9. GYAKORLAT - szélsőértékek, konvexitás, Lagrange-középértéktétel

1. Állapítsuk meg a második derivált kiszámításával, hogy a következő függvényeknek milyen szélsőértékük van a megadott helyeken (ezzel a 8./4. már kiszámított eredményeket ellenőrizzük)!

   (a) $f(x) = x^3 - x,\ x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $f(x) = x^4 - x^2,\ x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

   (c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x},\ x = \pm 1$ (d) $f(x) = \dfrac{1+x}{x^3},\ x = -\dfrac{3}{2}$

2. Mutassunk olyan valós függvényeket, amikor valamilyen x-re $f'(x) = 0$ és $f''(x) = 0$ teljesül, emellett

   (a) f-nek x-ben szigorú lokális minimuma van.

   (b) f-nek x-ben szigorú lokális maximuma van.

   (c) f-nek x-ben nincs szélsőértéke.

3. Milyen maximális intervallumokon konvexek, illetve konkávak az alábbi hozzárendeléssel definiált függvények?

   (a) $f(x) = \dfrac{x^4}{2} + x^3 - 6x^2 - 5x$ (b) $f(x) = |x-1|$ (c) $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$

   (d) $f(x) = xe^x$ (e) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ (f) $f(x) = \sqrt{x^2+2x+2}$

   (g) $f(x) = \sin\dfrac{x}{2}$ (h) $f(x) = \arcsin x$ (i) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

4. Lehet egy harmadfokú polinomfüggvénynek pontosan kettő vagy három inflexiós pontja?

5. Igazoljuk, hogy ha f és g az I intervallumon konvex függvények, akkor tetszőleges $c \in \mathbb{R}^+$ esetén a cf és $f+g$ konvexek I-n!

6. Igazoljuk, hogy ha f és g az I intervallumon konvex függvények, akkor tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}^+$ esetén az $x \to af(x) + bg(x)$ hozzárendeléssel adott függvény is konvex I-n!

7. Igazoljuk, hogy ha f az I intervallumon konvex függvény, akkor tetszőleges $c \in \mathbb{R}^+$ esetén az $x \to f(cx)$ és $x \to f(c+x)$ hozzárendeléssel adott függvények is konvexek az $\frac{1}{c}I = \{\frac{x}{c} : x \in I\}$, illetve az $I - c = \{x - c : x \in I\}$ intervallumon!

8. Mutassunk olyan f és g az I intervallumon konvex függvényeket, melyekre fg nem konvex az I intervallumon!

9. Igazoljuk, hogy ha f és g függvények az I intervallumon pozitívak, konvexek és monoton növők, akkor fg is konvex az I intervallumon!

10. Igazoljuk, hogy ha f deriválható az I nyílt intervallumon, és f konvex I-n, akkor

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

    teljesül minden $x_0, x \in I$ esetén!

11. Igazoljuk, hogy ha $f'' = 0$ teljesül az I nyílt intervallumon, akkor f ott egy elsőfokú polinomfüggvény!

12. Igazoljuk, hogy ha $f \in D(I)$ és az $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ pontokra fennáll, hogy $f(x_1) = x_1$ és $f(x_2) = x_2$, akkor van olyan $x \in (x_1, x_2)$, amelyre $f'(x) = 1$ teljesül!

13. Legyen f differenciálható, φ monoton növő és differenciálható I-n, emellett $|f'(x)| < \varphi'(x)\ \forall x \in I$. Lássuk be, hogy ekkor $|f(x) - f(y)| < \varphi(x) - \varphi(y)$, ha $x > y$!

14. Az előző feladat segítségével igazoljuk az alábbi egyenlőtlenségeket!

    (a) $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1+x), \quad x > 0$

    (b) $x - \dfrac{x^3}{3} < \tan x, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

    (c) $1 + \ln x < 2\sqrt{x}, \quad x > 1$

    (d) $\mathrm{sh} x^2 > x^2, \quad x \in \mathbb{R}^+$

    (e) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$

    (f) $|\arctan(a) - \arctan(b)| \leq |a - b|$

    (g) $\dfrac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x, \quad x > 0$

    (h) $\dfrac{a-b}{a} \leq \ln\dfrac{a}{b} \leq \dfrac{a-b}{b}, \quad 0 < b < a.$