Analízis jegyzet

Sikolya Eszter
ELTE TTK Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

2017. szeptember 20.

Tartalomjegyzék

Előszó

Ez a jegyzet elsősorban az általános iskolai és középiskolai Matematikatanári Szak hallgatói számára készült. Felépítésében nagyrészt az Eötvös Loránd Tudományegyetem Osztatlan Matematikatanári Szakjának Bevezető analízis 1-2, Egyváltozós analízis 1-2, valamint Többváltozós analízis 1-2 tárgyainak tematikáját követem. Egyes témaköröket azonban a szigorúan vett vizsgaanyagnál bővebben tárgyalok, amivel az adott téma jobb megértését kívánom szolgálni, valamint az érdeklődő hallgatók számára egy megalapozottabb háttértudást szeretnék nyújtani.

A jegyzet során használni fogom a „létezik... és egyenlő..." állítás következő jelölésbeli egyszerűsítését: például, a $\exists \lim_a f = A$ azt jelenti, hogy f-nek létezik határértéke az a pontban, és a határérték egyenlő A-val.

Ezúton is szeretnék köszönetet mondani Besenyei Ádámnak a jegyzet elkészítésében nyújtott sok segítségéért.

Sikolya Eszter

1. fejezet

Bevezetés

A matematika minden ágának elsajátításához szükség van a logikus gondolkodás képességére. Alapfogalmakból és igaznak elfogadott összefüggésekből kiindulva egyre bonyolultabb állításokat vezetünk le pusztán a logika segítségével, és így építjük fel a matematikát. Szükség van tehát a logikai műveletek és bizonyítási módszerek pontos megfogalmazására, illetve a kiindulási alapfogalmak (többek között a halmazok, függvények és a valós számok) precíz bevezetésére. A fejezet célja ezen elengedhetetlen alapok megteremtése.

1.1. Logikai állítások, műveletek, tagadás

A következőkben néhány alapvető logikai fogalmat tárgyalunk. *Állítás*nak nevezünk egy olyan kijelentést, melyről egyértelműen eldönthető, hogy igaz vagy hamis. Pl.: Ez az alma piros. A tábla zöld.

1.1. Definíció. *Logikai műveletek:* állításokból képeznek új állításokat. Legyen A és B egy-egy állítás.

1. *és*, jele: $\wedge$

   $A \wedge B$ pontosan akkor igaz, ha A és B is igaz.

2. *vagy*, jele: $\vee$ (fontos! megengedő vagy)

   $A \vee B$ pontosan akkor igaz, ha A vagy B igaz.

3. *nem*, jele: $\neg$

   $\neg A$ pontosan akkor igaz, ha A hamis (és fordítva).

4. *következtetés (implikáció)*, jele: $\Rightarrow$

   $A \Rightarrow B$ pontosan akkor igaz, ha $\neg A$ vagy B igaz.

5. *ekvivalencia*, jele: $\Leftrightarrow$

   $A \Leftrightarrow B$ pontosan akkor igaz, ha $A \Rightarrow B$ és $B \Rightarrow A$ is igaz.

A logikai műveletekkel kapcsolatosan érdemes megemlíteni az ún. *de Morgan-azonosságokat*, melyek az *és*-sel, illetve *vagy*-gyal összekötött állítások tagadásáról szólnak:

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B;$$

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B.$$

Az $A \Rightarrow B$ implikáció *tagadása* – a következtetés „hétköznapi" fogalmának megfelelően – az $A \wedge \neg B$ állítás. Az első de Morgan-azonosság alapján így

$$A \Rightarrow B = \neg(A \wedge \neg B) = \neg A \vee B,$$

ami megegyezik a definíciónkkal. Ebből az is látszik, hogy hamis állításból minden állítás következik. (Például a „Ha a 2 páratlan szám, akkor a fű piros." állítás igaz.)

Vannak olyan állítások, melyek változó(ka)t tartalmaznak, ezeket szokás *nyitott mondat*nak nevezni. Egy ilyen állítás igazságértéke a változó értékétől függ. Pl.: Az n szám négyzetszám. Az x valós számra $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Ha $A(x)$ nyitott mondat (x a változó), akkor ebből új állításokat nyerhetünk a $\exists$ (létezik) és $\forall$ (minden) ún. *kvantorok* segítségével:

$$(\forall x)A(x),$$

aminek a jelentése: „minden szóbajöhető x-re $A(x)$ igaz", a

$$(\exists x)A(x)$$

pedig „van olyan szóbajöhető x, amelyre $A(x)$ igaz." Például: $(\forall x)\ x^2 - 3x + 2 \geq 0$.

A fenti állítások *tagadása*:

$$\neg((\forall x)A(x)) = (\exists x)\neg A(x),$$

$$\neg((\exists x)A(x)) = (\forall x)\neg A(x).$$

A példában szereplő állítás tagadása: $(\exists x)\ x^2 - 3x + 2 < 0$.

1.2. Bizonyítási módszerek

Indirekt bizonyítás

Ennek a bizonyítási módszernek a menete, hogy feltesszük a bizonyítandó állítás ellenkezőjét, és ebből ellentmondásra jutunk. Tehát, ha a B állítást akarjuk bizonyítani, és az A egy igaz állítás (amellyel majd ellentmondásra jutunk), akkor a $\neg B \Rightarrow \neg A$ állítást látjuk be. Az implikáció definíciója alapján

$$\neg B \Rightarrow \neg A = \neg(\neg B) \vee \neg A = B \vee \neg A = A \Rightarrow B,$$

tehát valójában a B állítás következését igazoljuk az A (igaz) állításból. Példa:

1.2. Állítás. *$\sqrt{2}$ irracionális.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy $\sqrt{2}$ racionális. Ez azt jelenti, hogy vannak olyan p, q pozitív egész számok, $q \neq 0$, továbbá p és q legnagyobb közös osztója 1, melyekre

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

Mindkét oldalt négyzetre emelve kapjuk, hogy

$$2 = \frac{p^2}{q^2}, \text{ amiből } 2q^2 = p^2.$$

Ebből látszik, hogy p^2, így p is páros szám kell legyen, vagyis $p = 2r$, ahol r egész. Így

$$2q^2 = 4r^2, \text{ vagyis } q^2 = 2r^2,$$

tehát q is páros. Ez ellentmond annak, hogy p és q legnagyobb közös osztója 1, tehát a kiinduló feltevés hamis, így $\sqrt{2}$ irracionális. □

1.3. Feladat. Indirekt módon igazoljuk, hogy ha egy m egész számra $\sqrt{m}$ nem egész, akkor $\sqrt{m}$ irracionális.

Teljes indukció

Teljes indukcióval olyan állításokat bizonyítunk, melyek *minden* n (vagy *minden elég nagy* n) természetes számra vonatkoznak. *Természetes számok*nak nevezzük a középiskolából ismert $0, 1, 2, \ldots$ (egész) számokat, a belőlük képezett halmazt pedig $\mathbb{N}$-nel jelöljük. (Pontos definíciójuk az 1.6.3. alszakaszban található.) A teljes indukció menete a következő.

1. Belátjuk az állítást $n = 0$-ra (vagy arra a legkisebb n-re, amiről az állítás szól).

2. Belátjuk a következőt: *ha* az állítás *valamelyik* n természetes számra igaz, *akkor* igaz $n + 1$-re is.

A természetes számok tulajdonságaiból következik, hogy a fenti két lépés bizonyításával az állítást *minden* természetes számra beláttuk. Ugyanis az 1. lépés alapján az állítás igaz $n = 0$-ra. A 2. lépésből tudjuk, hogy *ekkor* az állítás igaz $n = 0 + 1 = 1$-re is. Ismét alkalmazva a 2. lépést, tudjuk, hogy az állítás igaz $n = 1 + 1 = 2$-re. És így tovább. Ez alapján, ha lenne olyan n természetes szám, melyre nem teljesül az állítás, akkor $n-1$-re sem teljesülhetne (a 2. lépés. miatt), ugyanezért $n - 2$-re sem teljesülne, és így tovább. Végül, azt kapnánk, hogy $n = 0$-ra sem igaz az állítás, ami ellentmond annak, amit az 1. lépésben beláttunk.
A 2. lépésben szereplő feltevést szokás *indukciós feltételnek* is nevezni.
Példa:

1.4. Állítás. *Minden $n \geq 1$ természetes számra*

$$2^n > n.$$

Bizonyítás. Végrehajtjuk a teljes indukció lépéseit.

1. $n = 1$ esetén az egyenlőtlenség $2^1 > 1$ alakú, és mivel $2^1 = 2$, ezért $2 > 1$ teljesül.

2. Most tegyük fel, hogy az állítás *valamelyik* n természetes számra igaz, vagyis *erre* az n-re $2^n > n$. Lássuk be, hogy ekkor $n + 1$-re is igaz! A belátandó állítás tehát:

   $$2^{n+1} > n + 1.$$

   Mivel $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$, és a feltevés szerint $2^n > n$, ezért

   $$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot n.$$

   Másrészt bármilyen $n \geq 1$ egészre $2 \cdot n \geq n + 1$, tehát

   $$2^{n+1} > n + 1,$$

   és ezt kellett belátnunk.

$\square$

1.5. *Megjegyzés.* A fenti állítás $n = 0$-ra is teljesül (hiszen $2^0 = 1 > 0$), de az indukciós lépés csak $n \geq 1$ esetén működik.

1.6. Feladat. Teljes indukcióval igazoljuk az alábbiakat!

1. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

2. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

1.7. *Megjegyzés.* A teljes indukciós bizonyítási módszernek egy változata, ha a 2. lépésben azt tesszük fel, hogy az állítás minden n-nél kisebb vagy egyenlő természetes számra igaz, és ebből bizonyítunk $n+1$-re.

Fontos látnunk, hogy az indukció 2. lépésében *nem* azt tesszük fel, hogy az állítás *bármely* n-re igaz – hiszen akkor magának az állításnak az igaz voltát tételeznénk fel, amit pedig bizonyítani akarunk. *Csak* annyit teszünk fel, hogy az állítás *egy* (*valamelyik*) n természetes számra igaz. Ilyen n létezik, hiszen az 1. lépésben éppen ezt láttuk be.

1.3. Fontos egyenlőségek, egyenlőtlenségek

A továbbiakban a középiskolából jól ismert valós számok halmazát jelölje $\mathbb{R}$. (A valós számokat az 1.6. szakaszban pontosabban is bevezetjük.)

1.8. Tétel (Bernoulli-egyenlőtlenség). *Minden $n \geq 1$ természetes szám és $a \geq -1$, $a \in \mathbb{R}$ esetén*

$$(1+a)^n \geq 1 + n \cdot a.$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $n = 1$ vagy $a = 0$.

Bizonyítás. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük.

1. $n = 1$ esetén a belátandó állítás

   $$1 + a \geq 1 + a,$$

   ami tetszőleges a-ra igaz.

2. Tegyük fel most, hogy az állítás *valamelyik* $n \geq 1$ természetes számra igaz! Lássuk be, hogy ekkor az egyenlőtlenség $n+1$-re is teljesül, vagyis

   $$(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot a.$$

   Az indukciós feltevés szerint

   $$(1+a)^n \geq 1 + n \cdot a.$$

   Ebből, kihasználva, hogy $1 + a \geq 0$ (mivel $a \geq -1$), kapjuk, hogy

   $$(1+a) \cdot (1+a)^n \geq (1+a) \cdot (1 + n \cdot a) = 1 + (n+1) \cdot a + n \cdot a^2. \tag{1.1}$$

   Tudjuk, hogy

   $$(1+a)^{n+1} = (1+a) \cdot (1+a)^n, \tag{1.2}$$

   így összevetve az (1.1) és az (1.2) egyenlőségeket kapjuk, hogy

   $$(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot a + n \cdot a^2 \geq 1 + (n+1) \cdot a, \tag{1.3}$$

   amit látni akartunk.

Hátravan még az egyenlőség teljesülésének esete. Világos, hogy $n = 1$, ill. $a = 0$ esetén egyenlőség teljesül. Ha azt tesszük fel, hogy egyenlőség van, és $n > 1$, akkor a belátott egyenlőtlenséget felhasználva

$$1+n\cdot a = (1+a)^n = (1+a)\cdot(1+a)^{n-1} \geq (1+a)\cdot(1+(n-1)\cdot a) = 1+n\cdot a+(n-1)\cdot a^2.$$

Innen $(n-1)\cdot a^2 \leq 0$, tehát ($n > 1$ miatt) $a = 0$. □

A Bernoulli-egyenlőtlenségnek van egy általánosított alakja is, ami az előbbihez hasonló módon, teljes indukcióval igazolható.

1.9. Tétel (Általánosított Bernoulli-egyenlőtlenség)**.** *Minden* $n \geq 1$ *természetes szám és* $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq -1$ *azonos előjelű valós számok esetén*

$$(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq 1+a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

1.10. Tétel (Binomiális tétel)**.** *Tetszőleges* $a, b \in \mathbb{R}$ *és* $n \in \mathbb{N}$ *esetén*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}b^n + \binom{n}{1}ab^{n-1} + \binom{n}{2}a^2b^{n-2} + \cdots + \binom{n}{n-1}a^{n-1}b + \binom{n}{n}a^n, \quad (1.4)$$

másképp írva:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}.$$

Itt $k! = 1\cdot 2\cdots k$*,* $0! = 1$ *jelöléssel*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Bizonyítás. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük.

1. $n = 0$ esetén az egyenlőség
$$(a+b)^0 = \binom{0}{0}b^0,$$
ami $1 = 1$.

