10. GYAKORLAT - Taylor-polinomok, Taylor-sorok, L'Hospital-szabály

1. Írjuk fel az f függvény grafikonját az $(a, f(a))$ pontban érintő egyenes egyenletét az alábbi esetekben!

   (a) $f(x) = \sin x, \quad a = 0$ (b) $f(x) = x^2, \quad a = 0$ (c) $f(x) = \ln(1+x), \quad a = 0$

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad a = 1$ (e) $f(x) = \sqrt{x+3}, \quad a = 1$ (f) $f(x) = (x+1)\sqrt[3]{3-x}, \quad a = -1$

2. Adjuk meg a következő függvények a körüli n-ed rendű Taylor-polinomját!

   (a) $f(x) = \sin 2x, \quad a = 0, n = 2$ (b) $f(x) = 1 - 2x^2 + x^4, \quad a = 0, n = 3$

   (c) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad a = 1, n = 2$ (d) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}, \quad a = 0, n = 2$

   (e) $f(x) = \ln\ x, \quad a = 1, n = 3$ (f) $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad a = 0, n = 2$

   (g) $f(x) = \sqrt[3]{8+x}, \quad a = 1, n = 3$ (h) $f(x) = \sin(\sin x), \quad a = 0, n = 3$

3. Tegyük fel, hogy $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ teljesül az I intervallumban. Adott h valós függvény esetén milyen intervallumban lesz biztosan igaz, hogy az $g(h(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (h(z))^k$ egyenlőség teljesül?

4. Számítsuk ki az alábbi f függvények nulla körüli Taylor-sorát! Az utolsó három esetben adjuk meg, hogy hol állítja elő az a Taylor-sor az eredeti f függvényt, az első öt esetben pedig indokoljuk meg, hogy a megfelelő Taylor-sor az egész $\mathbb{R}$ halmazon előállítja az f függvényt!

   (a) $f(x) = \sin 2x$ (b) $f(x) = 1 - 2x^2 + x^4$ (c) $f(x) = \cos x$ (d) $f(x) = \operatorname{sh} x$

   (e) $f(x) = \operatorname{ch} x$ (f) $f(x) = \cos\sqrt{x}$ (g) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ (h) $f(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$

5. A Lagrange-féle maradéktag segítségével becsüljük meg, mennyire pontosak az alábbi közelítések a megadott I intervallumon!

   (a) $\sin x \approx x, \quad I = (-0.01, 0.01)$ (b) $\cos 2x \approx 1 - 2x^2, \quad I = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

   (c) $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{6}, \quad I = (-0.1, 0.1)$ (d) $\dfrac{1}{1-x^2} \approx 1 + x^2, \quad I = (-0.01, 0.01)$

   (e) $\ln\ (x+1) \approx x - \dfrac{x^2}{2}, \quad I = (-0.1, 0.1)$ (f) $\operatorname{arctg} x \approx x - \dfrac{x^3}{3}, \quad I = (0, 1)$

6. A l'Hospital-szabály (esetleg többszöri) felhasználásával számítsuk ki az alábbi határértékeket!

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^3 x - 1}{\sin 2x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \log_2(2+x)}{x^2}$ (c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{1+\ln x} - 1}{1 - \sqrt{x}}$

   (d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{5x^2 - x - 4}$ (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$ (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{\sin x}$

   (g) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$ (h) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$ (i) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x} - \dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$

   (j) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - x}{\ln x - (x-1)}$ (k) $\lim\limits_{x\to 0} \left(x^{x^x} - 1\right)$ (l) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{n}{x^n - 1} - \dfrac{m}{x^m - 1}\right), n, m \in \mathbb{R}^+$