6. GYAKORLAT - valós függvények határértéke és folytonossága

1. Döntsük el, hogy az alábbi hozzárendeléssel megadott függvények közül melyeknek létezik jobb, illetve bal oldali határértéke azokban a pontokban, ahol nem értelmesek!

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ (c) $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ (d) $f(x) = \dfrac{1}{\ln^2 x}$

   (e) $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ (f) $f(x) = \sin\dfrac{1}{x^2}$ (g) $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ (h) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

   (i) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$ (j) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ (k) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ (l) $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$

2. Ki lehet-e terjeszteni az alábbi hozzárendeléssel megadott függvényeket $\mathbb{R}$-re úgy, hogy a kiterjesztéssel kapott függvények $\mathbb{R}$-en folytonosak legyenek?

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

   (d) $f(x) = x \cdot \ln|x|$ (e) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ (f) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

   (g) $f(x) = x \cdot \sin\dfrac{1}{x}$ (h) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \cos\dfrac{1}{x}$ (i) $f(x) = x \cdot \ln(|\cos x|)$

3. Az átviteli elv segítségével indokoljuk meg, hogy a következő hozzárendeléssel adott függvények nem folytonosak a 0 helyen!

   (a) $g(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$ (b) $g(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

   (c) $g(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ (d) $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

4. Mutassunk olyan f és g függvényeket, amelyekre $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g) = \mathbb{R}$, nem folytonosak mindenütt, de

   (a) $f + g$ folytonos $\mathbb{R}$-en.
   (b) f^2 folytonos $\mathbb{R}$-en.
   (c) fg folytonos $\mathbb{R}$-en.
   (d) $f \circ g$ folytonos $\mathbb{R}$-en.

5. Az alábbi egyenletek közül melyeknek van megoldása a megadott intervallumokon?

   (a) $x = e^{-x}, \quad x \in (0,1)$ (b) $\ln x = -x, \quad x \in (0,2)$

   (c) $\operatorname{arc\,tg} x = 3e^{-x}, \quad x \in (0,2)$ (d) $\operatorname{ch} x \sin x = \cos x, \quad x \in (0,\pi)$

   (e) $\operatorname{sh}\, \sin x = 1, \quad x \in (0, \frac{\pi}{2})$ (f) $\operatorname{ch} x = 2 - x^2, \quad x \in (1,5)$

   (g) $\ln x = (x-2)^2, \quad x \in (0,4)$ (h) $x^9 - 5x^2 + x - 3 = 0, \quad x \in \mathbb{R}$

6. Bizonyítsuk be, hogy minden páratlan fokú polinomnak van valós gyöke!

7. Ellenőrizzük a Weierstrass-maximumelv feltételeinek szükségességét az alábbiak szerint!

   (a) Mutassunk olyan $f : [0,2] \to \mathbb{R}, \mathcal{D}_f = [0,2]$ függvényt, amelynek nincsen maximuma!

(b) Mutassunk olyan $f : (0, 2) \to \mathbb{R}, \mathcal{D}_f = (0, 2)$ folytonos függvényt, amelynek nincsen minimuma!

(c) Mutassunk olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ folytonos függvényt, amelynek nincsen maximuma!

8. Bizonyítsuk be, hogy ha az f függvény folytonos $\mathbb{R}$-en, továbbá a $\lim_{\infty} f = \lim_{-\infty} f = \infty$, akkor f-nek van minimuma!