2. Tegyük fel, hogy az (1.4) egyenlőség *valamelyik* n-re teljesül! Belátjuk, hogy $n+1$-re is igaz. Mivel $(a+b)^{n+1} = (a+b)\cdot(a+b)^n$, ezért az indukciós feltevés szerint
$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)\cdot\left(\binom{n}{0}b^n + \binom{n}{1}ab^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}a^{n-1}b + \binom{n}{n}a^n\right)\\ &= \binom{n}{0}ab^n + \binom{n}{1}a^2b^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1}a^nb + \binom{n}{n}a^{n+1} +\\ &+ \binom{n}{0}b^{n+1} + \binom{n}{1}ab^n + \binom{n}{2}a^2b^{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}a^nb\end{aligned}$$

$$= \binom{n}{0} b^{n+1} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] ab^n + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right] a^2 b^{n-1} + \cdots$$
$$+ \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right] a^n b + \binom{n}{n} a^{n+1}.$$

Felhasználva, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és $k \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le n$ esetén

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k},$$

továbbá

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}, \quad \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1},$$

kapjuk, hogy

$(a+b)^{n+1} =$

$$\binom{n+1}{0} b^{n+1} + \binom{n+1}{1} ab^n + \binom{n+1}{2} a^2 b^{n-1} + \cdots + \binom{n+1}{n} a^n b + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1},$$

ami épp a bizonyítandó állítás $n+1$-re.

□

1.11. *Megjegyzés.* A Binomiális tételből $a \ge 0$ esetén következik a Bernoulli-egyenlőtlenség. Ugyanis, az $(1+a)^n$ kifejezést az (1.4) egyenlőség szerint kifejtve ($b = 1$) minden tag nagyobb vagy egyenlő, mint 0, így a jobb oldalt csökkentjük, ha csak az első két tagot hagyjuk meg, vagyis

$$(1+a)^n \ge \binom{n}{0} + \binom{n}{1} a = 1 + na,$$

ami épp a kívánt Bernoulli-egyenlőtlenség.

1.12. Tétel (Számtani–mértani–harmonikus közép közti egyenlőtlenség)**.**
Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ tetszőleges számok ($n \ge 1$). Ekkor

$$A_n := \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \qquad \textit{(számtani közép)},$$

$$G_n := \sqrt[n]{a_1 \cdot \cdots \cdot a_n} \qquad \textit{(mértani/geometriai közép)},$$

$$H_n := \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \qquad \textit{(harmonikus közép)}$$

jelöléssel

$$H_n \le G_n \le A_n. \tag{1.5}$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

1.13. *Megjegyzés.* A *közép* elnevezés onnan ered, hogy mindhárom mennyiség a megfelelő a_i számok legkisebb és legnagyobb értéke között van, vagyis

$$\min_{i=1,\ldots,n}\{a_i\} \leq H_n \leq G_n \leq A_n \leq \max_{i=1,\ldots,n}\{a_i\}.$$

Bizonyítás. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük. Az állítás $n = 1$ esetben triviális. Tegyük fel most, hogy valamely n-re és tetszőleges $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ számokra

$$A_n \geq G_n.$$

Legyenek adva $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1} > 0$ számok, és tegyük fel, hogy úgy vannak sorba rendezve, hogy a_{n+1} az (egyik) legnagyobb közülük (világos, hogy az állítás nem függ a számok sorrendjétől). Be kell látnunk, hogy $A_{n+1} \geq G_{n+1}$, vagyis mindkét oldalt $n+1$-edik hatványra emelve

$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} \geq a_1 \cdot \cdots \cdot a_n \cdot a_{n+1}, \tag{1.6}$$

ami a belátandó állítással ekvivalens. Az alábbi átalakítást végezzük el:

$$\begin{aligned}\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} &= \left(\frac{n \cdot A_n + a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= \left(\frac{(n+1) \cdot A_n + a_{n+1} - A_n}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= \left(A_n + \frac{a_{n+1} - A_n}{n+1}\right)^{n+1}.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Mivel a_{n+1} az (egyik) legnagyobb szám, ezért könnyen látható, hogy $a_{n+1} - A_n \geq 0$. Így a kapott kifejezést a Binomiális tétel szerint kifejtve az (1.4) összegben minden tag pozitív. Ezért a hatvány értékét nem növeljük, ha az (1.4) összegnek csak az utolsó két tagját hagyjuk meg, vagyis

$$\begin{aligned}\left(A_n + \frac{a_{n+1} - A_n}{n+1}\right)^{n+1} &\geq \binom{n+1}{n} A_n^n \cdot \frac{a_{n+1} - A_n}{n+1} + \binom{n+1}{n+1} A_n^{n+1} \\ &= (n+1) \cdot A_n^n \cdot \frac{a_{n+1} - A_n}{n+1} + A_n^{n+1} \\ &= A_n^n \cdot (a_{n+1} - A_n) + A_n^{n+1} = A_n^n \cdot a_{n+1}.\end{aligned} \tag{1.8}$$

Az indukciós feltevés szerint

$$A_n^n \cdot a_{n+1} \geq G_n^n \cdot a_{n+1} = a_1 \cdot \cdots \cdot a_n \cdot a_{n+1},$$

tehát (1.7) és (1.8) alapján

$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} \geq a_1 \cdot \cdots \cdot a_n \cdot a_{n+1},$$

ami éppen a bizonyítandó (1.6) egyenlőtlenség.

A mértani és harmonikus közép közti egyenlőtlenség könnyen adódik az előbb bizonyított mértani és számtani közép közti egyenlőtlenségből. Alkalmazzuk ez utóbbit az $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ számok reciprokaira, ebből

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1 \cdot \cdots \cdot a_n}}.$$

Mindkét oldal reciprokát véve kapjuk:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot \cdots \cdot a_n},$$

ami épp a bizonyítandó állítás.

Ha $a_1 = \cdots = a_n$, akkor az (1.5) egyenlőtlenségek egyenlőséggel teljesülnek. Belátjuk, hogy

$$G_n = A_n \Longrightarrow a_1 = \cdots = a_n,$$

a harmonikus közép esete hasonlóan bizonyítható. Tegyük fel indirekt módon, hogy $A_n = G_n$, de például $a_1 \neq a_2$. Cseréljük ki a_1-t és a_2-t is $\frac{a_1+a_2}{2}$-re, az $a_3, \ldots, a_n$ számokat hagyjuk változatlanul! Ekkor könnyen látható, hogy az

$$\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_1 + a_2}{2}, a_3, \ldots, a_n$$

számok számtani közepének értéke változatlanul A_n. Másrészt

$$a_1 \cdot a_2 < \frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} \Longleftrightarrow 0 < (a_1 - a_2)^2$$

teljesül, mivel $a_1 \neq a_2$. Így

$$\frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_1+a_2}{2} + a_3 + \cdots + a_n}{n} = A_n = G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} < \sqrt[n]{\frac{a_1 + a_2}{2} \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} \cdots a_n}.$$

Tehát azt kaptuk, hogy az $\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_1+a_2}{2}, a_3, \ldots, a_n$ számok mértani közepe nagyobb, mint a számtani közepe, ami ellentmondás. $\square$

1.14. *Megjegyzés.* Az előbbi bizonyításban az (1.8) becslés következik a Bernoulli-egyenlőtlenségből is, hiszen

$$\begin{aligned}\left(A_n + \frac{a_{n+1} - A_n}{n+1}\right)^{n+1} &= A_n^{n+1}\left(1 + \frac{a_{n+1} - A_n}{A_n \cdot (n+1)}\right)^{n+1} \\ &\geq A_n^{n+1}\left(1 + (n+1) \cdot \frac{a_{n+1} - A_n}{A_n \cdot (n+1)}\right) \\ &= A_n^{n+1} + A_n^n \cdot (a_{n+1} - A_n) = A_n^n \cdot a_{n+1}.\end{aligned}$$

A fenti egyenlőtlenségláncolathoz kapcsolható még egy: a négyzetes középről szóló. Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok ($n \geq 1$) *négyzetes közepe:*

$$Q_n := \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

1.15. Tétel. *Az $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ számok ($n \geq 1$) közepei között fennáll az alábbi egyenlőtlenség:*

$$H_n \leq G_n \leq A_n \leq Q_n.$$

Bizonyítás. Világos, hogy a fentiek alapján elég az utolsó egyenlőtlenséget bizonyítani. Négyzetre emelve mindkét oldalt, igazolandó, hogy

$$\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)^2 \leq \frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}.$$

Mindkét oldalt n^2-tel megszorozva és átrendezve kapjuk, hogy

$$0 \leq (n-1)\left(a_1^2 + \cdots + a_n^2\right) + 2\sum_{i<j} a_i a_j = \sum_{i<j} (a_i - a_j)^2,$$

ami nyilván teljesül. □

Fontos nevezetes egyenlőtlenség a Cauchy–Schwarz- vagy Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség. Találkozunk vele később (esetleg más-más formában) mind az analízis mind a matematika egyéb területein is.

1.16. Tétel (Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség)**.** *Tetszőleges $a_1, \ldots, a_n$ és $b_1, \ldots, b_n$ valós számokra*

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}. \tag{1.9}$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha valamelyik sorozat „többszöröse” a másiknak, azaz $b_1 = ca_1, \ldots, b_n = ca_n$ valamilyen c valós számra.

Bizonyítás. Világos, hogy minden valós x-re

$$(a_ix - b_i)^2 = a_i^2x^2 - 2a_ib_ix + b_i^2 \geq 0$$

teljesül. Ezeket az egyenlőtlenségeket $i = 1, \ldots, n$-re összeadva azt kapjuk, hogy minden valós x-re

$$(a_1^2 + \cdots + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + \cdots a_nb_n)x + (b_1^2 + \cdots + b_n^2) \geq 0.$$

Ez csak úgy teljesülhet, ha a szereplő másodfokú polinom diszkriminánsa kisebb vagy egyenlő, mint 0, azaz

$$4(a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2 - 4(a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2) \leq 0,$$

amiből átrendezéssel adódik a kívánt egyenlőtlenség.

Ha $b_1 = ca_1, \ldots, b_n = ca_n$ valamely c valós számra, akkor könnyen látható, hogy egyenlőség teljesül. Megfordítva, ha egyenlőség áll fenn, az azt jelenti, hogy a fentiekben vizsgált diszkrimináns 0. Vagyis a másodfokú polinomnak pontosan egy gyöke van, ami csak úgy lehet, ha az $(a_ix - b_i)^2$ alakú tagok mindegyike 0. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy $b_i = ca_i$, $i = 1, \ldots, n$, ahol $x = c$ a gyök. □

1.4. Halmazok

A *halmaz* és az $\in$ (tartalmazás) fogalmát alapfogalomnak tekintjük.

Egy halmazt akkor tekintünk ismertnek, ha minden jól megfogalmazható dologról el tudjuk dönteni, hogy hozzá tartozik vagy nem tartozik hozzá. (Az „okos gondolat", a „szép lány", az „elég nagy szám" vagy a „kicsi pozitív szám" nem tekinthető jól megfogalmazott dolognak, ezért ezekről nem kérdezzük, hogy benne vannak-e valamilyen halmazban vagy hogy alkotnak-e halmazt.)[1]

Legyen A halmaz, x egy jól definiált dolog. Ha x hozzátartozik a halmazhoz, akkor ezt $x \in A$ jelöli. Ha x nem tartozik hozzá a halmazhoz, akkor ezt $x \notin A$ jelöli.

A halmaz elemeit felsorolhatjuk, például

$$A := \{a, b, c, d\}.$$

Itt nem számít, hogy egy elemet hányszor sorolunk fel (tehát, például az $\{a, a, b, b, b, c, d\}$ ugyanazt az A halmazt definiálja, mint az $\{a, b, c, d\}$). Más módon egy értelmes tulajdonsággal adhatjuk meg a halmazt, például

$$B := \{x \colon x \text{ valós szám és } x^2 < 2\}.$$

A B halmaz megadásánál használni fogjuk az alábbi (kevésbé precíz) felírást is:

$$B := \{x \in \mathbb{R} \colon x^2 < 2\}.$$

[1] Vigyázat! A halmazelméletben vannak buktatók is, melyekre itt nem térünk ki. Például, az „összes halmazok halmaza" vagy a „legkisebb, 100 szónál kevesebbel nem definiálható valós szám" nem létezik.

1.17. Definíció. Legyen A és B halmaz. Azt mondjuk, hogy A *része* vagy *részhalmaza* a B halmaznak, ha minden $x \in A$ esetén $x \in B$. Jele: $A \subset B$.

1.18. Definíció. Legyen A és B halmaz. Az A halmaz *egyenlő* a B halmazzal, ha ugyanazok az elemei. Jele: $A = B$.

Fontos, hogy az analízisben a fenti $\subset$ halmazok közötti ún. reláció jelenthet egyenlőséget is. Könnyen meggondolható az alábbi

1.19. Állítás. *Legyen A és B halmaz. Ekkor $A = B$ pontosan akkor, ha $A \subset B$ és $B \subset A$.*

A következőkben definiálunk néhány műveletet, melyekkel halmazokból újabb halmazokhoz juthatunk.

1.20. Definíció. Legyen A és B halmaz. Az A és B *egyesítése (uniója)* az a halmaz, amelyre

$$A \cup B := \{x \colon x \in A \text{ vagy } x \in B\}.$$

Az A és B *metszete (közös része)* az a halmaz, amelyre

$$A \cap B := \{x \colon x \in A \text{ és } x \in B\}.$$

Az A és B *különbsége* az a halmaz, amelyre

$$A \setminus B := \{x \colon x \in A \text{ és } x \notin B\}.$$

A metszet és a különbség képzése során elképzelhető, hogy egyetlen x dolog sem rendelkezik a kívánt tulajdonsággal.

1.21. Definíció. Azt a halmazt, amelynek egyetlen jól definiálható dolog sem eleme, *üres halmaz*nak nevezzük. Jele: $\emptyset$.

1.22. Definíció. Legyen H halmaz és $A \subset H$ egy részhalmaza. Az A halmaz (H-ra vonatkozó) *komplementerén* az

$$A^c := H \setminus A$$

halmazt értjük. (A komplementerhalmaz jelölésére sosem fogjuk az $\bar{A}$-t használni, mert ez a későbbiekben mást fog jelenteni!).

Itt fontos szerepe van a H ún. alaphalmaznak is. Legyen például $A := [0, 1]$ zárt intervallum. Ha $H = \mathbb{R}$, akkor $A^c = H \setminus A = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ nyílt intervallumok uniója. Ha azonban $H = [0, 2]$, akkor $A^c = H \setminus A = (1, 2]$ balról nyílt, jobbról zárt intervallum.

