1. GYAKORLAT - Halmazműveletek, függvények

1. Határozzuk meg a $H_1, H_2, \ldots$ halmazok (végtelen) metszetét, ahol

   (a) $H_n = (0, n)$ (b) $H_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$ (c) $H_n = (-n, n)$ (d) $H_n = \{x : x\ 2^n \text{ többszöröse}\}$

   (e) $H_n = \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ (f) $H_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ (g) $H_n = (n, \infty)$ (h)* $H_n = \{q\sqrt{n} : q \in \mathbb{Q}\}$

   (i) $H_n = \left(1, 2 + \frac{1}{n}\right)$ (j) $H_n = \left(\frac{1}{n}, n+1\right)$ (k) $H_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$.

2. Határozzuk meg a $H_1, H_2, \ldots$ halmazok (végtelen) unióját, ahol

   (a) $H_n = (n-1, n)$ (b) $H_n = (-n, n)$ (c) $H_n = \left(\frac{1}{n+2}, 1 - \frac{1}{n+2}\right)$ (d) $H_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$

   (e)* $H_n = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$ (f)* $H_n = \left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}\right)$ (g) $H_n = \{n\}$.

3. Legyenek $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ tetszőleges halmazok (úgy, hogy a nagyobb indexű tartalmazza a kisebb indexűt). Igazoljuk, hogy ekkor

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)) \cup \ldots.$$

4. Lényeges kikötés az előző feladatban, hogy a nagyobb indexű tartalmazza a kisebb indexűt?

5.* Adjunk meg $A_1, A_2, A_3, \ldots$ halmazokat úgy, hogy közülük bármely véges sok metszete nem üres, de az összes halmaz metszete üres.

6. Határozzuk meg az alábbiakban megadott függvényekből álló $f \circ g$ és $g \circ f$ kompozíciófüggvényeket, ha azok értelmesek (azaz adjuk meg $f(g(x))$ és $g(f(x))$ értékét)!

   (a) $f(x) = x + 1$, $g(x) = \frac{1}{x}$ (b) $f(x) = 2x$, $g(x) = \sin x$ (c) $f(x) = x$, $g(x) = 3x^2$

   (d) $f(x) = \sqrt{1-x}$, $g(x) = \frac{x}{9+x^2}$ (e) $f(x) = -x$, $g(x) = \sin x$ (f) $f(x) = 2^x$, $g(x) = \sin x^2$

7. Az alábbiakban megadott kompozíciófüggvényeket bontsuk (minél egyszerűbb) komponensekre, azaz adjuk meg, hogy mi lehet f és g, amennyiben $h(x) = (f \circ g)(x)$ az alábbi:

   (a) $h(x) = (x+1)^2$ (b) $h(x) = \frac{1}{1-x^2}$ (c) $h(x) = \cos^2(x-1)$ (d) $h(x) = \sqrt{\sin(x+1)}$

   (e) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ (f)* $h(x) = x^x$ (g) $h(x) = \operatorname{tg}^2\sqrt{x}$ (h) $h(x) = \log_{10}(1 - \cos x)$.

8. Tekintsük a $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$, valamint a $\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$ függvények inverzét, és használjuk ezekre az arc sin, illetve az arc tg jelölést!

   Értelmesek ezek? Rajzoljuk fel a grafikonjukat!

   Számítsuk ki a következő értékeket!

   arc sin 1, arc sin $-\frac{1}{2}$, arc sin 0, arc sin $\frac{\sqrt{3}}{2}$, arc tg 1, arc tg 0, arc tg $-\sqrt{3}$

9. Adjuk meg az alábbi függvények esetén az $\mathbb{R}^+$ halmaz ősképét! Melyek injektívek?

   (a) $g(x) = \operatorname{tg} x$ (b) $g(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2}}$ (c) $g(x) = \frac{1}{x+3}$ (d) $g(x) = 2^{x-1}$

   (e) $g(x) = \log_{10}(x+1)$ (f) $g(x) = \cos x$ (g) $g(x) = \sin\frac{1}{x}$ (h) $g(x) = \log_2 x$

10. Határozzuk meg az alábbi hozzárendeléssel megadott függvények inverzét!

   (a) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (b) $f(x) = \sqrt{5x-2}$, $\mathcal{D}(f) = [\frac{2}{5}, \infty)$

   (c) $f(x) = 1 + 2^x$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ (d) $f(x) = \log_{10}(3x^3 - 3)$, $\mathcal{D}(f) = (1, \infty)$

   (e) $f(x) = \sin\frac{x}{2}$, $\mathcal{D}(f) = [-\pi, \pi]$ (f)* $f(x) = \operatorname{tg}\frac{1}{x}$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus [-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}]$

   (g) $f(x) = e^x + e^{-x}$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^+$ (h) $f(x) = 1 - \cos\sqrt{x}$, $\mathcal{D}(f) = [0, \pi^2]$

   (i) $f(x) = e^x - e^{-x} - 3$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ (j) $f(x) = 3 - \operatorname{tg} x$, $\mathcal{D}(f) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

11. Az alábbi kérdések mindegyike $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú, azaz *valós* függvényekre vonatkozik, ahol $\mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R}$.

   (a)* Hány megoldása van az $f^{-1} = f$ egyenletnek?

   (b) Előfordulhat-e, hogy f^{-1} értelmes, de nincs inverze?

   (c) Van-e olyan invertálható f függvény, amelynek értékkészlete a $(-1, 1)$ intervallum?

   (d) Igazoljuk, hogy ha f szigorúan monoton növő, akkor van inverze!

   (e) Igazoljuk, hogy ha f szigorúan monoton növő, akkor inverze is szigorúan monoton növő!

   (f) Igazoljuk, hogy ha f invertálható, akkor minden $c \in \mathbb{R}$ esetén $f + c$, valamint $c \neq 0$ esetén cf is invertálhatók!

   (g) Van-e olyan f függvény, amelynek inverze valamilyen $a \in \mathbb{R}^+$ szerint periodikus?

   (h)* Igazoljuk, hogy ha f invertálható és $0 \notin \mathcal{R}(f)$, akkor $1/f$ is invertálható! Fogalmazzuk meg ennek valamilyen általánosítását!

   (i)* Vannak-e olyan f és g függvények, amelyek nem injektívek, $f \circ g$ viszont injektív?

12. Az alábbi kérdések mindegyike $f, g, h : X \to X$ típusú függvényekre vonatkozik, ahol X egy tetszőleges halmaz.

   (a) Igazoljuk, hogy $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ tetszőleges $f, g, h : X \to X$ esetén teljesül!

   (b) Igaz-e, hogy ha f invertálható, és $f \circ f$ létezik, akkor $f \circ f$ is invertálható?

   (c) Igaz-e, hogy ha $f = f \circ f$, akkor $f = f \circ f \circ f$?

   (d) Igaz-e, hogy ha $f = f^{-1}$ és $\mathcal{D}(f) = X$, akkor $\mathcal{R}(f) = X$?