összegzés felcserélhető, vagyis
    - az összegfüggvényt ilyen halmazon szabad tagonként deriválni.

Hatványsorok tagonkénti deriválása: egyszerűbben

- Két egyszerű észrevétel:
  - Ha $[a, b] \subset (x_0 - r, x_0 + r)$ tetszőleges, akkor minden $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ benne van egy ilyen intervallumban.
  - Ha egyszer szabad tagonként deriválni, és a konvergenciasugár ugyanaz marad, akkor ez ismételhető.
- Ezek nyomán kapjuk:

Állítás

Az $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (x - x_0)^n$ hatványsor konvergencia-intervallumának belsejében, azaz $(x_0 - r, x_0 + r)$-ben mindenhol akárhányszor deriválható, és bármilyen rendű derivált tagonként számolható.

Hatványsorok tagonkénti deriválása: megjegyzések

- A gyakorlatban éppen ezekre van szükségünk.
  - Egy függvény hatványsor-előállítását keressük.
  - Ha egy másik függvényét ismerjük, akkor abból kaphatjuk.
- Példa: Milyen hatványsor (és hol) állítja elő az $x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2}$ függvényt?

$$\frac{1}{(x-1)^2} = \left(-\frac{1}{x-1}\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' =$$

$$= \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n\right)' = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x^n)' = \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1)\cdot x^n$$

  - A konvergenciasugár nem változik: itt is $r = 1$.

Hatványsorok konstrukciója: egyéb műveletek

- Természetesen szabad hatványsorokat összeadni is:
  - $f_1(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cdot x^n, \; f_2(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \cdot x^n$ esetén,
    - azaz, ha x a konvergenciahalmazok metszetében van, akkor

    $$f_1 + f_2(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) \cdot x^n,$$

  - ugyanis minden rögzített x-re a numerikus sorok öszeadásáról szóló tételt használjuk.
- Számmal is szabad szorozni őket.
- Sőt helyettesíteni is szabad,
  - de csak $z = ax + b$ esetén kapunk ismét hatványsort.
  - A konvergenciasugár ezzel változhat!

- Példák helyettesítésre:

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-z)^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n z^n \quad (\text{itt } x = -z).$$

$$e^{-z^2} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-z^2)^n}{n!} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{n!} \quad (\text{itt } z^2 = x).$$

$$\frac{1}{1-\frac{z}{3}} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{z}{3}\right)^n \quad (\text{itt } x = \tfrac{z}{3}).$$

  - Itt a konvergenciahalmaz: $\frac{z}{3} \in (-1,1) \Leftrightarrow z \in (-3,3)$.

$$\frac{1}{4+z} = \frac{1}{1-(-3-z)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-3-z)^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n (3+z)^n$$

(itt $x = -3-z$).

Hatványsorok konstrukciója: egyéb műveletek; példák (folyt.)

- Példa összeadásra:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x} =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n + \frac{1}{2}\cdot\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{2}\cdot(1+(-1)^n)x^n = \sum_{k\in\mathbb{N}} x^{2k}$$

- Ezt is lehetett volna helyettesítéssel: $z = x^2$.

Hatványsorok konstrukciója: primitív függvény

- A formulák egyszerűsítése: csak nulla közepű hatványsorokra vizsgáljuk.
  - Helyettesítéssel minden eset visszavezethető erre.
- Ezt tudjuk: $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ esetén
  - $z < r \Rightarrow \int_0^z f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \int_0^z x^n\,\mathrm{d}x$
- Emiatt f *azon* F *primitív függvényére, amelyre* $F(0) = 0$:
  - $F(z) = F(z) - F(0) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}.$
- Példa: következik majd.

Hatványsorok konstrukciója: Cauchy-szorzat

Állítás

- *Két hatványsor Cauchy-szorzata ismét egy hatványsor.*
- *Ha x mindkét konvergenciahalmaznak belső pontja, akkor x-ben a Cauchy-szorzat is konvergens,*
  - *és a Cauchy-szorzat összege az egyes összegek szorzata.*

Bizonyítás:

- $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ és $\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n x^n$ Cauchy-szorzatának k-adik tagja:

  $(a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \cdots + a_0 b_k) x^k$;
  - ezen tagokból tényleg hatványsort kapunk.
- Ez a Mertens tétel alkalmazása: a konvergenciahalmaz belsejében levő x-ek esetén mindkét hatványsor abszolút konvergens. $\square$

- Már szerepelt példa:
  - $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$
- Másik szép példa:
  - $\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$
  - Nem számoljuk végig.