1.23. Tétel (De Morgan-azonosságok)**.** *Legyen H halmaz, $A, B \subset H$. Ekkor*

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{\textit{és}} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Bizonyítás. Az olvasóra bízzuk. □

1.24. Feladat. Igazoljuk, hogy $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$!

Tekintsük alapfogalomnak az (a, b) *rendezett pár*t, amelynek lényeges tulajdonsága, hogy

$$(a, b) = (c, d) \text{ pontosan akkor, ha } a = c \text{ és } b = d.$$

A rendezett pár segítségével értelmezzük a halmazok szorzatát.

1.25. Definíció. Legyen A, B halmaz. Az A és B *Descartes-szorzata*

$$A \times B := \{(a, b) \colon a \in A \text{ és } b \in B\}$$

rendezett párokból álló halmaz.

Például $A := \{2, 3, 5\}, B := \{1, 3\}$ esetén

$$A \times B = \{(2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3), (5, 1), (5, 3)\}.$$

1.5. Függvények

A *függvény* fogalmát alapfogalomnak tekintjük – halmazok közötti egyértelmű hozzárendelést értünk alatta. Az x-hez hozzárendelt elemet $f(x)$-szel jelöljük. Ha X és Y tetszőleges halmazok, akkor

$$f : X \to Y$$

egy olyan függvény, melyre

$$\text{minden } x \in \mathcal{D}(f) \subset X \text{ esetén } f(x) \in Y. \tag{1.10}$$

$\mathcal{D}(f) \neq \emptyset$ jelöli az f függvény *értelmezési tartományát*, vagyis

$$\mathcal{D}(f) = \{x \in X : x\text{-hez } f \text{ hozzárendel valamit}\},$$

ami az X egy nem üres részhalmaza. Az f függvény $\mathcal{R}(f)$-el jelölt *értékkészlete* Y-nak részhalmaza és

$$\mathcal{R}(f) = \{y \in Y : y = f(x) \text{ valamely } x \in \mathcal{D}(f)\text{-re}\}.$$

Fontos fogalom a függvény grafikonja.

1.26. Definíció. Egy $f : X \to Y$ függvény *grafikonja* a $\mathcal{D}(f) \times \mathcal{R}(f)$ Descartes-szorzat alábbi részhalmaza:

$$\operatorname{graph}(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{D}(f)\},$$

vagyis az $(x, f(x))$ alakú pontok halmaza, ahol x az f értelmezési tartományából való.

Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény grafikonja tehát az $\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, vagyis a sík egy részhalmaza, és az $(x, f(x))$ alakú pontokat tartalmazza.

1.27. Feladat. Legyenek $f_1, f_2 : X \to Y$. Igazoljuk, hogy ha $\operatorname{graph}(f_1) \subset \operatorname{graph}(f_2)$, akkor $\mathcal{D}(f_1) \subset \mathcal{D}(f_2)$, továbbá $\forall x \in \mathcal{D}(f_1) : f_1(x) = f_2(x)$!

Egy függvény inverze csak speciális, ún. kölcsönösen egyértelmű függvények esetén értelmezhető.

1.28. Definíció. Legyen $f : X \to Y$ függvény. Azt mondjuk, hogy az f *kölcsönösen egyértelmű* vagy *injektív*, ha különböző $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$ elemeknek különböző Y-beli elemeket feleltet meg, azaz

$$\text{bármely } x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f), x_1 \neq x_2 \text{ esetén } f(x_1) \neq f(x_2).$$

Másképp:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Az $f : X \to Y$ *bijektív függvény* vagy *bijekció*, ha f injektív, $\mathcal{D}(f) = X$ és $\mathcal{R}(f) = Y$.

1.29. Definíció. Legyen $f : X \to Y$ injektív függvény. Ekkor az f *inverze* vagy *inverzfüggvénye* az

$$f^{-1} : Y \to X,\ \mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f)$$

függvény, mely egy $y \in \mathcal{R}(f)$ ponthoz azt az egyértelműen létező $x \in \mathcal{D}(f)$ pontot rendeli, amelyre $f(x) = y$, vagyis

$$\text{bármely } f(x) = y \in \mathcal{R}(f) \text{ esetén } f^{-1}(y) = x.$$

1.30. *Megjegyzés.* Világos, hogy ha $f : X \to Y$ injektív, akkor az $f^{-1} : Y \to X$ függvényre $\mathcal{R}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f)$, továbbá f^{-1} is injektív. Ha f bijektív, akkor f^{-1} is bijektív.

Könnyen meggondolható, hogy ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kölcsönösen egyértelmű, akkor $\operatorname{graph}(f^{-1})$ (ami ez esetben $\mathbb{R}^2$ egy részhalmaza) úgy nyerhető, hogy $\operatorname{graph}(f)$-et tükrözzük a 45°-os $(y = x)$ egyenesre.

1.31. Definíció. Legyen $g : X \to Y, f : Y \to Z$. Ekkor az f és g függvények *kompozíciója* az az $f \circ g : X \to Z$ függvény, melyre

$$\mathcal{D}(f \circ g) = \{x \in \mathcal{D}(g) : g(x) \in \mathcal{D}(f)\},$$

és

$$\text{bármely } x \in \mathcal{D}(f \circ g) \text{ esetén } (f \circ g)(x) := f(g(x)).$$

1.32. Példa. A g függvény minden szám duplájához 1-et adjon hozzá

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) := 2x + 1;$$

az f függvény pedig minden számot emeljen négyzetre

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) := x^2,$$

akkor

$$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (f \circ g)(x) = (2x + 1)^2$$

lesz az f és g kompozíciója.

Vigyázat! Általában $f \circ g \neq g \circ f$!

1.33. Definíció. Legyen $f : X \to Y$ és $H \subset \mathcal{D}(f)$. Az f függvény H-ra való *leszűkítése* az az $f|_H : H \to Y$ függvény, amelyre bármely $x \in H$ esetén $f|_H(x) := f(x)$.

Megemlítünk még a függvényekkel kapcsolatban két fogalmat.

1.34. Definíció. Legyen $f : X \to Y$, $H \subset \mathcal{D}(f)$ és $G \subset \mathcal{R}(f)$. A H halmaz f függvény általi *direktképe*

$$f(H) := \{f(x) \colon x \in H\} \subset Y.$$

A G halmaz f függvény általi *ősépe* vagy *inverzképe*

$$f^{-1}(G) := \{x \colon f(x) \in G\} \subset X.$$

A továbbiakban a véges, megszámlálható és a megszámlálhatóan végtelen halmaz fogalmát definiáljuk.

1.35. Definíció. Azt mondjuk, hogy az A halmaz *véges*, ha létezik $n \in \mathbb{Z}^+$ és $\phi : A \to \{1, 2, \dots, n\}$ bijekció.
Azt mondjuk, hogy az A halmaz *megszámlálhatóan végtelen*, ha létezik $\phi : A \to \mathbb{N}$ bijekció.
Azt mondjuk, hogy az A halmaz *megszámlálható*, ha létezik $\phi : A \to \mathbb{N}$, $\mathcal{D}(\phi) = A$ injektív függvény.

A definíciókból következik, hogy egy megszámlálható halmaz vagy véges vagy megszámlálhatóan végtelen.

Példák megszámlálhatóan végtelen halmazokra:

1. Legyen A a páros természetes számok halmaza, vagyis

   $$A := \{2n : n \in \mathbb{N}\}.$$

   Könnyen(!) látható, hogy a

   $$\phi(n) := 2n,\ n \in \mathbb{N}$$

   függvény bijekciót létesít $\mathbb{N}$ és A között.

2. Meglepő, de a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmaza megszámlálhatóan végtelen.

   Írjuk fel az $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ nevezőjű törteket soronként.

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
\ldots & -\frac{3}{1} & -\frac{2}{1} & \leftarrow & -\frac{1}{1} & & \frac{0}{1} & \rightarrow & \frac{1}{1} & & \frac{2}{1} & \rightarrow & \frac{3}{1} & \ldots \\
 & & \downarrow & & \uparrow & & & & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & \\
\ldots & -\frac{3}{2} & -\frac{2}{2} & & -\frac{1}{2} & \leftarrow & \frac{0}{2} & \leftarrow & \frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & \ldots \\
 & & \downarrow & & & & & & & & \uparrow & & \downarrow & \\
\ldots & -\frac{3}{3} & -\frac{2}{3} & \rightarrow & -\frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{0}{3} & \rightarrow & \frac{1}{3} & \rightarrow & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & \ldots \\
 & & & & & & & & & & & & \downarrow & \\
 & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

   A $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ bijekciót úgy készítjük, hogy

$$\phi(0) := \frac{0}{1}, \quad \phi(1) := \frac{1}{1}, \quad \phi(2) := \frac{1}{2}, \quad \phi(3) := -\frac{1}{2}, \ldots$$

   A rajz szerinti lépegetéssel haladunk, ügyelve arra, hogy minden olyan törtet ugorjunk át, amely már egyszer sorra került. Ezzel biztosítjuk, hogy valóban kölcsönösen egyértelmű maradjon a függvényünk. Látható az is, hogy előbb-utóbb minden racionális számhoz eljutunk, így ϕ bijekció lesz $\mathbb{N}$ és $\mathbb{Q}$ között, ami azt jelenti, hogy $\mathbb{Q}$ megszámlálhatóan végtelen.

1.6. Valós számok

Kiskorunktól számolunk a valós számokkal, összeadjuk, szorozzuk, osztjuk őket, hatványozunk, abszolút értékét vesszük a számoknak. Egyenleteket, egyenlőtlenségeket „rendezünk". Most lefektetjük azt a viszonylag egyszerű szabályrendszert, amelyből a megtanult eljárások levezethetők.

1.6.1. Műveletek és rendezés

Legyen $\mathbb{R}$ nem üres halmaz. Tegyük fel, hogy adva van egy összeadásnak nevezett $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és egy szorzásnak nevezett $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, melyek a következő tulajdonságokkal rendelkeznek:

Testaxiómák

a1. bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a + b = b + a$ (kommutativitás)

a2. bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén $a + (b + c) = (a + b) + c$ (asszociativitás)

a3. van olyan $0 \in \mathbb{R}$ elem, hogy bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $a + 0 = a$ (0 az összeadás egységeleme, belátható, hogy egyértelmű)

a4. bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén van olyan $-a \in \mathbb{R}$ ellentett elem, hogy $a + (-a) = 0$ (belátható, hogy ez egyértelmű).

m1. bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $a \cdot b = b \cdot a$ (kommutativitás)

m2. bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (asszociativitás)

m3. van olyan $1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ elem, hogy bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $a \cdot 1 = a$ (1 a szorzás egységeleme)

m4. bármely $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén van olyan $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ reciprok elem, hogy $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

d. bármely $a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (disztributív a szorzás az összeadásra nézve)

Látható, hogy a szorzás szabályrendszere a 4. követelményben lényegesen eltér az összeadástól (egyébként nem is különbözne az összeadás és a szorzás). A d. is az eltérést erősíti.

Tegyük fel, hogy $\mathbb{R}$-en van egy olyan $\leq$ (kisebb vagy egyenlőnek nevezett) ún. rendezési reláció, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

Rendezési axiómák

r1. bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $a \leq a$ (reflexív),

r2. ha $a \leq b$ és $b \leq a$, akkor $a = b$ (antiszimmetrikus),

r3. ha $a \leq b$ és $b \leq c$, akkor $a \leq c$ (tranzitív),

r4. bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén vagy $a \leq b$, vagy $b \leq a$ (teljes),

r5. minden olyan esetben, amikor $a \leq b$ és $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges szám, akkor $a+c \leq b+c$.

r6. minden olyan esetben, amikor $0 \leq b$ és $0 \leq c$, akkor $0 \leq b \cdot c$.

Állapodjunk meg abban, hogy az $a \leq b$, $a \neq b$ helyett $a < b$ jelölést használunk. Megjegyezzük, hogy r4.$\Rightarrow$r1.

Az testaxiómák és a rendezési axiómák alapján levezethető az összes egyenlőséggel és egyenlőtlenséggel kapcsolatos „szabály”. Kiegészítésül három fogalmat külön is megemlítünk.

1.36. Definíció. Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Ekkor $\frac{a}{b} := a \cdot \frac{1}{b}$.

Az osztás tehát elvégezhető a valós számokkal.

1.37. Definíció. Legyen $x \in \mathbb{R}$. Az x *abszolút értéke*

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \leq x \\ -x, & \text{ha } x \leq 0, x \neq 0. \end{cases}$$

Hasznosak az abszolút értékkel kapcsolatos egyenlőtlenségek.

1. Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $0 \leq |x|$.
2. Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $0 \leq \varepsilon$. Ekkor $(x \leq \varepsilon \text{ és } -x \leq \varepsilon) \Longleftrightarrow |x| \leq \varepsilon$.
3. Bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $|a + b| \leq |a| + |b|$ (háromszög-egyenlőtlenség)
4. Bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Ezek az állítások könnyen igazolhatóak. A 4. bizonyítását megmutatjuk. Tekintsük az $a = a - b + b$ egyenlőtlenséget. Ekkor a 3. szerint

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|.$$

Az r2. szerint $-|b|$ számot mindkét oldalhoz hozzáadva nem változik az egyenlőtlenség

$$|a| + (-|b|) = |a| - |b| \leq |a - b|. \tag{1.11}$$

Mivel a és b szerepe felcserélhető, ezért

$$-(|a| - |b|) \leq |b - a| = |a - b| \tag{1.12}$$

is teljesül. Az (1.11) és az (1.12) a 2. tulajdonság szerint ($x := |a| - |b|$; $\varepsilon := |a - b|$ szereposztással) éppen azt jelenti, hogy $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

A valós számok felépítéséhez a testaxiómákon és a rendezési axiómákon kívül további szabályokra (axiómákra) lesz szükségünk. Mielőtt azonban ezekre rátérnénk, bevezetjük az intervallum és a környezet fogalmát.

1.6.2. Intervallumok és környezetek

1.38. Definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy I *intervallum*, ha bármely $x_1, x_2 \in I$ és $x_1 < x < x_2$ esetén $x \in I$.

