2. GYAKORLAT - felső határ axióma, bijekciók, infimum, szuprémum

Az alábbi állítások mind nemüres halmazokra vonatkoznak.

Az utolsó feladatban az $a \in \mathbb{R}$ pont egy környezetének nevezzük a $K \subset \mathbb{R}$ halmazt, ha valamilyen $\delta > 0$ esetén $(a-\delta, a+\delta) \subset K$.

1. Mutassunk olyan $H \subset \mathbb{R}$ halmazt, amelynek nincs maximuma! Lehet ekkor maximuma a $\{2h : h \in H\}$ halmaznak?
2. Igazoljuk, hogy ha a $H \subset \mathbb{R}$ halmaznak van véges felső korlátja, akkor végtelen sok is van!
3. Teljesül a felső határ axióma állítása a racionális számok halmazára?
4. A felső határ axióma segítségével mondjuk ki és igazoljuk a legnagyobb alsó korlát létezésére vonatkozó alsó határ axiómát!
5. A felső határ axióma segítségével igazoljuk, hogy ha $I_1 \supset I_2 \supset \dots$ zárt intervallumok olyan sorozata, amelyek hosszának nincs pozitív alsó korlátja, akkor ezeknek pontosan egy közös pontjuk van. (Ez a Cantor-axióma).
6.* Fordítva; igazoljuk, hogy a fenti Cantor-axiómából következik a felső határ axióma!
7. Adjunk meg bijekciót a következő halmazok között (akár szemléletesen)!

   (a) $\mathbb{N} \longleftrightarrow \mathbb{Z}$ (b) $\mathbb{Z}^+ \longleftrightarrow \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}^+$ (c) $\mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{R}^+$ (d) $(0,1) \longleftrightarrow \mathbb{R}$
   (e) $\mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (f) $[0,1] \longleftrightarrow (0,1)$ (g) $(0,1) \longleftrightarrow (0,1) \times (0,1)$
8. Adjuk meg az alábbi halmazok infimumát és szuprémumát! Melyeknek van minimuma?

   (a) $(-1,2)$ (b) $[-2,0)$ (c) $\{k+2 : k \in \mathbb{N}\}$ (d) $\mathbb{Q} \cap [-2,0)$
   (e) $\mathbb{Q}^* \cap [-2,0)$ (f) $\{\frac{a}{2^k} : a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$ (g) $\left\{a^2 + \frac{2}{a} : a \in \mathbb{R}^+\right\}$ (h) $\{-\log_2 n : n \in \mathbb{Z}^+\}$
   (i) $\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$ (j) $\{\frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{Z}^+\}$ (k) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ (l) $\{\frac{k}{n+k} : k,n \in \mathbb{Z}^+\}$
9. A következő állítások mindegyikében $A, B \subset \mathbb{R}$ tetszőleges nemüres halmazok.

   (a) Igazoljuk, hogy ha $A \subset B$, akkor $\sup A \le \sup B$ és $\inf B \le \inf A$ egyaránt teljesülnek!
   (b) Igazoljuk, hogy ha minden $a \in A$ elemhez van olyan $b \in B$ elem, hogy $b \ge a$, akkor $\sup B \ge \sup A$.
   (c) Igaz-e, hogy ha A összes eleme nagyobb B összes eleménél, akkor $\inf A > \sup B$?
   (d) Igazoljuk, hogy ha A és B felülről korlátosak, akkor $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$. Vizsgáljuk meg azokat az eseteket is, amikor $\sup A$ vagy $\sup B$ végtelen!
   (e) Igazoljuk, hogy ha A és B alulról korlátosak, akkor $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$. Vizsgáljuk meg azokat az eseteket is, amikor $\inf A$ vagy $\inf B$ mínusz végtelen!
   (f) Bevezetve a $-A = \{-a : a \in A\}$ jelölést, igazoljuk, hogy ha A alulról korlátos, akkor $-A$ felülről korlátos, és $\inf A = -\sup(-A)$ teljesül!
   (g) Igazoljuk, hogy ha A nem korlátos, akkor A-ból véges sok elemet elhagyva szintén nem korlátos halmazt kapunk!
   (h) Igazoljuk, hogy ha az A halmaz korlátos, akkor tetszőleges $p \in \mathbb{R}^+$ esetén a

   $$p \cdot A = \{pa : a \in A\}$$

   halmazra $\sup(p \cdot A) = p \cdot \sup A$, valamint $\inf(p \cdot A) = p \cdot \inf A$ teljesül!
   Fogalmazzunk meg és igazoljunk hasonló állítást $p \in \mathbb{R}^-$ esetén is!

(i)* Igazoljuk, hogy ha A korlátos, akkor

$$\sup A - \inf A = \sup\{p - q : p, q \in A\}.$$

10. (a) Igazoljuk, hogy az $a \in \mathbb{R}$ pont véges sok környezetének metszete is környezete a-nak!
    (b) Igaz az is, hogy az $a \in \mathbb{R}$ pont végtelen sok környezetének metszete is mindig környezete a-nak? Lehet egy ilyen metszet üres?
    (c) Igazoljuk, hogy az $a \in \mathbb{R}$ pont véges sok környezetének uniója is környezete a-nak!
    (d) Igazoljuk, hogy az egymástól különböző $a, b \in \mathbb{R}$ pontoknak van olyan U_a és U_b környezetük, amelyeknek metszete üres!
    (e) Igazoljuk, hogy ha $b \in \mathbb{R}$ benne van $a \in \mathbb{R}$ minden környezetében, akkor $a = b$ teljesül!
    (f) Igazoljuk, hogy ha a $H \subset \mathbb{R}$ halmaznak az a pont minden környezetében van legalább *egy* a-tól különböző eleme, akkor végtelen sok is van!
    (g) Igazoljuk, hogy ha $\inf A = a_0 \in \mathbb{R}$, akkor a_0 tetszőleges környezetében van A-beli elem!
    (h) Mutassunk olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt, amely a *nulla* egy környezetét olyan halmazba képezi, amely nem környezete $f(0)$-nak!