8. GYAKORLAT - kompozíciófüggvények deriválása, monotonitás, szélsőérték

Az elemi függvények deriváltjain kívül használhatjuk a következő nevezetes deriváltakat is:

$\text{arc sin}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad$ $\text{arc cos}'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\quad$ $\text{arc tg}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$\text{ar sh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ $\quad$ $\text{ar ch}'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

1. Számítsuk ki az alábbi hozzárendeléssel adott függvények deriváltjait! Az értelmezési tartomány minden esetben a lehetséges legbővebb halmaz, ahol a kompozíciófüggvények értelmesek.

   (a1) $f(x) = \sin^5 x$ (a2) $f(x) = \sin 5x$ (a3) $f(x) = \sin x^5$

   (b1) $f(x) = \sin^5 5x^5$ (b2) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ (b3) $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$

   (c1) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ (c2) $f(x) = \ln\dfrac{\sqrt{1-x^2}+1}{x}$ (c3) $f(x) = \ln \sin x$

   (d1) $f(x) = \ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$ (d2) $f(x) = \arcsin 2x$ (d3) $f(x) = \arccos\dfrac{1}{x}$

   (e1) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ (e2) $f(x) = 2^{3x-1}$ (e3) $f(x) = \cos 2xe^{-x}$

   (f1) $f(x) = x^{2x}$ (f2) $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$ (f3) $f(x) = \operatorname{arth}\sqrt{x+1}$

2. Számítsuk ki a g függvény második és harmadik deriváltját, ha g a következő hozzárendeléssel adott:

   (a) $g(x) = x^3$ (b) $g(x) = \cos 2x$ (c) $g(x) = e^{\frac{x}{2}}$ (d) $g(x) = e^{-x}$

3. Számítsuk az $f'(1), f'(2), f'(3)$ értékeket, ha $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$!

4. Határozzuk meg az alábbi hozzárendeléssel adott függvények $\lim\limits_{\infty} f$, $\lim\limits_{-\infty} f$ határértékeit, továbbá az egyoldali határértékeket mindazon $x \in \mathbb{R}$ pontokban, ahol f nem értelmes, végül azokat a (legbővebb) intervallumokat, ahol f monoton növő, monoton csökkenő, valamint ezek alapján f szélsőértékhelyeit!

   (a) $f(x) = x^3 - x$ (b) $f(x) = x^4 - x^2$ (c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ (d) $f(x) = \dfrac{1+x}{x^3}$

   (e) $f(x) = \dfrac{1}{1+\ln x}$ (f) $f(x) = x + \ln x$ (g) $f(x) = xe^x$ (h) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

5. Adjunk meg olyan harmadfokú polinomfüggvényt, amelynek pontosan egy lokális maximuma és lokális minimuma van!

6. Tudjuk, hogy az f valós függyvény 2-szer deriválható, továbbá $f'(0) = 1$ és $f'(1) = -1$. Következik-e ebből, hogy az f függvénynek a $(0,1)$ intervallumban van maximuma, illetve minimuma?

7. Legyenek valamilyen $b > 0$ esetén $f, g : [0,b] \to \mathbb{R}$ folytonosak és deriválhatók a $(0,b)$ halmazon (miért nem a $[0,b]$ halmazon követeljük meg ezt is?), $f(0) = g(0)$, továbbá $f'(x) \leq g'(x)$ a a $(0,b)$ halmazon. Igazoljuk, hogy ekkor $f(b) \leq g(b)$ teljesül!

8. Tegyük fel, hogy az f valós függvény nullában deriválható, továbbá teljesül az $f(x) - f(0) < x$ reláció minden $x \in (0,1)$ esetén. Igazoljuk, hogy $f'(0) \leq 1$ becslés érvényes!

9. Tegyük fel, hogy az f valós függvény olyan, hogy $\lim\limits_{x\to 0} f(x) - f(0) \neq 0$. Lehet-e ekkor f deriválható nullában?

10. A következő relációk melyikéből következik, hogy az f valós függvény a nulla helyen deriválható? A derivált értékét is meg tudjuk adni ezen esetekben?

    (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 0$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{\sqrt{x}} = 0$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x^2} = 0$

11. Mutassunk olyan függvényt, amely 2-szer deriválható, de 3-szor nem!

12. Hány olyan függvény van, amely azonos a deriváltjával?