Analízis I. rövid tematika - 1. hét

1. Tudnivalók, számonkérés, jegyzet.
2. Axióma, alapfogalom, definíció, bizonyítás.
3. Halmazok, részhalmazok, megadásuk
   (a) Műveletek: únió, metszet, különbség, jelölés.
   (b) Rendezett pár, Descartes-szorzat.
4. Függvények, definíció és magyarázat.
   (a) Kapcsolat a „hozzárendeléssel”.
   (b) $\mathcal{D}_f$ és $\mathcal{R}_f$.
   (c) Kompozíció; injektív függvény fogalma, inverz.
   (d) Leszűkítés és őskép.
   (e) Bijekció halmazok közt.
   (f) Számosságok naivan; $\mathbb{N}, \mathbb{Q}$ megszámlálhatók, $\mathbb{R}$ nem az.
5. Valós számok axiómái (testaxiómák $4 + 4 + 1$ db, rendezési axiómák $4 + 2$ db).

A fenti anyagrész: kb. jegyzet 12-18. oldal.

Analízis I. rövid tematika - 2. hét

1. Testaxiómák, rendezés; új megvilágítás, további axióma.
   (a) Ezeket $\mathbb{Q}$ is teljesíti.
   (b) Kell még valami: felső határ axióma. Sup jelentése.
   (c) Ezzel $\mathbb{R}$ megadása; kiterjesztése.
   (d) A felső határ axióma alternatívái: Cantor-axióma, Dedekind-axióma.
2. Fogalmak, jelölések $\mathbb{R}$-ben
   (a) Intervallumok és környezetek $\mathbb{R}$-ben és $\bar{\mathbb{R}}$-ben.
   (b) Valós számok hatványai, gyökei; irracionális kitevőjű eset.
3. Sorozatok
   (a) Fogalom, jelölések.
   (b) Monoton és korlátos sorozat fogalma, $\frac{1}{n+1}$ és $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tagokból álló sorozat
   (c) Ehhez: számtani és mértani közép.
4. Határérték fogalma $\bar{\mathbb{R}}$-ben, konvergencia.
   (a) $\frac{1}{n}$ és $(-1)^n$ tagokból álló sorozat esete részletesen.
   (b) A határérték egyértelmű.
   (c) Konvergencia $\Rightarrow$ korlátosság.
5. Nevezetes határértékek I.

A fenti anyagrész: kb. jegyzet 20-25., 40-43. é 60. oldal.

Analízis I. rövid tematika - 3. hét

1. Állítások konvergens sorozatok határértékéről.
   (a) Monotonitás + korlátosság $\Rightarrow$ konvergencia.
   (b) Következmény: e definíciója értelmes.
   (c) Határérték és rendezés.
   (d) Rendőr-elv.
   (e) Határérték és műveletek: összeadás és szorzás esete (reciprok, hatvány gyakorlaton legyen).
2. Végtelen határérték részletesebb vizsgálata
   (a) Létezés monoton sorozatokra.
   (b) Műveletek kiterjesztéssel; bizonytalan esetek. Ehhez táblázat.
3. Részsorozatok
   (a) Bolzano–Weierstraß-tétel (jegyzet 3.4).
   (b) Lim sup és lim inf fogalma.

   A fenti anyagrész: kb. jegyzet 44-51. é 53-57. oldal.

Analízis I. rövid tematika - 4. hét

1. További állítások sorozat-határértékekről.
   (a) Cauchy-konvergenciakritérium (jegyzet 3.6)
   (b) Nevezetes határértékek II.
   (c) Erősorrend, konvergenciasebesség összehasonlítása.
2. Az e szám vizsgálata.
   (a) Előállítás $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}$ alakban.
   (b) e irracionális.
3. Sorok definíciója: a mértani és harmonikus sor.

A fenti anyagrész: kb. jegyzet 52-53, 61-64. és 102-104. oldal.

Analízis I. rövid tematika - 5. hét

1. Függvények határértéke
   (a) Környezetek - végtelenre is (ismétlés).
   (b) Torlódási pontok, példák.
   (c) A függvényhatárérték fogalma véges és végtelen helyen; példák.
   (d) Határérték és műveletek.
2. Függvény folytonossága.
   (a) Folytonosság definíciója; kapcsolat határértékkel.
   (b) Folytonosság és műveletek.
3. További tulajdonságok határértékkel és folytonossággal kapcsolatban
   (a) Átviteli elv határértékre és folytonosságra.
   (b) Kompozíció határértékre és folytonosságra.
4. Egyoldali határérték
   (a) Definíció véges helyen.
   (b) Monoton függvény egyoldali határértéke.
   (c) Szakadási pontok osztályozása.

A fenti anyagrész: kb. jegyzet 71-86. oldal.