1.39. Tétel. *Legyen $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Ekkor az alábbi halmazok mindegyike intervallum.*

- $[a, b]{:=}\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
- $[a, b){:=}\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- $(a, b]{:=}\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
- $(a, b){:=}\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- $[a, +\infty){:=}\{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
- $(a, +\infty){:=}\{x \in \mathbb{R} : a < x\}$; $(0, +\infty) =: \mathbb{R}^+$
- $(-\infty, a]{:=}\{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
- $(-\infty, a){:=}\{x \in \mathbb{R} : x < a\}$; $(-\infty, 0) =: \mathbb{R}^-$
- $(-\infty, +\infty) := \mathbb{R}$

Megemlítjük, hogy az $[a, a] = \{a\}$ és az $(a, a) = \emptyset$ ún. *elfajuló* intervallumok.

1.40. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}, r > 0$. Az *a pont r sugarú környezetén* a

$$K_r(a) := (a - r, a + r)$$

nyílt intervallumot értjük. Azt mondjuk, hogy a $K(a) \subset \mathbb{R}$ halmaz az *a pont egy környezete*, ha van olyan $r > 0$ szám, hogy $K(a) = K_r(a)$.

1.6.3. Természetes, egész és racionális számok

Most elkülönítjük az $\mathbb{R}$ egy nevezetes részhalmazát. Legyen $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ olyan részhalmaz, amelyre

- $0 \in \mathbb{N}$
- bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $n + 1 \in \mathbb{N}$
- bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $n + 1 \neq 0$ (a 0 az „első” elem)
- abból, hogy (a) $S \subset \mathbb{N}$, (b) $0 \in S$, (c) bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $n + 1 \in S$ következik, hogy $S = \mathbb{N}$. (Teljes indukció.)

Az $\mathbb{R}$-nek az ilyen $\mathbb{N}$ részhalmazát a *természetes számok halmazá*nak nevezzük.

Kiegészítésül álljon itt még néhány megállapodás:

$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{m \in \mathbb{R} : -m \in \mathbb{N}\}$ az *egész számok halmaza*

$\mathbb{N}^+ = \mathbb{Z}^+ := \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$\mathbb{Q} := \{x \in \mathbb{R} :$ van olyan $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q \neq 0,$ hogy $x = \frac{p}{q}\}$ a *racionális számok halmaza*

$\mathbb{Q}^* := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ az *irracionális számok halmaza.*

Az $\mathbb{N}$ segítségével a testaxiómák és a rendezési axiómák mellé az alábbi harmadik követelményt illesztjük az $\mathbb{R}$-hez.

Arkhimédészi axióma: Bármely $x \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $x < n$.

Könnyen látható, hogy ezen axiómával ekvivalens az alábbi:

Arkhimédészi axióma – változat: Bármely $y > 0$ valós számhoz van olyan $n \in \mathbb{N}$, hogy $\frac{1}{n} < y$.

Az Arkhimédészi axióma egy fontos következménye, hogy minden (nemelfajuló) intervallumban van racionális szám. Ez valami olyasmit jelent, hogy a racionális számok *„sűrűn”* helyezkednek el a számegyenesen.

1.41. Állítás. *Legyenek $a < b$ tetszőleges valós számok. Ekkor az (a, b) nyílt intervallumban van racionális és irracionális szám, vagyis*

$$(a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset \text{ és } (a, b) \cap \mathbb{Q}^* \neq \emptyset.$$

Sőt, minden intervallumban van tetszőlegesen nagy nevezőjű *racionális szám.*

Bizonyítás. Az egyszerűség kedvéért legyen $0 < a < b$, a többi eset hasonlóan meggondolható. A racionális eset bizonyításának alapgondolata szemléletesen a következő. Az Arkhimédészi axióma biztosítja, hogy az a és b számokhoz található egy olyan $q \in \mathbb{N}$ szám, melyre

$$\frac{1}{q} < b - a.$$

Ezért „$\frac{1}{q}$-asával lépdelve a számegyenesen” eljutunk az (a, b) nyílt intervallumba. Nézzük részletesen!

Az Arkhimédészi axióma szerint az

$$\frac{1}{b-a} \in \mathbb{R}$$

számhoz található olyan $q \in \mathbb{N}$, hogy

$$\frac{1}{b-a} < q. \tag{1.13}$$

Másrészt, szintén az Arkhimédészi axióma miatt választhatunk olyan $p \in \mathbb{N}$ *legkisebb* számot, melyre $qa < p$, vagyis melyre

$$qa < p \leq qa + 1 \tag{1.14}$$

teljesül. Mivel (1.13) miatt

$$qa + 1 < qb,$$

ezért az (1.14) egyenlőtlenségből kapjuk:

$$qa < p < qb \iff a < \frac{p}{q} < b,$$

vagyis

$$\frac{p}{q} \in (a, b) \cap \mathbb{Q}.$$

Ebből a bizonyításból az is következik, hogy az (a, b) intervallumban tetszőlegesen nagy nevezőjű racionális szám is található. Ugyanis, bárhogyan rögzítünk le egy értéket, az (1.13) egyenlőtlenségben q választható annál nagyobbnak.

Az irracionális eset nagyon hasonlóan igazolható. Az Arkhimédészi axióma biztosítja, hogy az a és b számokhoz található egy olyan $q \in \mathbb{N}$ szám, melyre

$$\frac{\sqrt{2}}{q} < b - a.$$

Ezért, szemléletesen, „$\frac{\sqrt{2}}{q}$-asával lépdelve a számegyenesen” eljutunk az (a, b) nyílt intervallumba. A bizonyítás részletezését az olvasóra bízzuk. $\square$

Az Arkhimédészi axiómával sem vált még minden igényt kielégítővé az $\mathbb{R}$. Ugyanis belátható, hogy $\mathbb{Q}$, a racionális számok halmaza kielégíti az összes fenti axiómát – tehát ezek az axiómák nem biztosítják az irracionális számok létezését (a számegyenesen maradtak „lyukak”). Szükségünk lesz még egy utolsó axiómára, amelyet néhány fogalommal készítünk elő.

1.6.4. Felső és alsó határ

1.42. Definíció. Legyen $A \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy A *felülről korlátos* számhalmaz, ha van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy bármely $a \in A$ esetén $a \leq K$. Az ilyen K az A halmaz egyik *felső korlátja.*

Világos, hogy ha K_1 az A felülről korlátos halmaz egy felső korlátja és $K_2 \geq K_1$, akkor K_2 is felső korlátja A-nak. Tehát egy adott halmaz felső korlátainak halmaza felülről nem korlátos. Kérdés, hogy vajon legkisebb felső korlát létezik-e.

1.43. Definíció. Legyen $A \subset \mathbb{R}, A \neq \emptyset$ felülről korlátos halmaz. Tekintsük a

$$B := \{K \in \mathbb{R} : K \text{ felső korlátja az A halmaznak}\}$$

halmazt. Ha $\alpha \in \mathbb{R}$ a B halmaz legkisebb eleme, azaz olyan szám, amelyre

- $\alpha \in B$ (α is felső korlátja az A halmaznak)
- bármely $K \in B$ felső korlátra $\alpha \leq K$,

akkor az ilyen $\alpha \in \mathbb{R}$ számot (amely nem feltétlenül eleme az A halmaznak) a halmaz *felső határá*nak nevezzük, és így jelöljük:

$$\alpha := \sup A \text{ („az } A \text{ halmaz szuprémuma”)}$$

A kérdés csupán az, hogy van-e ilyen $\alpha \in \mathbb{R}$. Az $\mathbb{R}$ szabályrendszeréhez egy olyan utolsó axiómát illesztünk, amely ezen felső határ létezését biztosítja.

Felső határ axiómája: Minden felülről korlátos nem üres valós számhalmaznak *van* legkisebb felső korlátja.

Nyilván igaz a $\sup A$ két tulajdonsága:

1. bármely $a \in A$ esetén $a \leq \sup A$
2. bármely $0 < \varepsilon$ esetén van olyan $a' \in A$, hogy $(\sup A) - \varepsilon < a'$.

Ha $\sup A \in A$, akkor $\sup A$ az A halmaz *maximuma.*

1.44. *Megjegyzés.* Ha $A \neq \emptyset$ felülről *nem* korlátos halmaz, akkor megállapodás szerint

$$\sup A := +\infty.$$

Másrészt

$$\sup \emptyset := -\infty.$$

1.45. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $B \subset A$, akkor $\sup B \leq \sup A$!

Nézzük meg most egy példán, hogyan biztosítja a felső határ axiómája az irracionális számok létezését!

1.46. Példa. Tekintsük az alábbi halmazt!

$$A := \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\right\}$$

Világos, hogy A nem üres, hiszen például $0 \in A$. Másrészt A felülről korlátos, mivel 2 nyilván egy felső korlátja. A Felső határ axiómája szerint létezik A-nak legkisebb felső korlátja, $\sup A \in \mathbb{R}$, amiről belátható, hogy nem lehet racionális. Ezt a $\sup A$ számot nevezzük $\sqrt{2}$-nek.

A műveleti, rendezési szabályrendszerrel, az Arkhimédészi axiómával és a Felső határ axiómájával teljessé tettük az $\mathbb{R}$ valós számok halmazát. Ezzel biztos alapot teremtettünk a jövőbeni számolásokhoz is.

Néhány további megállapodás.

1.47. Definíció. Legyen $A \subset \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy A *alulról korlátos*, ha van olyan $L \in \mathbb{R}$, hogy minden $a \in A$ esetén $L \leq a$. Az L az A halmaz egyik *alsó korlátja.*

Legyen $A \neq \emptyset$ alulról korlátos számhalmaz. Az A alsó korlátjai közül a legnagyobb a halmaz *alsó határa.* (Ennek létezéséhez már nem kell újabb axióma, visszavezethető a felső határ létezésére.) Az A halmaz alsó határát

$$\inf A \quad (\text{„az } A \text{ halmaz infimuma”})$$

jelölje. Nyilván igaz, hogy

1. bármely $a \in A$ esetén $\inf A \leq a$
2. bármely $0 < \varepsilon$ esetén van olyan $a' \in A$, hogy $a' < (\inf A) + \varepsilon$.

Ha $\inf A \in A$, akkor $\inf A$ az A halmaz *minimuma.*

1.48. *Megjegyzés.* Ha $A \neq \emptyset$ alulról *nem* korlátos halmaz, akkor megállapodás szerint

$$\inf A := -\infty.$$

Másrészt

$$\inf \emptyset := +\infty.$$

1.49. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $B \subset A$, akkor $\inf B \geq \inf A$!

1.50. Definíció. Egy $A \subset \mathbb{R}$ halmazról azt mondjuk, hogy *korlátos*, ha felülről és alulról is korlátos.

1.51. *Megjegyzés.* A fentiekben nem volt szándékunk a valós számok precíz axiomatikus felépítése. Megjegyezzük, hogy az Arkhimédészi axióma mellé elég lett volna az alábbi axiómát feltenni, hogy biztosítsuk az irracionális számok létezését.

Cantor-axióma: Legyenek $[a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ ún. egymásba skatulyázott, nem üres zárt intervallumok, vagyis

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ekkor ezen intervallumoknak van közös pontja, vagyis

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

1.52. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy az Arkhimédészi és Cantor-axiómák együtt ekvivalensek a Felső határ axiómájával, vagyis

$$(\text{Arkhimédészi axióma } + \text{ Cantor-axióma}) \Longleftrightarrow \text{Felső határ axiómája.}$$

1.6.5. Valós számok hatványai

Legyen $a \in \mathbb{R}$. Ekkor ismert, hogy

$$a^1 := a, a^2 := a \cdot a, a^3 := a^2 \cdot a, \ldots, a^n := a^{n-1} \cdot a, \ldots$$

Ha $a \in \mathbb{R}, 0 \leq a$, akkor $\sqrt{a}$ jelentse azt a 0-nál nagyobb vagy egyenlő számot, amelynek négyzete a, azaz $0 \leq \sqrt{a}, (\sqrt{a})^2 = a$. Vegyük észre, hogy bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $\sqrt{a^2} = |a|$.

1.53. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$. Ekkor $\sqrt[2k+1]{a}$ jelentse azt a valós számot, amelynek $(2k+1)$-edik hatványa a.

Vegyük észre, hogy ha $0 < a$, akkor $\sqrt[2k+1]{a} > 0$, és ha $a < 0$, akkor $\sqrt[2k+1]{a} < 0$.

1.54. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}, 0 \leq a, k \in \mathbb{N}$. Ekkor $\sqrt[2k]{a}$ jelentse azt a 0-nál nagyobb vagy egyenlő számot, amelynek $(2k)$-adik hatványa a.

A gyökök létezése és egyértelműsége a Felső határ axiómájából következik hasonlóan, mint az 1.46 Példában, de itt nem részletezzük.

Vezessük be a következő jelölést: ha $n \in \mathbb{N}$ és $a \in \mathbb{R}$ az n paritásának megfelelő (vagyis, ha n páratlan, akkor $a \in \mathbb{R}$, ha pedig n páros, akkor $a \geq 0$), akkor

$$a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}.$$

1.55. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}^+, p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$$a^{\frac{p}{q}} := (a^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

1.56. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}^+, p, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

$$a^{-\frac{p}{q}} := \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}.$$

1.57. Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ekkor $a^0 := 1$.

Látható, hogy ezzel a definícióláncolattal egy $a \in \mathbb{R}^+$ bármely $r \in \mathbb{Q}$ racionális kitevőjű hatványát értelmeztük. Belátható, hogy a definíciókban szereplő számok egyértelműen léteznek, és érvényesek a következő azonosságok:

1. $a \in \mathbb{R}^+, r, s \in \mathbb{Q}$ esetén $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$,
2. $a, b \in \mathbb{R}^+, r \in \mathbb{Q}$ esetén $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$,
3. $a \in \mathbb{R}^+, r, s \in \mathbb{Q}$ esetén $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$.

A későbbiekben definiálni fogjuk egy szám irracionális kitevős hatványát is.

2. fejezet

Valós függvények

Ismertetjük a valós számok halmazán értelmezett, valós szám értékű függvények legfontosabb tulajdonságait. Definiáljuk a gyakran használt valós függvényeket, melyeket elemi függvényeknek neveznek.