Hatványsorok és Taylor-sorok: kapcsolat

- Ha egy f valós függvényt egy hozzá tartozó Taylor-sor előállít a H halmazon,
  - akkor az ott egy pontonként konvergens hatványsor.
- Fordítva, ha $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(x - x_0)^n$ a H nyílt intervalumon,
  - akkor a tagonkénti deriválhatóság miatt $x \in H$ esetén
    $$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot (n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)) \cdot (x - x_0)^{n-k},$$
    vagyis $f^{(k)}(x_0) = a_k \cdot k! \Rightarrow a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.
  - Kaptuk:
    - a hatványsor csak a vele azonos középű Taylor-sor lehet.
- Tehát a hatványsor egyértelmű is.

- Először keresztkérdés:

  Minden folytonos $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény előáll valamilyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumon hatványsor alakban?

  - Nem; ez csak akkor képzelhető el, ha f az I-n akárhányszor deriválható.
  - De akkor tényleg előáll így?
  - Nem, ha ugyanis $f : I \to \mathbb{R}$ olyan, hogy a Taylor-sora nem állítja elő az x_0 ponton kívül sehol sem, akkor a vele megegyező hatványsora sem állítja elő.

    A klasszikus példa: $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

    Most minden $k \in \mathbb{N}$-re: $g^{(k)}(0) = 0$, azaz

    - $x_0 = 0$ körüli Taylor-sora azonosan nulla.

Hatványsorok: egy fontos kapcsolódó fogalom

- Mégis fontos függvényosztály, amely előállítható hatványsor alakban:

Definíció

Azt mondjuk, hogy az f valós függvény az I nyílt intervallumon analitikus, ha ott előáll egy hatványsor összegfüggvényeként (azaz ha van olyan $x_0 \in I$ és $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, hogy minden $x \in I$ esetén $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cdot (x - x_0)^n$).

- Kiderül, hogy a deriválható komplex függvények automatikusan ilyen típusúak $\mathbb{C}$-ben.
- Fontos parciális differenciálegyenletek megoldásai is ilyenek lesznek.

Hatványsorok: utolsó kis témakör

- A konvergenciahalmaz határán vett viselkedést elemezzük.
- Az eddigi elmélet szerint:
  - Egy hatványsor összegfüggvénye a konvergenciahalmaz belső pontjaiban biztos folytonos függvény.
- A konvergenciahalmaz határán mit mondhatunk?

  Lehet, hogy ott is konvergens a hatványsor, ugyanakkor az összeg nem folytonos ott? NEM!!

Tétel (Abel folytonossági tétele)

Tegyük fel, hogy az $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot (x - x_0)^n$ *hatványsor* r *konvergenciasugara véges, valamint, hogy* $x - x_0 = r$ *esetén* $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot r^n$ *konvergens. Ekkor az összegfüggvény az* $x = x_0 + r$ *pontban is (balról) folytonos.*

Abel folytonossági tétele: megjegyzések, példák

- A tételt nem bizonyítjuk (jegyzetben megtalálható).
- $r = \infty$ esetén nem is lenne értelme.
- Alkalmazásának elve:
  - Adott egy $f : [s_1, s_2] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amelyre $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot (x - x_0)^n$, ha $x \in (s_1, s_2)$.
  - Ha a hatványsor s_2-ben is konvergens, akkor igaz:
    - $f(s_2) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot (s_2 - x_0)^n$.
    - Vagyis ott is elő kell állítania az f függvényt.
  - Hogyhogy nem tudok eleve $[s_1, s_2]$-n konvergenciát?
    - Lehet, hogy olyan levezetéssel kaptuk, ahol egy szűkebb konvergenciahalmazból indultunk.

Abel folytonossági tétele: példa

- Konstruáljuk meg az $x \to \ln 1 + x$ hozzárendeléssel megadott függvény hatványsor-alakját!
- Lehet, hogy ez mindenhol (azaz a $(-1, \infty)$-on előállítja a fenti függvényt?
  - Nem, ennek se véges r, se $r = \infty$ nem lehet a konvergenciasugara (úgy is mondhatjuk, semmilyen $x_0$ra nem szimmetrikus).
- A hatványsorok tagonkénti primitív függvényét használva:

$$\ln 1 + x = \int \frac{1}{1+x} = \int \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot x^n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot x^{n+1}$$

  - Itt tényleg $\ln 1 + x\big|_{x=0} = 0$, ahogy a feltételben szerepelt.

Abel folytonossági tétele: példa (folyt.)

