3. GYAKORLAT - sorozatok, határértékek

A feladatsorban sorozatokat mindig azok n-edik tagjával adunk meg, amelyet a_n jelöl ($n \in \mathbb{Z}^+$).

1. Mely sorozatok növőek, csökkenőek, illetve korlátosak az alábbiak közül?

   (a) $a_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$ (b) $a_n = \frac{n}{n+1}$ (c) $a_n = \frac{n}{n^3-2}$ (d) $a_n = \ln(n^2+3)$

   (e) $a_n = \sin n$ (f) $a_n = (-1)^n$ (g) $a_n = \frac{(-1)^n}{n^3-8n}$ (h) $a_n = \frac{n^2+n}{n^2-2}$

   (i) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ (j) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (k) $a_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$ (l) $a_n = \sqrt[n]{n}$

2. (a) Igazoljuk, hogy korlátos sorozatok összege és szorzata is korlátos!

   (b) Mutassunk példát arra, hogy korlátos pozitív tagú sorozatok hányadosa nem feltétlenül korlátos!

3. (a) Igazoljuk, hogy monoton növő sorozatok összege is monoton növő!

   (b) Mutassunk példát arra, hogy monoton növő sorozatok szorzata lehet monoton csökkenő vagy akár nem monoton is!

4. Igazoljuk, hogy tetszőleges $A \in \mathbb{R}$ és (a_n) valós sorozat esetén fennállnak a következő ekvivalenciák!

   (a) $a_n \to A \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon \in (0,1)\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n > n_0 \quad |a_n - A| < \varepsilon$

   (b) $a_n \to A \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n > n_0 \quad |a_n - A| < 2\varepsilon$

5. (a) Igazoljuk, hogy ha két sorozat csak véges sok tagban tér el egymástól, akkor a határértékük ugyanaz vagy egyiknek sincs határértéke!

   (b) Igazoljuk, hogy ha két konvergens sorozatnak végtelen sok azonos eleme van, akkor a határértékük ugyanaz!

   (c) Fennáll az is, hogy ha két sorozatnak végtelen sok azonos eleme van, és az egyiknek van határértéke, akkor a másiknak is?

6. (a) Tegyük fel, hogy $\lim a_n = \lim b_n$. Igazoljuk, hogy ekkor az $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots$ sorozat limesze létezik, valamint (a_n) és (b_n) közös határértékével egyezik meg!

   (b)* Legyenek $(a_{1n}), (a_{2n}), (a_{3n}), \ldots$ sorozatok úgy, hogy azok közös határértéke A. Igaz-e, hogy ekkor az $a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3}, \ldots$ sorozat határértéke is A lesz?

7. Számítsuk ki az alábbiakban megadott sorozatok határértékét, ha az létezik!

   (a) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ (b) $a_n = n^{-\frac{1}{2}}$ (c) $a_n = \frac{1}{n^2+n}$

   (d) $a_n = \log_2(2 - \frac{1}{n})$ (e) $a_n = \frac{3-n^2}{2+n^3}$ (f) $a_n = \frac{n^2 - \frac{1}{\sqrt{n}}}{1+4n}$

   (g) $a_n = \frac{n(3-n^2)}{3+2n^2}$ (h) $a_n = \sqrt{\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}}$ (i)* $a_n = \frac{2\sqrt{n-1} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1}}$

   (j) $a_n = \frac{\sqrt{9n^2+n+\sqrt{n}}}{n+\sqrt[3]{n}}$ (k) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ (l) $a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}$

   (m) $a_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$ (n)* $a_n = \sqrt[3]{n^2+n} - \sqrt[3]{n^2-n}$ (o) $a_n = \frac{n!}{n^n}$

8. Igazoljuk teljes indukcióval az alábbi állításban szereplő ún. Bernoulli-egyenlőtlenséget!

$$\text{Minden } n \in \mathbb{N}^+ \text{ és } a \in [-1, \infty) \text{ esetén } (1+a)^n \geq 1 + an.$$

9. * A fenti állítás felhasználásával mutassuk meg, hogy minden $\delta > 0$ számhoz van olyan n_0, hogy $n \geq n_0$ esetén

   (a) $(1+\delta)^n > 1 + 5n\delta$ (b) $(1+\delta)^n > 1 + n^3\delta$ teljesül!

10. (a) Határozzuk meg, milyen (konstans) q értékek esetén lesz $\lim q^n$ értéke $0, 1, \infty$, illetve mikor nem létezik!

    (b) Igazoljuk, hogy ha $\lim a_n = A$, ahol $A \neq 0$, akkor $\lim \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{A}$ teljesül! Vizsgáljuk meg külön az $A = \infty$ és $A = -\infty$ eseteket is!

    (c) Igazoljuk, hogy ha a nemnegatív tagú (a_n) sorozatra $\lim a_n = A$, akkor $k \in \mathbb{Z}^+$ esetén $\lim \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}$ teljesül!

    (d) Igazoljuk, hogy ha a pozitív tagú (a_n) sorozatra $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^+$, akkor $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$ teljesül!

    (e)* Igazoljuk, hogy ha az (a_n) sorozatra $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$, ahol $|A| < 1$, akkor $\lim a_n^n = 0$.

    (f) Igazoljuk, hogy ha pozitív tagú (a_n) sorozat elemeire $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = A$ teljesül valamilyen $A > 1$ számra, akkor $\lim a_n = \infty$.

    (g)* Igazoljuk, hogy ha (a_n) sorozat elemei közt nem szerepel a nulla, és $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = A$ teljesül valamilyen $-1 < A < 1$ számra, akkor $\lim a_n = 0$.

11. A $\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$ egyenlőség felhasználásával számítsuk ki az alábbi határértékeket!

    (a) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$ (b) $a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n$ (c) $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-3}$

    (d) $a_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}$ (e) $a_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)^n$ (f)* $a_n = \left(\frac{n^3+2n+3}{n^3-3}\right)^n$