2.1. Valós függvények alaptulajdonságai

2.1. Definíció. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt *valós függvény*nek nevezünk. Emlékeztetünk, hogy az (1.10) alapján ez azt jelenti, hogy $\emptyset \neq \mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R}$ és $\mathcal{R}(f) \subset \mathbb{R}$.

2.2. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor $\lambda f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x),\ \mathcal{D}(\lambda f) = \mathcal{D}(f).$$

2.3. Definíció. Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g) \neq \emptyset$. Ekkor $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $f \cdot g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x),\ \mathcal{D}(f+g) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g),$$
$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x),\ \mathcal{D}(f \cdot g) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g).$$

2.4. Definíció. Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ H := \mathcal{D}(g) \setminus \{x \in \mathcal{D}(g) : g(x) = 0\} \neq \emptyset$. Ekkor $1/g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$(1/g)(x) := \frac{1}{g(x)},\ \mathcal{D}(1/g) = H.$$

2.5. Definíció. Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\frac{f}{g} := f \cdot 1/g$$

2.6. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f *felülről korlátos* függvény, ha az $\mathcal{R}(f) \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos halmaz.
Azt mondjuk, hogy f *alulról korlátos* függvény, ha $\mathcal{R}(f) \subset \mathbb{R}$ alulról korlátos halmaz.
Azt mondjuk, hogy f *korlátos* függvény, ha $\mathcal{R}(f) \subset \mathbb{R}$ korlátos halmaz.

2.7. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f *monoton növő* függvény, ha

$$\text{bármely } x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f),\ x_1 < x_2 \text{ esetén } f(x_1) \leq f(x_2).$$

Az f *szigorúan monoton növő* függvény, ha

$$\text{bármely } x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f),\ x_1 < x_2 \text{ esetén } f(x_1) < f(x_2).$$

Azt mondjuk, hogy f *monoton fogyó* függvény, ha

$$\text{bármely } x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f),\ x_1 < x_2 \text{ esetén } f(x_1) \geq f(x_2).$$

Az f *szigorúan monoton fogyó* függvény, ha

$$\text{bármely } x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f),\ x_1 < x_2 \text{ esetén } f(x_1) > f(x_2).$$

2.8. Feladat. Igazoljuk a következőket!

1. Ha f szigorúan monoton növő vagy fogyó, akkor van inverze.
2. Ha f szigorúan monoton növő, akkor inverze is szigorúan monoton növő.
3. Ha f invertálható és $0 \notin \mathcal{R}(f)$, akkor $1/f$ is invertálható.

2.9. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f *páros* függvény, ha

1. minden $x \in \mathcal{D}(f)$ esetén $-x \in \mathcal{D}(f)$, és
2. minden $x \in \mathcal{D}(f)$ esetén $f(-x) = f(x)$.

2.10. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f *páratlan* függvény, ha

1. minden $x \in \mathcal{D}(f)$ esetén $-x \in \mathcal{D}(f)$, és
2. minden $x \in \mathcal{D}(f)$ esetén $f(-x) = -f(x)$.

2.11. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f *periodikus* függvény, ha létezik olyan $p \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy

1. minden $x \in \mathcal{D}(f)$ esetén $x + p,\ x - p \in \mathcal{D}(f)$, és
2. minden $x \in \mathcal{D}(f)$ esetén $f(x + p) = f(x - p) = f(x)$.

A p szám a függvény egyik *periódus*a. (Vigyázat! Nem biztos, hogy van legkisebb periódus!)

2.2. Elemi függvények

Ebben a szakaszban az egyszerűség kedvéért a függvényeket mint $f : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ tüntetjük fel (tehát a nyíl előtt az értelmezési tartomány áll minden esetben).

2.2.1. Hatványfüggvények

1. Legyen $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \mathrm{id}(x) := x$ az ún. *identitásfüggvény.*

   Az id szigorúan monoton növő, páratlan függvény (2.1. ábra).

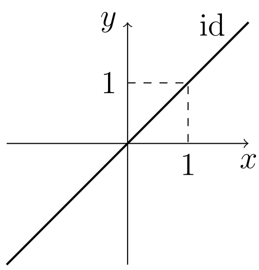
2. Legyen $\mathrm{id}^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \mathrm{id}^2(x) := x^2$.

   Az $\mathrm{id}^2|_{\mathbb{R}^+}$ szigorúan monoton növő, az $\mathrm{id}^2|_{\mathbb{R}^-}$ szigorúan monoton fogyó. Az id^2 páros (2.2. ábra).

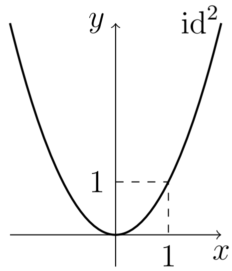
3. Legyen $\mathrm{id}^3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \mathrm{id}^3(x) := x^3$.

   Az id^3 szigorúan monoton növő, páratlan függvény (2.3. ábra).

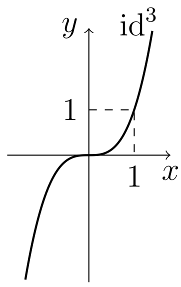
4. Ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor $\mathrm{id}^n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \mathrm{id}^n(x) := x^n$ függvény páros n esetén az id^2, páratlan n esetén az id^3 tulajdonságait örökli.



2.1. ábra. Az identitás



2.2. ábra. Az id^2 függvény



2.3. ábra. Az id^3 függvény

5. Legyen $1/\mathrm{id} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ (1/\mathrm{id})(x) := 1/x$,
   és $1/\mathrm{id}^2 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ (1/\mathrm{id}^2)(x) := 1/x^2$.

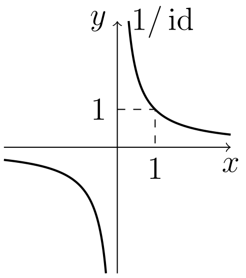
   Az $1/\mathrm{id}|_{\mathbb{R}^-}$ és az $1/\mathrm{id}|_{\mathbb{R}^+}$ szigorúan monoton fogyó (de $1/\mathrm{id}$ nem monoton!). Az $1/\mathrm{id}$ páratlan (2.4. ábra).

   Az $1/\mathrm{id}^2|_{\mathbb{R}^-}$ szigorúan monoton nő, az $1/\mathrm{id}^2|_{\mathbb{R}^+}$ szigorúan monoton fogy. Az $1/\mathrm{id}^2$ páros (2.5. ábra).

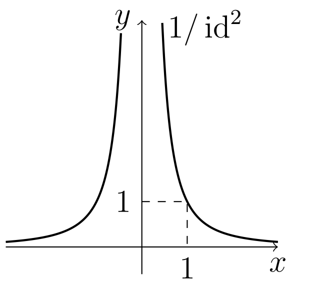
6. Legyen $n \in \mathbb{N}$. Az $1/\mathrm{id}^n : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ 1/\mathrm{id}^n(x) := 1/x^n$ függvény páros n esetén az $1/\mathrm{id}^2$, páratlan n esetén az $1/\mathrm{id}$ tulajdonságait örökli.

7. Legyen $\mathrm{id}^{1/2} : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\mathrm{id}^{1/2}(x) := \sqrt{x}$. Az $\mathrm{id}^{1/2}$ szigorúan monoton növő függvény (2.6. ábra).

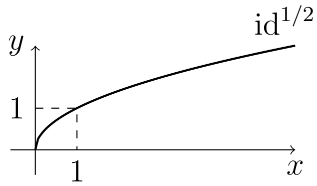
   Megemlítjük, hogy az $\mathrm{id}^{1/2}$ az $\mathrm{id}^2|_{[0,\infty)}$ kölcsönösen egyértelmű függvény inverzeként is értelmezhető.



2.4. ábra. Az $1/\mathrm{id}$ függvény



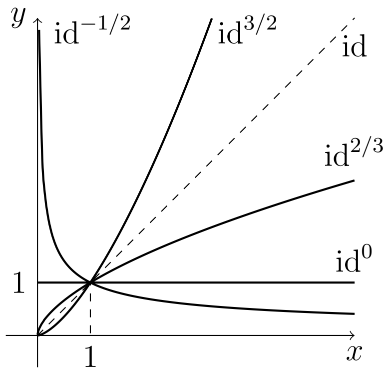
2.5. ábra. Az $1/\mathrm{id}^2$ függvény



2.6. ábra. Az $\mathrm{id}^{1/2}$ függvény

8. Legyen $r \in \mathbb{Q}$. Az $\mathrm{id}^r : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $\mathrm{id}^r(x) := x^r$. Néhány r esetén szemléltetjük az id^r függvényeket (2.7. ábra).

9. Végül legyen $\mathrm{id}^0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathrm{id}^0(x) := 1$. Az id^0 monoton növő és monoton fogyó is, páros függvény. Bármilyen $p > 0$ szám szerint periodikus (2.7. ábra).



2.7. ábra. Néhány hatványfüggvény

2.2.2. Exponenciális és logaritmus függvények

1. Legyen $a \in \mathbb{R}^+$. Az a alapú *exponenciális függvény*

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) := a^x. \tag{2.1}$$

(A valós kitevős hatvány precíz definíciójára később térünk ki.)

(a) $\exp_a$ szigorúan monoton növő, ha $a > 1$,

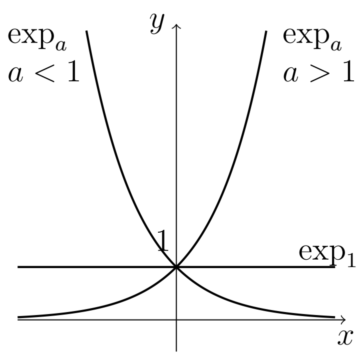
(b) $\exp_a$ szigorúan monoton fogyó, ha $a < 1$,

(c) $\exp_a = \mathrm{id}^0$, ha $a = 1$ (monoton növő és monoton fogyó is) (2.8. ábra).

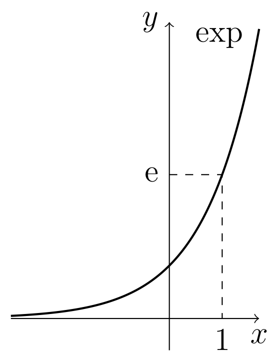
Ha $a > 0$ és $a \neq 1$, akkor $\mathcal{R}(\exp_a) = \mathbb{R}^+$, vagyis az $\exp_a$ csak pozitív értéket vesz fel (és minden pozitív számot fel is vesz). Bármely $a > 0$ esetén minden $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mellett

$$\exp_a(x_1 + x_2) = \exp_a(x_1) \cdot \exp_a(x_2).$$

(Ez a legfontosabb ismertetőjele az exponenciális függvényeknek.) Kitüntetett szerepe van az $\exp_\mathrm{e} =: \exp$ függvénynek (2.9. ábra), ahol e az ún. Euler-féle szám, amit a 3. fejezetben definiálunk. Ezt szokás egyszerűen exponenciális függvénynek nevezni.



2.8. ábra. Különböző alapú exponenciális függvények



2.9. ábra. Az exponenciális függvény

2. Legyen $a > 0, a \neq 1$. Mivel $\exp_a$ szigorúan monoton, ezért kölcsönösen egyértelmű is, tehát van inverzfüggvénye:

$$\log_a := (\exp_a)^{-1}$$

lesz az a alapú *logaritmusfüggvény* (2.10. ábra). Tehát

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad \log_a(x) = y, \text{ amelyre } \exp_a(y) = x.$$

Ha $a > 1$, akkor $\log_a$ szigorúan monoton növő, ha $a < 1$, akkor $\log_a$ szigorúan monoton fogyó.

A logaritmusfüggvények alapvető tulajdonságai a következők:

(a) bármely $a > 0,\ a \neq 1$ és minden $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2,$$

(b) bármely $a > 0,\ a \neq 1$ és minden $x \in \mathbb{R}^+$ és $k \in \mathbb{R}$ esetén

$$\log_a x^k = k \log_a x,$$

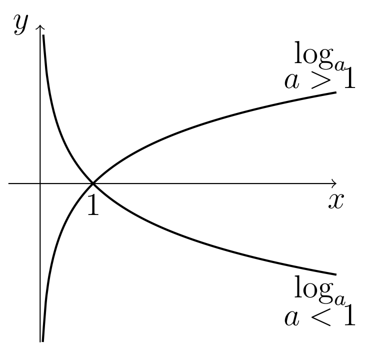
(c) bármely $a, b > 0, a, b \neq 1$ és minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

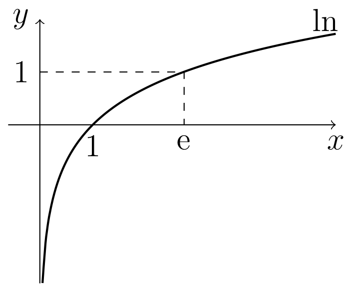
A 3. tulajdonság szerint akár egyetlen logaritmusfüggvény számszorosaként az összes logaritmusfüggvény előáll. A matematikában kitüntetett szerepe van az e alapú logaritmusnak:

$$\ln := \log_{\mathrm{e}}$$

a „természetes alapú logaritmus” (2.11. ábra).



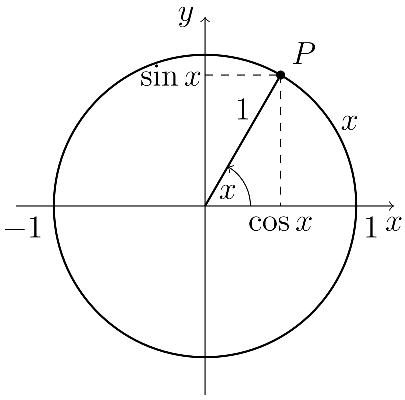
2.10. ábra. Különböző alapú logaritmusfüggvények



2.11. ábra. Természetes alapú logaritmusfüggvény

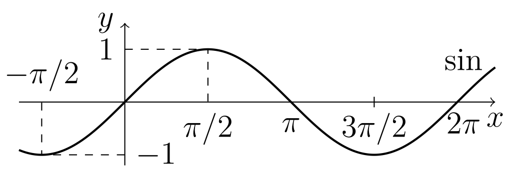
2.2.3. Trigonometrikus függvények és inverzeik

1. A $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény precíz definícióját később, a 8.2.2. alszakaszban tárgyaljuk. Itt most a középiskolából ismert definíciót ismételjük át. Vegyünk fel a síkon egy origó középpontú, 1 sugarú kört! Ahol a vízszintes tengely (pozitív fele) metszi a körvonalat (vagyis az $(1, 0)$ pont), abból a pontból „mérjük fel az $x \in \mathbb{R}$ számnak megfelelő hosszúságú ívet a kör kerületére”, pozitív x esetén pozitív, negatív x esetén negatív irányítással. [Ez a művelet nagy kézügyességet igényel!...] Az ív P végpontjának második koordinátája legyen a $\sin x$ (2.12. ábra).
A sin függvény páratlan, $p = 2\pi$ szerint periodikus (2.13. ábra). $\mathcal{R}(\sin) = [-1, 1]$.