- A kiindulásként használt $\int \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot x^n$ hatványsor konvergenciahalmaza: $(-1,1)$.
- Emiatt ezt tudjuk biztosan:
  - $\ln 1 + x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot x^{n+1}$ teljesül $x \in (-1,1)$ esetén.
- Ugyanakkor $x = 1$ esetén a jobb oldal konvergens:
  - $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n+1} \cdot 1^{n+1}$ egy Leibniz-sor.
- Így az Abel-tétel feltételei teljesülnek.
- Az összegfüggvénynek balról folytonosnak kell lennie $x = 1$-ben.
- De akkor értéke csak $\ln 2$ lehet.

Abel folytonossági tétele: példa (folyt.)

- Tehát $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$
- Hasonló példa:

  Konstruáljuk meg az $x \to \arctan x$ hozzárendeléssel megadott függvény hatványsor-alakját!

- A hatványsorok tagonkénti primitív függvényét használva:

  $$\arctan x = \int \frac{1}{1+x^2} = \int \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot x^{2n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot x^{2n+1}$$

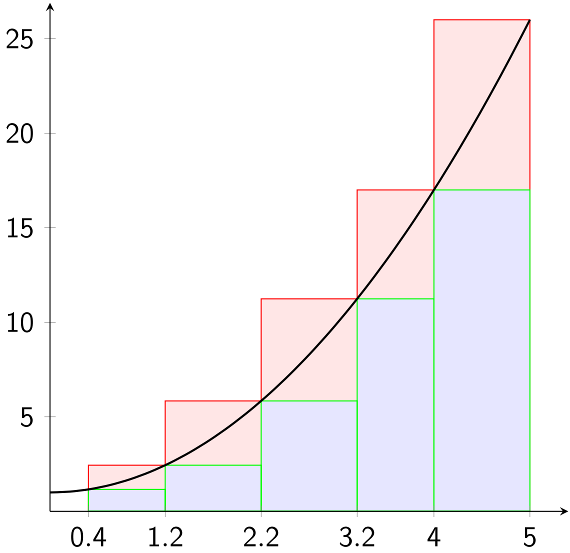
  - Itt tényleg $\arctan x\big|_{x=0} = 0$, ahogy a feltételben szerepelt.
- A kiindulásként használt $\int \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot x^{2n}$ hatványsor konvergenciahalmaza: $(-1, 1)$.

Abel folytonossági tétele: példa (folyt.)

- Emiatt ezt tudjuk biztosan:
  - $\arctan x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot x^{2n+1}$ teljesül $x \in (-1, 1)$ esetén.
- Ugyanakkor $x = 1$ esetén a jobb oldal konvergens:
  - $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot 1^{2n+1}$ egy Leibniz-sor.
- Így az Abel-tétel feltételei teljesülnek.
- Az összegfüggvénynek balról folytonosnak kell lennie $x = 1$-ben.
- De akkor értéke csak $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ lehet.
- Tehát $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$

