Analízis 2, 1. zárthelyi dolgozat
2022. március 8.

A ZH megírása során semmilyen segédeszköz nem használható. Minden eredmény csak indoklással együtt ér pontot, az előadáson illetve a gyakorlaton tanultakra lehet hivatkozni, részpontok szerezhetőek. A 7 db feladat és betűvel jelzett részfeladat mindegyike 5-5 pontot ér.

1. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 5x(t) + 3 \\ x(2) = 2 \end{cases}$$

2. Számítsuk ki az alábbi integrálokat!
$$(a) \int \frac{3\ln(x)}{\sqrt{x}} \qquad (b) \int_0^{\pi/4} \frac{1 - 3\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

3. Számítsuk ki az alábbi függvényhez tartozó $S_f(\phi) - s_f(\phi)$ oszcillációs összeget azon a ϕ felosztáson, amelyik egyenletes, és $2n$ db részintervallumot tartalmaz!
$$f : [-\pi/4, \pi/4] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(x) \cdot \operatorname{sgn}(x),$$
ahol $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

4. Egy forgástestet úgy kapunk meg, hogy az $F : [0, M] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2}{1+5x}$ hozzárendeléssel adott függvény ($M > 0$) grafikonját az x tengely körül megforgatjuk. Mekkorának válasszuk meg M-et, hogy egy ilyen test térfogata 2 legyen?

5. Legyen $f \in C[a, b]$ valamely $a < b \in \mathbb{R}$ számokra. Tudjuk, hogy $f(a) < 0$, és azt is, hogy $\int_a^b f(x) > 0 \,\mathrm{d}x$. Igazoljuk, hogy ekkor van olyan $z \in (a, b)$, amelyre $\int_a^z f(x)\,\mathrm{d}x = 0$!

6. Mutassuk meg, hogy ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, hogy $\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ teljesül minden olyan folytonos $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényre, amire $g(a) = g(b) = 0$, akkor f csak az azonosan 0 függvény lehet!