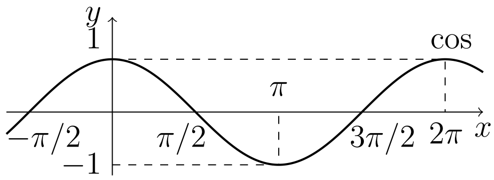


2.12. ábra. A sin és cos értelmezése

2. Legyen $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \cos x := \sin(x + \frac{\pi}{2})$. Könnyen látható, hogy ez a fenti módon definiált P pont első koordinátája lesz. A cos függvény páros, $p = 2\pi$ szerint periodikus (2.14. ábra). $\mathcal{R}(\cos) = [-1, 1]$.



2.13. ábra. A sin függvény



2.14. ábra. A cos függvény

Alapvető összefüggések:

(a) Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

(b) Bármely $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1 \cdot \cos x_2 + \cos x_1 \cdot \sin x_2,$$

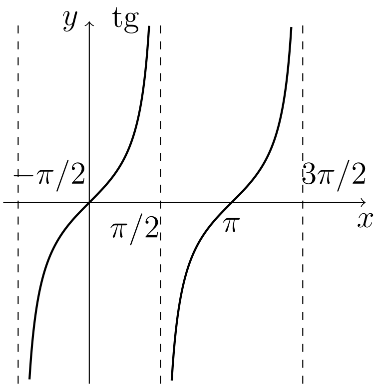
$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cdot \cos x_2 - \sin x_1 \cdot \sin x_2.$$

3. Legyen

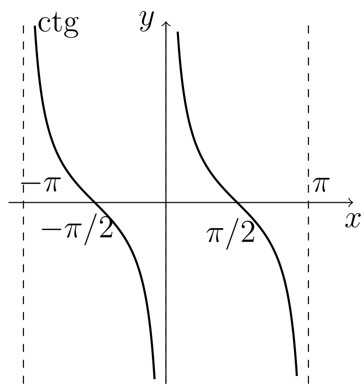
$$\mathrm{tg} := \frac{\sin}{\cos} \ \text{ és } \ \mathrm{ctg} := \frac{\cos}{\sin}.$$

Az értelmezésből következik, hogy

$$\mathcal{D}(\mathrm{tg}) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\},\ \mathcal{D}(\mathrm{ctg}) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$



2.15. ábra. A tg függvény

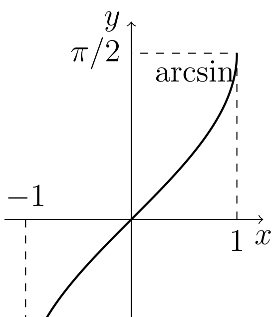


2.16. ábra. A ctg függvény

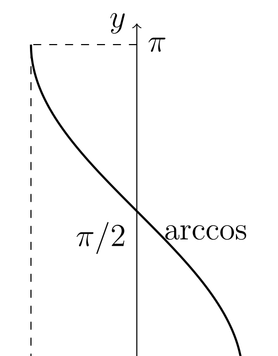
A tg és ctg is páratlan, $p = \pi$ szerint periodikus (2.15. és 2.16. ábra).

A trigonometrikus függvények periodikusságuk miatt nem kölcsönösen egyértelmű-ek.

4. Tekintsük a $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ leszűkítést! Ez a függvény szigorúan monoton növő, ezért kölcsönösen egyértelmű, így van inverzfüggvénye:
$$\arcsin := \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1}.$$
Az értelmezésből $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $\arcsin x = \alpha$, amelyre $\sin\alpha = x$.
Az arcsin szigorúan monoton növő, páratlan függvény (2.17. ábra).



2.17. ábra. Az arcsin függvény



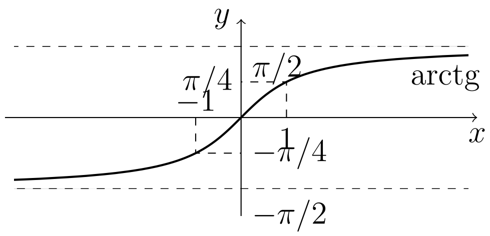
2.18. ábra. Az arccos függvény

5. A cos függvény $[0,\pi]$ intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton fogyó, ezért van inverzfüggvénye:
$$\arccos := \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}.$$

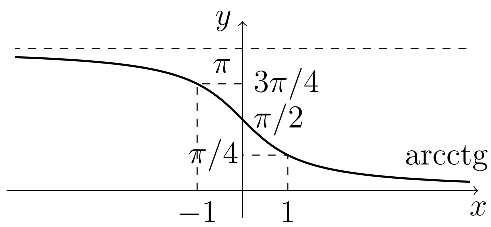
Az értelmezésből következik, hogy $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$, $\arccos x = \alpha$, amelyre $\cos\alpha = x$. Az arccos függvény szigorúan monoton fogyó (2.18. ábra).

6. A tg függvény $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton növő, ezért van inverzfüggvénye:
$$\operatorname{arctg} := (\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})})^{-1}.$$
Az értelmezésből következik, hogy $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\operatorname{arctg} x = \alpha$, amelyre $\operatorname{tg}\alpha = x$.
Az arctg szigorúan monoton növő, páratlan függvény (2.19. ábra).

7. A ctg függvény $(0,\pi)$ intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton fogyó, ezért van inverzfüggvénye:
$$\operatorname{arcctg} := \left(\operatorname{ctg}|_{(0,\pi)}\right)^{-1}.$$
Az értelmezésből következik, hogy $\operatorname{arcctg} : \mathbb{R} \to (0,\pi)$, $\operatorname{arcctg} x = \alpha$, amelyre $\operatorname{ctg}\alpha = x$.
Az arcctg szigorúan monoton fogyó függvény (2.20. ábra).



2.19. ábra. Az arctg függvény

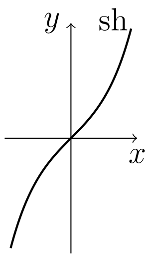


2.20. ábra. Az arcctg függvény

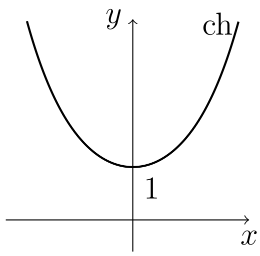
2.2.4. Hiperbolikus függvények és inverzeik

1. Legyen $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$\operatorname{sh}\ x := \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$
A sh szigorúan monoton növő, páratlan függvény (2.21. ábra).

2. Legyen $\operatorname{ch} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$\operatorname{ch} x := \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}.$$
A $\operatorname{ch}|_{\mathbb{R}^-}$ szigorúan monoton fogyó, a $\operatorname{ch}|_{\mathbb{R}^+}$ szigorúan monoton növő. A ch páros függvény. $\mathcal{R}(\operatorname{ch}) = [1,+\infty)$. A függvény grafikonját *láncgörbé*nek is nevezik (2.22.



2.21. ábra. Az sh függvény



2.22. ábra. A ch függvény

ábra), ugyanis a két végénél felfüggesztett lánc ilyen alakot vesz fel.

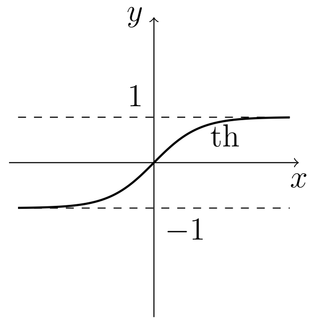
Alapvető összefüggések:

(a) Bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén
$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

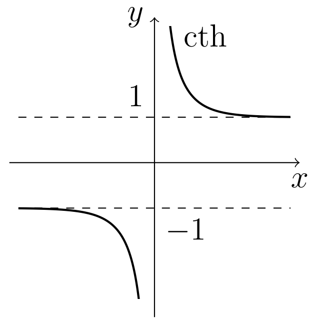
(b) Bármely $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ esetén
$$\operatorname{sh}(x_1 + x_2) = \operatorname{sh} x_1 \cdot \operatorname{ch}\ x_2 + \operatorname{ch} x_1 \cdot \operatorname{sh} x_2,$$
$$\operatorname{ch}(x_1 + x_2) = \operatorname{ch} x_1 \cdot \operatorname{ch} x_2 + \operatorname{sh} x_1 \cdot \operatorname{sh} x_2.$$

3. Legyen
$$\operatorname{th} := \frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}},\ \operatorname{cth} := \frac{\operatorname{ch}}{\operatorname{sh}}.$$
Az értelmezésből következik, hogy
$$\operatorname{th} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},$$
$$\operatorname{cth} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$
A th és cth páratlan függvények (2.23–2.24. ábra).
A th szigorúan monoton növő függvény. $\mathcal{R}(\operatorname{th}) = (-1, 1)$.
A $\operatorname{cth}|_{\mathbb{R}^-}$ szigorúan monoton fogyó, a $\operatorname{cth}|_{\mathbb{R}^+}$ szigorúan monoton növő. $\mathcal{R}(\operatorname{cth}) = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.

4. Az sh szigorúan monoton növő függvény, ezért van inverzfüggvénye: $\operatorname{arsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$\operatorname{arsh} := (\operatorname{sh})^{-1}.$$
Az arsh szigorúan monoton növő, páratlan függvény (2.25. ábra).



2.23. ábra. A th függvény

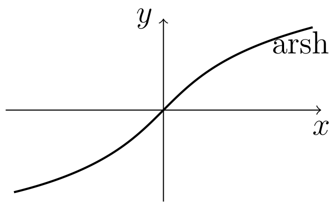


2.24. ábra. A cth függvény

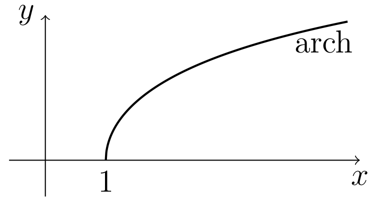
5. Az ch függvény $[0,\infty)$ intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton növő, ezért van inverzfüggvénye: $\operatorname{arch} : [1,\infty) \to [0,\infty)$,

$$\operatorname{arch} := (\operatorname{ch}|_{[0,\infty)})^{-1}.$$

Az arch szigorúan monoton növő függvény (2.26. ábra).



2.25. ábra. Az arsh függvény



2.26. ábra. Az arch függvény

6. Az th szigorúan monoton növő, ezért van inverzfüggvénye: $\operatorname{arth} : (-1,1) \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{arth} := (\operatorname{th})^{-1}.$$

Az arth szigorúan monoton növő, páratlan függvény (2.27. ábra).

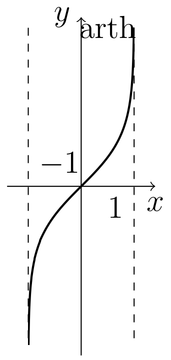
7. A cth függvény $\mathbb{R}^+$ intervallumra való leszűkítése szigorúan monoton fogyó, ezért van inverzfüggvénye: $\operatorname{arcth} : (1,+\infty) \to \mathbb{R}^+$,

$$\operatorname{arcth} := (\operatorname{cth}|_{\mathbb{R}^+})^{-1}.$$

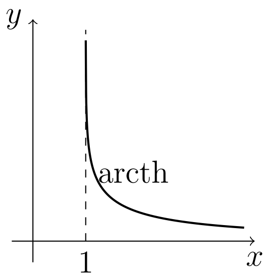
Az arcth szigorúan monoton fogyó függvény (2.28. ábra).

2.12. Feladat. Lássuk be az alábbiakat!

1. $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $x \in \mathbb{R}$,



2.27. ábra. Az arth függvény



2.28. ábra. Az arcth függvény

2. $\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $x \geq 1$,

3. $\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1, 1)$,

4. $\operatorname{arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$, $x > 1$.

2.2.5. Néhány különleges függvény

1. Legyen $\operatorname{abs} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \operatorname{abs}(x) := |x|$, ahol (emlékeztetőül)

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{ha } x \geq 0 \\ -x, & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

az *abszolútérték-függvény* (2.29. ábra).

2. Legyen $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

az *előjelfüggvény (szignumfüggvény)* (2.30. ábra).

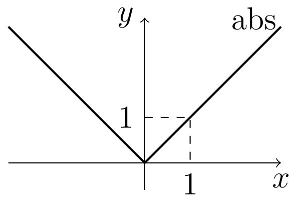
3. Legyen $\operatorname{ent} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \operatorname{ent}(x) := [x]$ az *egészrészfüggvény*, ahol

$$[x] := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}.$$

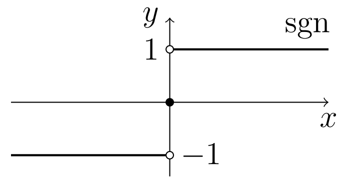
(Az $x \in \mathbb{R}$ szám „egész része” az x-nél kisebb vagy egyenlő egészek közül a legnagyobb.) (2.31. ábra)

4. Legyen a *törtrészfüggvény* $f(x) = \{x\} = x - [x]$, vagyis $f = \operatorname{id} - \operatorname{ent}$ (2.32. ábra).