Analízis I. rövid tematika - 6. hét (valószínűleg évfolyam ZH időpont)

1. Folytonos függvények tulajdonságai.
   (a) Bolzano–Darboux.
   (b) Minimum és maximum létezése; Weierstraß-elv.
   (c) Inverz folytonossága feltétellel.
   (d) Egyenletes folytonosság és Lipschitz-tulajdonság; ezek kapcsolata.

A fenti anyagrész: kb. jegyzet 96-101. oldal.

Analízis I. rövid tematika - 7. hét

1. Elemi függvények
   (a) Hatványfüggvények, hatványozás azonossága, folytonosság, ábra.
   (b) Exponenciális függvények, azonosság összegre, folytonosság, monotonitás. Természetes alapú eset.
   (c) Trigonometrikus függvények; geometriai bevezetés, azonosságok, ábra.
   (d) Trigonometrikus függvények inverzei; ábra.
   (e) Hiperboikus függvények; def., azonosságok, ábra.
   (f) Hiperbolikus függvények inverzei; ábra.
2. Fontos határértékek deriváláshoz.
   (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ igazolása $\sin x \le x \le \mathrm{tg} x$ alapján (ábra).
   (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ igazolása $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ limesze alapján (amit szintén igazolni kell).
   (c) 4.7 fejezet feladatai; amennyi belefér.

A fenti anyagrész: kb. jegyzet 87-95. oldal.

Analízis I. rövid tematika - 8. hét

1. Deriválhatóság
   (a) Definíció, példák.
   (b) Két ekvivalens definíció F_a-val és r-rel.
   (c) Folytonosság.
   (d) Érintő és deriváltfüggvény értelmezése.
2. Műveletek deriválható függvényekkel
   (a) Elemi műveletek; 6.3 alapján.
   (b) Inverz függvény deriválhatósága; példák: legalább arcsin és arsh esete.
3. Elemi függvények deriváltjai I.

A fenti anyagrész: kb. jegyzet 120-131. oldal.

Analízis I. rövid tematika - 9. hét

1. Elemi függvények deriváltjai II.
   (a) Levezetés exponenciális, logaritmus, hatvány és trigonometrikus, hiperbolikus függvények esetére.
   (b) Inverz trigonometrikus és hiperbolikus függvények esete.
2. Lokális monotonitás és szélsőérték; jegyzet 6.5 szerint.
3. Középértéktételek; jegyzet 6.6. szerint.
4. Globális monotonitás: jegyzet 6.7 szerint.

A fenti anyagrész: kb. jegyzet 132-141. oldal.

Analízis I. rövid tematika - 10. hét

1. Konvexitás
   (a) Definíció
   (b) Kapcsolat a deriválttal (deriválható függvényekre): f konvex $\Leftrightarrow$ f' monoton növő
   (c) Második derivált létezése esetén: f konvex $\Leftrightarrow$ $f'' \geq 0$.
2. Inflexiós pontok, $x^2, x^3, \sin$ függvényeke esete.
3. Szélsőérték elégséges feltétele.
4. Magasabb rendű deriváltak.
5. Lineáris közelítés egy pont körül.
6. L'Hospital-szabály.
   (a) Néhány példa $\frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \frac{0}{0}$ alakú határértékre, és arra, hogy erre vezetünk vissza mindent.
   (b) Bizonyítás az utolsó esetre a jegyzet szerint.
   (c) A jegyzetbeli példa; de $\frac{\sin x}{x}$-re nem szabad alkalmazni.

A fenti anyagrész: kb. jegyzet 142-145. és 153-155. oldal.

Analízis I. rövid tematika - 11. hét

1. Magasabb rendű közelítés egy pont körül: Taylor-formula polinomra.
2. Taylor-polinom.
   (a) Definíció; $\sin x$ és e^x példaként.
   (b) Lagrange-maradéktag bizonyítással.
3. A Taylor-sor
   (a) Definíció; összeffüggés az előzőekkel.
   (b) Egy függvény Taylor-sor alakban történő előallítása pontonként.
   (c) Elégséges feltétel a fentire.
   (d) Példák: $e^x, \sin x, \cos x, \mathrm{ch} x, \mathrm{sh} x$
   (e) Ellenpélda: $e^{-\frac{1}{x^2}}$.

A fenti anyagrész: kb. jegyzet 148-153. oldal.

Analízis I. rövid tematika - 12. hét

1. Deriválás alkalmazása: egyszerű differenciálegyenletek felírása
   (a) Hűlési egyenlet
   (b) Populáció korlátlan növekedése.
   (c) Sós víz a tartályban.
   (d) Rugóra függesztett test.
2. Elemi differenciálegyenletek megoldása
   (a) Kezdeti érték és a peremérték-feladatok
   (b) Szétválasztható változójú differenciálegyenletek.
   (c) Lineáris differenciálegyenletek.
   (d) Másodrendű peremérték-feladatok.