I. javító ZH matematika BSc szakosoknak analízisből, 2019. december 18.

A ZH-n semmilyen segédeszköz nem használható. Az eredmények csak indoklással együtt érnek pontot; az előadáson, ill. a gyakorlaton tanultakra lehet hivatkozni. A 10 db feladat és részfeladat mindegyike 4-4 pontot ér.

1. Igaz a következő kijelentés? Fogalmazzuk meg a tagadását!
$$\forall A \subset \mathbb{R} \quad \forall B \subset \mathbb{R} \quad : \sup A < \sup(A \cup B)$$
2. Vannak-e olyan A és B nemüres halmazok, hogy $\sup A = \sup B = \sup A \setminus B$?
3. Határozzuk meg az $x \to 3\ln(\frac{x-1}{2})$ hozzárendeléssel adott függvény inverzét, és annak értékkészletét!
4. Egyszerűsítsük a $\mathrm{ch}^2(\mathrm{arsh\ x})$ kifejezést!
5. Mennyi lesz az $a_1, 1, a_2, 1, a_3, 1, a_4, 1, \ldots$ sorozat limesz szuperiorja, ha $\limsup a_n = 0$ teljesül?
6. Igaz-e, hogy az $a_n \to 0$ tulajdonság ekvivalens az alábbival?
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n > n_0 : \ n \cdot |a_n| < \varepsilon$$
7. Vannak-e olyan $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitív tagú sorozatok, amelyekre $a_n < b_n$ teljesül minden indexre, $\lim \frac{a_n}{b_n}$ létezik, de $\lim \frac{a_n}{b_n} < 1$ nem teljesül?
8. Adjuk meg azon sorozatok határértékét, amelyeknek n-edik tagja az alábbi!

   (a) $\sqrt[2n]{4n^4 - 1}$ (b) $n! - 5n^2 2^n$ (c) $\left(\frac{1-n}{n}\right)^n$

I. javító ZH matematika BSc szakosoknak analízisből, 2019. december 18.

A ZH-n semmilyen segédeszköz nem használható. Az eredmények csak indoklással együtt érnek pontot; az előadáson, ill. a gyakorlaton tanultakra lehet hivatkozni. A 10 db feladat és részfeladat mindegyike 4-4 pontot ér.

1. Igaz a következő kijelentés? Fogalmazzuk meg a tagadását!
$$\forall A \subset \mathbb{R} \quad \forall B \subset \mathbb{R} \quad : \sup A < \sup(A \cup B)$$
2. Vannak-e olyan A és B nemüres halmazok, hogy $\sup A = \sup B = \sup A \setminus B$?
3. Határozzuk meg az $x \to 3\ln(\frac{x-1}{2})$ hozzárendeléssel adott függvény inverzét, és annak értékkészletét!
4. Egyszerűsítsük a $\mathrm{ch}^2(\mathrm{arsh\ x})$ kifejezést!
5. Mennyi lesz az $a_1, 1, a_2, 1, a_3, 1, a_4, 1, \ldots$ sorozat limesz szuperiorja, ha $\limsup a_n = 0$ teljesül?
6. Igaz-e, hogy az $a_n \to 0$ tulajdonság ekvivalens az alábbival?
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n > n_0 : \ n \cdot |a_n| < \varepsilon$$
7. Vannak-e olyan $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitív tagú sorozatok, amelyekre $a_n < b_n$ teljesül minden indexre, $\lim \frac{a_n}{b_n}$ létezik, de $\lim \frac{a_n}{b_n} < 1$ nem teljesül?
8. Adjuk meg azon sorozatok határértékét, amelyeknek n-edik tagja az alábbi!

   (a) $\sqrt[2n]{4n^4 - 1}$ (b) $n! - 5n^2 2^n$ (c) $\left(\frac{1-n}{n}\right)^n$