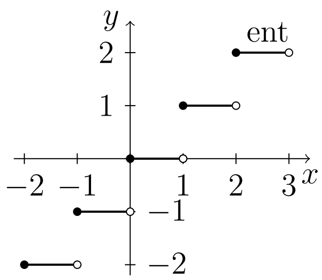
Az előbbi függvények talán még nem is voltak annyira különlegesek, hiszen mindenki találkozott velük középiskolában. A most következő két függvény azonban



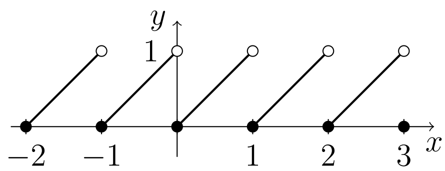
2.29. ábra. Az abszolútérték-függvény



2.30. ábra. Az előjelfüggvény függvény



2.31. ábra. Az egészrészfüggvény



2.32. ábra. A törtrészfüggvény

már joggal nevezhető „különlegesnek”, gyakran fordulnak elő különböző ellenpéldák kapcsán. Az első függvény Lejeune Dirichlet (1805–1859) német matematikus egy 1829-es cikkéből[1] származik. Szintén az ő nevéhez kapcsolható a modern függvényfogalom (vagyis függvény = egyértelmű hozzárendelés) első megfogalmazása.[2]

5. Legyen $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$D(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$
amelyet *Dirichlet-függvény*nek nevezünk, és a 2.33. ábra szemlélteti. A Dirichlet-függvény (egyik) érdekessége, hogy minden valós szám *minden* környezetében felveszi a 0 és az 1 értéket is (ld. az 1.41 Állítást).

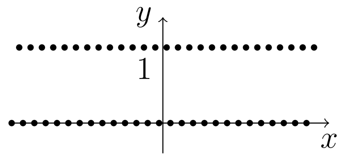
A másik függvényt gyakran Riemann-függvény néven emlegetik, azonban először Karl Thomae írta le 1875-ben, több évvel Bernhard Riemann (1826–1866) halála után. [3]

---

[1]G. L. Dirichlet, Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données, *J. reine angew. Math.* **4** (1829), 157–169.

[2]G. L. Dirichlet, Die Darstellung ganz willkürchlicher Functionen durch Sinus- und Cosinus reihen, *Repert. Math. und Phys.* I (1837), 152–174.

[3]K. J. Thomae, *Einleitung in die Theorie des bestimmten Integrale*, Halle, 1875, 14. oldal.

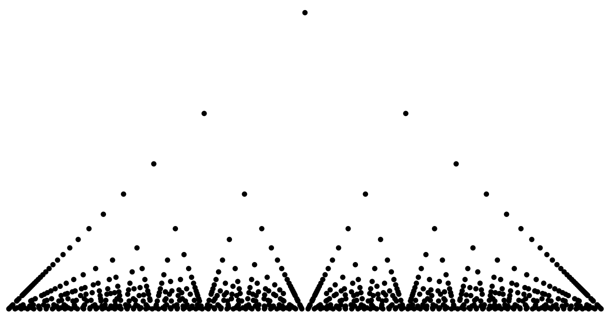


2.33. ábra. A Dirichlet-függvény

6. Legyen $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$R(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, & \text{ha } x \in \mathbb{Q},\ x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, \mathrm{lnko}(p, q) = 1. \end{cases}$$

A függvényt *Riemann-függvény*nek szokás nevezni (2.34. ábra). Ennek a függvénynek az az (egyik) érdekessége, hogy minden pont *minden* környezetében felvesz tetszőlegesen *kis* értéket, hiszen az 1.41 Állítás alapján minden intervallumban van tetszőlegesen *nagy* nevezőjű racionális szám.



2.34. ábra. A Riemann-függvény a $(0, 1)$ intervallumon

3. fejezet

Sorozatok

A sorozatok igen egyszerű függvények, és hasznos építőkövei a későbbi fogalmaknak.

3.1. A sorozat fogalma és tulajdonságai

3.1. Definíció. A *sorozat* a pozitív természetes számok halmazán értelmezett függvény.

Legyen $H \neq \emptyset$ halmaz, ha $a : \mathbb{N}^+ \to H$, akkor H-beli sorozatról beszélünk. Ha például H a valós számok halmaza, akkor *számsorozat*ról; ha H bizonyos jelek halmaza, akkor jelsorozatról; ha H az intervallumok halmaza, akkor intervallum-sorozatról beszélünk.

Legyen $a : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ számsorozat. Ha $n \in \mathbb{N}^+$, akkor $a(n)$ helyett az a_n jelölést használjuk, és a_n-et a sorozat *n-edik tagjának* nevezzük. Magát az $a : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ számsorozatot is a rövidebb

$$(a_n)$$

helyettesítse, esetleg $(a_n) \subset \mathbb{R}$ hangsúlyozza, hogy számsorozatról van szó. Például az $a : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}, a_n := \frac{1}{n}$ helyett az $(\frac{1}{n})$ sorozatról beszélünk.
Néha a tömör (a_n) helyett az $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ jelölést is használhatjuk. Például az (n^2) helyett $1,\ 4,\ 9, \ldots, n^2, \ldots$ sorozatról beszélünk.

Mivel a sorozat is függvény, így a korlátosság, a monotonitás, műveletek sorozatokkal nem igényelnek új definíciót. Emlékeztetőül mégis újrafogalmazunk egy-két elnevezést.

3.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat *korlátos*, ha van olyan $K \in \mathbb{R}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $|a_n| \leq K$.

3.3. Definíció. Azt mondjuk, hogy (a_n) *monoton növő*, ha minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$a_n \leq a_{n+1}.$$

3.4. Definíció. Ha (a_n) sorozat, és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor

$$\lambda \cdot (a_n) := (\lambda \cdot a_n).$$

Ha $(a_n), (b_n)$ két sorozat, akkor

$$(a_n) + (b_n) := (a_n + b_n),$$

$$(a_n) \cdot (b_n) := (a_n \cdot b_n).$$

Ha még $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ is teljesül, akkor

$$\frac{(a_n)}{(b_n)} := \left(\frac{a_n}{b_n}\right).$$

Például az $(\frac{n}{n+1})$ sorozat korlátos, hiszen bármely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $n < n+1$, ezért

$$\left|\frac{n}{n+1}\right| = \frac{n}{n+1} < 1.$$

Az $(\frac{n}{n+1})$ monoton növő, mert bármely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$a_n = \frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} = a_{n+1},$$

mivel $n(n+2) < (n+1)^2$.

3.5. Példa. Fontos nevezetes sorozat az

$$(e_n) := \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right). \tag{3.1}$$

Igazoljuk, hogy a sorozat monoton növő és korlátos!

Legyen $n \in \mathbb{N}^+$, ekkor a számtani és mértani közép között fennálló egyenlőtlenség szerint

$$e_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = 1 \cdot \underbrace{\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdots \frac{n+1}{n}}_{n \text{ darab}} \leq \left(\frac{1 + n \cdot \frac{n+1}{n}}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = e_{n+1}.$$

Az (e_n) sorozat korlátos is, bármely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq 4$. Ugyanis szintén a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségből adódik a következő:

$$\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{n+1}{n} \cdot \cdots \cdot \frac{n+1}{n}}_{n \text{ darab}} \leq \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + n \cdot \frac{n+1}{n}}{n+2}\right)^{n+2} = 1.$$

3.2. Sorozat véges határértéke

Most a sorozatok egy merőben új tulajdonságával ismerkedünk meg. Ha az $a_1, a_2, \ldots,$ $a_n, \ldots$ sorozat tagjai valamilyen szám körül keveset ingadoznak, akkor az ilyen sorozatot konvergensnek fogjuk nevezni. Például, a konstans sorozat és az $(\frac{1}{n})$ sorozat konvergens. Pontosabban:

3.6. Definíció. Azt mondjuk, hogy az (a_n) számsorozat *konvergens*, ha van olyan $A \in \mathbb{R}$ szám, hogy bármely $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan $N \in \mathbb{N}$ (ε-tól függő) küszöbindex, melyre minden $n \in \mathbb{N},\ n \geq N$ esetén

$$|a_n - A| < \varepsilon,$$

vagy ami ezzel ekvivalens:

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon,$$

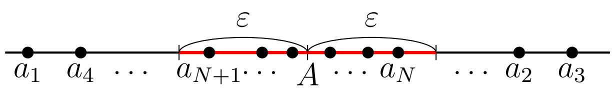
másképp

$$a_n \in K_\varepsilon(A). \tag{3.2}$$

Ha van ilyen A szám, akkor ez a sorozat *határértéke*, és jelölje

$$\lim a_n = A \text{ vagy } \lim_{n\to\infty} a_n = A \text{ vagy } a_n \to A.$$

A fenti definícióban nagyon fontos, hogy a (3.2) (vagy az ezzel ekvivalens állítások) *bármely* pozitív ε-ra teljesülnek, de *különböző* ε-okra *más-más* küszöbindextől kezdve.



3.1. ábra. Az $a_n \to A$ szemléletes jelentése

3.7. *Megjegyzés.* Könnyen látható a definíció alapján, hogy

$$a_n \to A \iff (a_n - A) \to 0 \iff |a_n - A| \to 0.$$

3.8. Állítás.

$$\frac{1}{n} \to 0.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Az $\frac{1}{\varepsilon}$ számhoz az *Arkhimédészi axióma* alapján van olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre

$$N > \frac{1}{\varepsilon} \iff \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Ha pedig $n \geq N$, akkor
$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon,$$
azaz
$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon.$$
Tehát egy tetszőlegesen adott $\varepsilon > 0$-hoz találtunk olyan N küszöbindexet, hogy $n \geq N$ esetén a sorozatelemek legfeljebb ε-al térnek el 0-tól, ezért a sorozat 0-hoz tart. □

Egy másik példaként vegyünk egy 1 méteres rudat. Ha félbevágjuk, majd a félrudat is félbevágjuk, majd az egyik darabot ismét félbevágjuk és így tovább, akkor a rúdhosszaknak
$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$$
sorozatához jutunk. Alkalmazva az 1.4. Állítást, a fentivel analóg módon belátható, hogy $\frac{1}{2^n} \to 0$, azaz a keletkezett új darabok tetszőlegesen kicsik lesznek.

3.9. Definíció. Azt mondjuk, hogy (a_n) *nullsorozat*, ha $\lim a_n$ létezik és 0-val egyenlő.

3.10. Definíció. Legyen (a_n) olyan sorozat, melyre $a_n = a$ minden n-re. Ekkor (a_n)-et *konstans sorozat*nak nevezzük. Ha $a_n = a$ csak egy indextől kezdve teljesül, akkor (a_n) *kvázikonstans* sorozat.

A definíció alapján triviális, hogy ha (a_n) kvázikonstans (vagy konstans) a sorozat, akkor $a_n \to a$.

3.11. *Megjegyzés.* A sorozathatárérték egyértelmű. Tehát nem lehet, hogy $a_n \to A$ és $a_n \to B$ teljesülnek, de $A \neq B$.

Bizonyítás. Ha $A \neq B$, akkor $\varepsilon := |A - B|/2$ jelöléssel könnyen látható, hogy $K_\varepsilon(A) \cap K_\varepsilon(B) = \emptyset$, vagyis
$$(A - \varepsilon, A + \varepsilon) \cap (B - \varepsilon, B + \varepsilon) = \emptyset.$$
A sorozathatárérték definíciója alapján azonban elég nagy n-re $a_n \in K_\varepsilon(A) \cap K_\varepsilon(B)$ teljesül, ami nem lehetséges. □

3.12. Állítás. *Ha az (a_n) sorozat konvergens, akkor (a_n) korlátos.*

Bizonyítás. A definíció szerint az $\varepsilon := 1$ számhoz is van olyan N küszöbindex, hogy minden $n \geq N$ esetén
$$A - 1 < a_n < A + 1.$$
Ha $K := \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N-1}|, |A-1|, |A+1|\}$, akkor $\forall n \in \mathbb{N}^+$ esetén $|a_n| \leq K$. □

Igaz-e vajon a fenti állítás megfordítása, vagyis hogy minden korlátos sorozat konvergens is? Tekintsük az $a_n := (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}^+$ képlettel megadott sorozatot! A sorozat tagjai

$$-1, 1, -1, 1, \ldots$$

alakúak. Mivel $|a_n| = 1$, $n \in \mathbb{N}^+$, ezért (a_n) korlátos. Másrészt könnyen meggondolható, hogy mivel a sorozat tagjai között tetszőleges index után előfordul -1 és 1 is, (a_n) nem lehet konvergens. Ezt legegyszerűbben úgy láthatjuk be, hogy ha az A szám határértéke volna a sorozatnak, akkor $\varepsilon = 1/2$-hez is kellene léteznie olyan N küszöbindexnek, melyre

$$a_n \in (A - \frac{1}{2}, A + \frac{1}{2}), \quad n \geq N.$$

Ez azonban nem lehetséges, mert tetszőleges N után szerepel a sorozat tagjai között -1 és 1 is, melyek egyszerre nem lehetnek benne egy 1 hosszúságú nyílt intervallumban.

Igaz azonban az alábbi tétel.

3.13. Tétel. *Ha (a_n) monoton és korlátos, akkor (a_n) konvergens, mégpedig*

1. *monoton növő (a_n) esetén $a_n \to \alpha$, ahol $\alpha = \sup\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} =: \sup_n a_n \in \mathbb{R}$;*

2. *monoton fogyó (a_n) esetén $a_n \to \alpha$, ahol $\alpha = \inf\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} =: \inf_n a_n \in \mathbb{R}$.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy (a_n) monoton növő és korlátos. A Felső határ axiómája miatt a sorozat tagjaiból alkotott halmaznak létezik (véges) felső határa, ez legyen

$$\alpha := \sup_n a_n.$$

Megmutatjuk, hogy $a_n \to \alpha$. Ehhez legyen adva egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám. A halmaz felső határának tulajdonságai alapján

1. $\forall n \in \mathbb{N}^+$ esetén $a_n \leq \alpha$, és

2. $\exists N \in \mathbb{N}^+ : \ a_N > \alpha - \varepsilon$.

Belátjuk, hogy a 2. pont alapján létező N jó küszöbindex ε-hoz. Legyen $n \geq N$ tetszőleges, és becsüljük meg a sorozat n-edik tagját:

$$\alpha - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq \alpha < \alpha + \varepsilon,$$

ahol kihasználtuk, hogy a sorozat monoton növő. Ebből következik, hogy $a_n \to \alpha$.

