Analízis 2, 3. ZH
2022. május 12.

A ZH megírása során semmilyen segédeszköz nem használható. Minden eredmény csak indoklással együtt ér pontot, az előadáson illetve a gyakorlaton tanultakra lehet hivatkozni, részpontok szerezhetőek. A 7 db feladat illetve részfeladat mindegyike 5-5 pontot ér.

1. Az $f_n(x) = \dfrac{\sin nx - \cos n^2 x}{\sqrt{n}}$ hozzárendeléssel adott függvények sorozata milyen értelemben konvergens a $[0, 2\pi]$ intervallumon?

2. Határozzuk meg a következő függvénysorok konvergenciahalmazát!

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^2+n+1}$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n} \cdot (x-4)^n$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log(n \cdot (x^2+1))}{n^3+1}$

3. Teljesül-e az alábbi egyenlőség?

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\ln(1+n\cdot x)}{n} \right)' = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+n\cdot x)}{n} \right)' \qquad x \in (0,\infty)$$

4. Adjuk meg az $f(x) = \dfrac{1}{2+x^3}$ hozzárendeléssel adott függvény 0 körül kifejtett Taylor-sorát, majd a sor konvergenciasugarát is!

5. Igazoljuk, hogy ha léteznek olyan $b < c$ pozitív számok, amelyekre a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor minden együtthatójára teljesül, hogy $b < a_n < c$, akkor a hatványsor konvergenciahalmaza pontosan a $(-1, 1)$ intervallum.