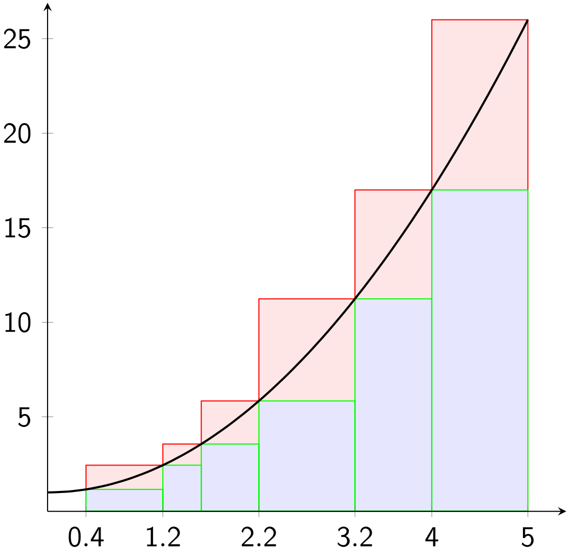
Cél: magasabb rendű deriváltak

Cél: magasabb rendű deriváltak



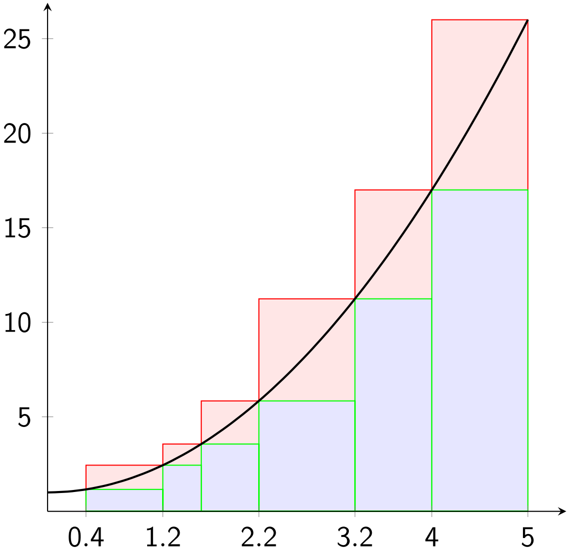
Cél: magasabb rendű deriváltak

Cél: magasabb rendű deriváltak



Cél: magasabb rendű deriváltak

Cél: magasabb rendű deriváltak



Cél:

- Jelölés: $L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k) = \{A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k, A \text{ lineáris}\}$,

Cél:

- Jelölés: $L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k) = \left\{A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k, A \text{ lineáris}\right\}$,
  ahol persze $A \in \mathbb{R}^{k \times d}$

Cél:

- Jelölés: $L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k) = \{A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k, A \text{ lineáris}\}$, ahol persze $A \in \mathbb{R}^{k \times d}$
- Derivált*függvény*:

Cél:

- Jelölés: $L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k) = \{A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k, A \text{ lineáris}\}$,
  ahol persze $A \in \mathbb{R}^{k \times d}$
- Derivált*függvény*:

Ha $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ deriválható az M halmaz pontjaiban,

Cél:

- Jelölés: $L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k) = \{A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k, A \text{ lineáris}\}$,
  ahol persze $A \in \mathbb{R}^{k \times d}$
- Derivált*függvény*:

Ha $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ deriválható az M halmaz pontjaiban,akkor

$$f' : \mathbb{R}^d \to L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k) \sim \mathbb{R}^{d \times k}.$$

Cél:

- Jelölés: $L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k) = \{A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k, A \text{ lineáris}\}$,
  ahol persze $A \in \mathbb{R}^{k\times d}$
- Derivált*függvény*:

Ha $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ deriválható az M halmaz pontjaiban,akkor

$$f' : \mathbb{R}^d \to L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k) \sim \mathbb{R}^{d\times k}.$$

- Második derivált:

Cél:

- Jelölés: $L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k) = \{A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k, A \text{ lineáris}\}$, ahol persze $A \in \mathbb{R}^{k \times d}$
- Derivált*függvény*:

Ha $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ deriválható az M halmaz pontjaiban,akkor

$$f' : \mathbb{R}^d \to L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k) \sim \mathbb{R}^{d \times k}.$$

- Második derivált:

Ha f' deriválható x-ben,

Cél:

- Jelölés: $L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k) = \{A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k, A \text{ lineáris}\}$, ahol persze $A \in \mathbb{R}^{k \times d}$
- Derivált*függvény*:

Ha $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ deriválható az M halmaz pontjaiban,akkor

$$f' : \mathbb{R}^d \to L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k) \sim \mathbb{R}^{d \times k}.$$

- Második derivált:

Ha f' deriválható x-ben,akkor

$$f"(\mathrm{x}) \in L(\mathbb{R}^d \to L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k))$$

- Jelölés: $L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k) = \{A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k, A \text{ lineáris}\}$, ahol persze $A \in \mathbb{R}^{k\times d}$
- Derivált*függvény*:

Ha $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ deriválható az M halmaz pontjaiban,akkor

$$f' : \mathbb{R}^d \to L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k) \sim \mathbb{R}^{d\times k}.$$

- Második derivált:

Ha f' deriválható x-ben,akkor

$$f''(x) \in L(\mathbb{R}^d \to L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k))$$

és persze

$$f'' : \mathbb{R}^d \to L(\mathbb{R}^d \to L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k)).$$

Cél:

- Jelölés: $L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k) = \{A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k, A \text{ lineáris}\}$, ahol persze $A \in \mathbb{R}^{k \times d}$
- Derivált*függvény*:

Ha $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ deriválható az M halmaz pontjaiban,akkor

$$f' : \mathbb{R}^d \to L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k) \sim \mathbb{R}^{d \times k}.$$

- Második derivált:

Ha f' deriválható x-ben,akkor

$$f''(x) \in L(\mathbb{R}^d \to L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k))$$

és persze

$$f'' : \mathbb{R}^d \to L(\mathbb{R}^d \to L(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^k)).$$