4. GYAKORLAT - sorozatok konvergenciája (folytatás)

A feladatok megoldása során felhasználhatók a következő nevezetes határértékek.

(i) $\lim \frac{n^k}{a^n} = 0 \ k \in \mathbb{Z},\ a > 1$ (ii) $\lim \sqrt[n]{a} = 1 \ a > 0$ (iii) $\lim \sqrt[n]{n} = 1$

(iv) $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$ (v) $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$ (vi) $\lim \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$

1. Számítsuk ki az alábbiakban megadott sorozatok határértékét, ha az létezik!

   (a) $a_n = \sqrt[n]{5n+3}$ (b) $a_n = \sqrt[2n]{n}$ (c) $a_n = \sqrt[n]{2+\sqrt{n}}$ (d) $a_n = \sqrt[n]{10n^3+2}$

   (e) $a_n = \sqrt[n]{2^n+n^3}$ (f)* $a_n = \sqrt[4n]{4^n+n^4+n^3}$ (g) $a_n = \sqrt[n]{\frac{5^n+3^n}{4^n-3^n}}$ (h)* $a_n = \sqrt[2n]{\frac{n^2\cdot 2^n+3^n}{\sqrt{4^n-3^n}}}$

2. Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét!

   (a) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt[2n]{(2n)!}}$ (b) $a_n = \dfrac{\sqrt{n-5}}{\sqrt[n]{(n-1)!}}$ (c) $a_n = \dfrac{n!}{2^n}$ (d) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

   (e) $a_n = \sqrt[n]{n!}$ (f) $a_n = \sqrt[2n]{n!}$ (g) $a_n = \dfrac{n!}{\sqrt{n^n}}$ (h) $a_n = \dfrac{n!}{n^5+1}$

   (i) $a_n = \dfrac{\sqrt{n!}}{(n+1)^2}$ (j) $a_n = \dfrac{n^n}{(2n)!}$ (k) $a_n = \dfrac{n^n}{(n!)^2}$ (l)* $a_n = n - \ln n!$

   (m)* $a_n = \dfrac{\ln n!}{n} - \ln n$ (n) $a_n = \ln (n+1)! - \ln n!$ (o) $a_n = n^2 - \ln n!$

3. Mutassunk példát olyan $(a_n), (b_n)$ sorozatokra, amelyekre $b_n > 0$, $\lim a_n = \lim b_n = 0$, emellett

   (a) $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$ (b) $\lim \frac{a_n}{b_n} = -\infty$ (c)* $\lim \frac{a_n}{b_n} = K$, ahol $K \in \mathbb{R}$ adott.

4. Mutassunk példát olyan $(a_n), (b_n)$ sorozatokra, amelyekre $\lim a_n = 0, \lim b_n = \infty$, emellett

   (a) $\lim a_n b_n = \infty$ (b) $\lim a_n b_n = -\infty$ (c)* $\lim a_n b_n = K$, ahol $K \in \mathbb{R}$ adott.

5. Mutassunk példát olyan $(a_n), (b_n)$ sorozatokra, amelyekre $\lim a_n = \infty$ és $\lim b_n = -\infty$, emellett

   (a) $\lim a_n + b_n = \infty$ (b) $\lim a_n + b_n = -\infty$ (c)* $\lim a_n + b_n = K$, ahol $K \in \mathbb{R}$ adott.

6. Mutassunk példát olyan (a_n) sorozatra, amelyre $\lim a_n = 0$, emellett

   (a) $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$ (b) $\lim \sqrt[n]{a_n} = 0$ (c)* $\lim \sqrt[n]{a_n} = K$, ahol $K \in (0,1)$ adott.

7. Mutassunk példát olyan pozitív tagú (a_n) sorozatra, amelyre $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, emellett

   (a) $\lim a_n = 0$ (b) $\lim a_n = \infty$ (c)* $\lim a_n = K$, ahol $K \in \mathbb{R}^+$ adott.

8. (a) Mutassunk példát olyan divergens sorozatokra, melyeknek szorzata konvergens!

   (b) Lehetséges, hogy egy konvergens és egy divergens sorozat összege konvergens?

   (c) Van-e olyan sorozat, amelynek minden $(a,b) \subset \mathbb{R}$ intervallumban van tagja? Lehet egy ilyen sorozatnak határértéke?

   (d)* Igazoljuk, hogy ha (a_n) konvergens, akkor $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$ teljesül! Igaz-e az előző állítás megfordítása?

   (e) Tudjuk, hogy az (a_n) sorozatnak végtelen sok tagja esik az $A \in \mathbb{R}$ minden környezetébe. Következik-e ebből, hogy $\lim a_n = A$?

   (f) Tudjuk, hogy az (a_n) sorozatnak végtelen sok tagja esik az I_1 és I_2 intervallumba is, ahol $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Lehet-e az (a_n) sorozatnak határértéke?

(g) * Melyek azon (a_n) sorozatok, amelyekre $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$, emellett A valamilyen környezetében csak véges sok különböző tagja van (a_n)-nek?

(h) Tudjuk, hogy az (a_n) sorozatnak végtelen sok olyan tagja van, amely nem eleme az A valamely környezetének. Lehetséges, hogy $\lim a_n = A$?

9. Számítsuk ki azon sorozatok határértékét, amelyek n-edik tagja az alábbi!

(a) $\dfrac{2\,(-1)^n}{3\sqrt[3]{n}+1}$ (b) $\dfrac{5^{n+1}}{n!}$ (c) $\dfrac{1+2+...+n}{(n+1)\,(n+10)}$ (d) $\left(\dfrac{\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}$

(e) $\dfrac{n!}{n^2}$ (f) $\dfrac{\sin n\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2n\pi}}$ (g) $\dfrac{3\cdot 8^{2n}-n^{10}\cdot 3^{3n}}{n^2\cdot 5^n+2\cdot 4^{3n+1}}$ (h) $\dfrac{\ln(n^2+1)}{\sqrt{n}}$

(i) $\dfrac{2^{2n}+n^2}{5^n-n}$ (j) $\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n^2}$ (k) $\dfrac{1+2+...+n}{n+4}-\dfrac{n}{2}$ (l) $\left(\dfrac{1}{n}+4\right)^n$

(m) $\dfrac{1-5^{n+1}}{5^n+1}$ (n) $\dfrac{n}{\sqrt{2+n^2}}$ (o) $\dfrac{5^n+5^{-n}}{5^n-5^{-n}}$ (p) $\left(\dfrac{5n+2}{5n+1}\right)^{n+1}$

(q) $\dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{n+\sqrt{2}}$ (r) $\left(\dfrac{\cos n\pi}{n}\right)^n$ (s) $(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}\dfrac{1}{\left[\frac{n}{2}\right]}$ (t) $\dfrac{\sqrt{\ln n}}{\ln\sqrt{n}}$