Monoton fogyó sorozat esetén hasonlóan igazolható, hogy a sorozat a tagjaiból alkotott halmaz infimumához tart. $\square$

3.14. Definíció. Az $(e_n) := ((1 + \frac{1}{n})^n)$ sorozatról már láttuk a 3.5. Példában, hogy monoton növő és korlátos, ezért a 3.13. Tétel alapján konvergens. A határértékét e-vel jelöljük, ez az ún. *Euler-féle szám*, tehát

$$\mathrm{e} := \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

A 3.5. Példában meggondoltak alapján

$$2 \leq \mathrm{e} \leq 4.$$

Később azt is látni fogjuk, hogy e irracionális.

3.15. Tétel (Rendőr-elv)**.** *Legyen (a_n) olyan sorozat, amelyhez léteznek olyan (x_n) és (y_n) sorozatok, hogy*

1. *$\forall n \in \mathbb{N}^+$ esetén $x_n \leq a_n \leq y_n$, és*
2. *$\lim x_n = \lim y_n =: A$.*

Ekkor (a_n) konvergens, és $\lim a_n = A$.

Bizonyítás. Legyen adva egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ szám. Mivel $x_n \to A$, ezért ε-hoz létezik N_1, hogy minden $n \geq N_1$ esetén

$$A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon.$$

Mivel $y_n \to A$, ezért ε-hoz létezik N_2, hogy minden $n \geq N_2$ esetén

$$A - \varepsilon < y_n < A + \varepsilon.$$

Legyen $N := \max\{N_1, N_2\}$ és $n \geq N$ tetszőleges. Ekkor

$$A - \varepsilon < x_n \leq a_n \leq y_n < A + \varepsilon,$$

amiből $|a_n - A| < \varepsilon$. Tehát ε-hoz N jó küszöbindex, így következik az állítás. $\square$

3.16. *Megjegyzés.* Könnyen látható, hogy a 3.15. Tétel 1. feltételében elegendő lett volna megkövetelni, hogy $x_n \leq a_n \leq y_n$ elég nagy n-re teljesül.

A Rendőr-elv szerint tehát két konvergens sorozat „között” elhelyezkedő sorozat is konvergens, és ugyanoda tart, mint a közrefogó sorozatok. Ha csak két sorozatunk van, melyek tagjai között reláció áll fenn, akkor a következő állítás igazolható az előzőhöz hasonló módon.

3.17. Állítás. *Legyen (x_n) és (a_n) olyan konvergens sorozat, melyekre*

$$x_n \leq a_n \text{ minden (elég nagy) } n\text{-re.}$$

Ekkor $\lim x_n \leq \lim a_n$.

3.18. *Megjegyzés.* Vigyázat! Abból, hogy $x_n < a_n$ minden (elég nagy) n-re, szintén csak annyi következik, hogy $\lim x_n \leq \lim a_n$. Például, ha $x_n = 0$ és $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, akkor ugyan $x_n < a_n$ minden n-re, de $\lim x_n = \lim a_n = 0$.

3.3. Műveletek konvergens sorozatokkal

3.19. Állítás. *Ha* $a_n \to 0$ *és* $b_n \to 0$, *akkor* $a_n + b_n \to 0$.

Bizonyítás. Legyen adva $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám. Mivel $a_n \to 0$, ezért $\varepsilon/2$-höz létezik N_1, hogy minden $n \geq N_1$ esetén
$$-\frac{\varepsilon}{2} < a_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Mivel $b_n \to 0$, ezért $\varepsilon/2$-höz létezik N_2, hogy minden $n \geq N_2$ esetén
$$-\frac{\varepsilon}{2} < b_n < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Legyen $N := \max\{N_1, N_2\}$ és $n \geq N$ tetszőleges. Ekkor
$$-\varepsilon = -\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} < a_n + b_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$
azaz $|a_n + b_n| < \varepsilon$, ha $n \geq N$. Tehát $a_n + b_n \to 0$. □

3.20. Állítás. *Ha* $a_n \to 0$ *és* (c_n) *korlátos (vagyis* $|c_n| < K,\ n \in \mathbb{N}^+$*), akkor* $a_n c_n \to 0$.

Bizonyítás. Legyen adva $\varepsilon > 0$ tetszőleges szám. Mivel $a_n \to 0$, ezért $\frac{\varepsilon}{K} > 0$-hoz létezik N, hogy minden $n \geq N$ esetén
$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{K}.$$
Legyen $n \geq N$ tetszőleges. Ekkor
$$|a_n c_n| = |a_n||c_n| \leq |a_n| \cdot K < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon,$$
amiből következik, hogy $a_n c_n \to 0$. □

3.21. Állítás. *Ha* $a_n \to A$ *és* $\lambda \in \mathbb{R}$, *akkor* $\lambda a_n \to \lambda A$.

Bizonyítás. Nyilván
$$(\lambda a_n - \lambda A) = \lambda \cdot (a_n - A).$$
Mivel $a_n - A \to 0$, a λ-val való szorzás pedig tulajdonképpen a konstans (λ) korlátos sorozattal való szorzás, ezért a 3.20. Állítás alapján
$$(\lambda) \cdot (a_n - A) \to 0 \Longleftrightarrow \lambda a_n \to \lambda A.$$
□

3.22. Állítás. *Ha* $a_n \to A$ *és* $b_n \to B$, *akkor* $a_n + b_n \to A + B$.

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy

$$(a_n + b_n - (A+B)) = (a_n - A + b_n - B) = (a_n - A) + (b_n - B).$$

Mivel $a_n - A \to 0$ és $b_n - B \to 0$, ezért a 3.19. Állítás alapján az összegük is 0-hoz tart, azaz $a_n + b_n \to A + B$. □

3.23. Állítás. *Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, akkor $a_n b_n \to AB$.*

Bizonyítás. Egyszerű számolással

$$(a_n b_n - AB) = (a_n b_n - Ab_n + Ab_n - AB) = (a_n - A)(b_n) + A \cdot (b_n - B).$$

Mivel $a_n - A \to 0$, és (b_n) konvergens, ezért korlátos, így a 3.20. Állítás szerint a szorzatuk 0-hoz tart. Hasonlóan, $b_n - B \to 0$, és a konstans (A) korlátos, ezért szorzatuk is 0-hoz tart. A 3.19. Állítás szerint két 0-hoz tartó sorozat összege is 0-hoz tart, tehát $a_n b_n \to AB$. □

3.24. Állítás. *Ha $b_n \to B,\ B \neq 0$, akkor $1/b_n \to 1/B$.*

Bizonyítás. A $B \neq 0$ feltételből adódik, hogy $b_n \neq 0$ elég nagy n-re (hiszen elég nagy n-re b_n a B szám $|B|/2$ sugarú környezetében van, ami nem tartalmazza a 0-t). Legyen $B > 0$. Ekkor

$$\left(\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right) = \left(\frac{B - b_n}{Bb_n}\right) = -\frac{1}{B} \cdot \left(\frac{1}{b_n}\right) \cdot (b_n - B)$$

Tudjuk, hogy $b_n - B \to 0$. Megmutatjuk, hogy $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ korlátos. Mivel $b_n \to B$, ezért $\varepsilon := \frac{B}{2} > 0$ számhoz létezik N, hogy minden $n \geq N$ esetén

$$-\frac{B}{2} < b_n - B < \frac{B}{2},$$

vagyis

$$B - \frac{B}{2} < b_n < B + \frac{B}{2},$$

amiből

$$\frac{2}{B} > \frac{1}{b_n} > \frac{2}{3B}.$$

Ez azt jelenti, hogy $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ korlátos. Mivel a 3.20. Állítás alapján 0-hoz tartó és korlátos sorozat szorzata 0-hoz tart, ezért $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{B}$. □

3.25. Állítás. *Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B \neq 0$, akkor $a_n/b_n \to A/B$.*

Bizonyítás. Mivel
$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = (a_n) \cdot \left(\frac{1}{b_n}\right),$$
az előző két tétel szerint
$$a_n \cdot \frac{1}{b_n} \to A \cdot \frac{1}{B},$$
tehát $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{A}{B}$. □

3.26. Állítás. *Ha $a_n \to A$, akkor $|a_n| \to |A|$.*

Bizonyítás. A 3.15. Tételből (Rendőr-elv) és az alábbi egyenlőtlenségből következik:
$$0 \le ||a_n| - |A|| \le |a_n - A| \ \forall n \in \mathbb{N}^+.$$
□

3.27. Állítás. *Ha $a_n \to A$ és $p \in \mathbb{N}^+$, akkor $a_n^p \to A^p$.*

Bizonyítás. Rögtön adódik a 3.23. Állítás p-szeri alkalmazásából $(b_n) = (a_n)$-re. □

3.28. Állítás. *Ha $a_n \to A$, $a_n > 0$ és $q \in \mathbb{N}^+$, akkor $\sqrt[q]{a_n} \to \sqrt[q]{A}$.*

Bizonyítás. Ha $A = 0$, akkor legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. A konvergencia definíciója alapján a ε^q pozitív számhoz létezik olyan N küszöbindex, hogy ha $n \ge N$, akkor $a_n < \varepsilon^q$, amiből $\sqrt[q]{a_n} < \varepsilon$. Tehát $\sqrt[q]{a_n} \to 0$ teljesül.

Ha $A \ne 0$, akkor a hatványozás azonosságaiból könnyen meggondolható az alábbi:
$$\left|\sqrt[q]{a_n} - \sqrt[q]{A}\right| = |a_n - A| \cdot \frac{1}{(\sqrt[q]{a_n})^{q-1} + (\sqrt[q]{a_n})^{q-2} \cdot \sqrt[q]{A} + (\sqrt[q]{a_n})^{q-3} \cdot (\sqrt[q]{A})^2 + \cdots + (\sqrt[q]{A})^{q-1}}.$$
Itt a második tényező q darab pozitív korlátos sorozat összegének a reciproka, tehát korlátos. Ezt megszorozva egy 0-hoz tartó sorozattal 0-hoz tartó sorozatot kapunk, ami a bizonyítandó állítás. □

3.29. Következmény. *Ha $a_n \to A$, $a_n > 0$ és $p, q \in \mathbb{N}^+$, akkor*
$$a_n^{\frac{p}{q}} \to A^{\frac{p}{q}}.$$

Bizonyítás. Azonnal adódik az előző két állításból és a p/q-adik hatvány definíciójából. □

Ezeknek a tételeknek az alkalmazásaként nézzük a következő példát.

3.30. Példa.
$$\lim \frac{3n^2 - 2n + 1}{2n^2 + n} = \lim \frac{3 - 2 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{3}{2},$$
hiszen $\frac{1}{n} \to 0$, ezért a számlálóban $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \to 0$. A nevezőben $2 + \frac{1}{n} \to 2 + 0 \ne 0$, így a hányadossorozat is konvergens.

3.4. Részsorozatok

3.31. Definíció. Egy $\mathtt{n} : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ szigorúan monoton növekedő sorozatot *indexsorozatnak* nevezünk.

Könnyen meggondolható, hogy $\forall i \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$\mathtt{n}_i \geq i. \tag{3.3}$$

Az $a : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ sorozat egy *részsorozatának* egymást követő tagjait úgy nyerjük az eredeti sorozatból, hogy egy szigorúan monoton növekedő indexsorozat mentén válogatjuk ki őket. Például $(a_n) := 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ és $(\mathtt{n}_i) := 2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots$ esetén

$$(a_{\mathtt{n}_i}) := \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6} \ldots, \frac{1}{2n}, \ldots$$

lesz a részsorozat.[1]

3.33. Állítás. *Ha* $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, *akkor bármely* $(a_{\mathtt{n}_i})$ *részsorozatára* $\lim_{i\to\infty} a_{\mathtt{n}_i} = A$

Bizonyítás. Azonnal adódik a sorozat konvergenciájának definíciójából: adott $\varepsilon > 0$-hoz ugyanaz az N küszöbindex jó lesz a részsorozathoz, is, mivel $\mathtt{n}_N \geq N$. □

3.34. Tétel. *Minden sorozatnak van monoton részsorozata.*

Bizonyítás. Az (a_n) sorozat egy a_m tagját *csúcsnak* nevezzük, ha $\forall n \geq m$ esetén $a_n \leq a_m$. Két eset lehetséges:

1. Az (a_n) sorozat tagjai között végtelen sok csúcs van.
2. Az (a_n) sorozat tagjai között véges sok (esetleg 0) csúcs van.

Nézzük az 1. esetet! Legyen a_{n_1} egy csúcs a sorozatban. Mivel végtelen sok csúcs van, ezért létezik olyan $n_2 > n_1$ index, hogy a_{n_2} csúcs. Ismét felhasználva, hogy végtelen sok csúcs van a sorozatban, létezik olyan $n_3 > n_2$ index, amire a_{n_3} csúcs. Folytatva az eljárást, kapjuk a sorozatnak csúcsokból álló

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$$

részsorozatát, amely a csúcs definíciója alapján monoton fogyó részsorozata (a_n)-nek.

[1]A részsorozat precíz definíciója a következő.

3.32. Definíció. Legyen $a, b : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy b az a sorozat egy *részsorozata*, ha $\exists \mathtt{n} : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ indexsorozat, melyre $b = a \circ \mathtt{n}$, azaz $(b_i) = (a_{\mathtt{n}_i})$.

A 2. esetben létezik olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy minden $n \geq N$ esetén a_n *nem* csúcs. Legyen $n_1 := N$. Mivel a_{n_1} nem csúcs, ezért létezik $n_2 > n_1$ index, hogy $a_{n_2} > a_{n_1}$, a csúcs definíciója miatt. Mivel a_{n_2} sem csúcs, ezért találunk olyan $n_3 > n_2$ indexet, melyre $a_{n_3} > a_{n_2}$. Folytatva az eljárást, kapjuk a sorozatnak egy olyan (csupa nem-csúcsból álló)

$$a_{n_1},\, a_{n_2},\, a_{n_3},\, \ldots$$

részsorozatát, mely a sorozat tagjainak megválasztása alapján szigorúan monoton növő.

□

3.35. Feladat. Mutassunk olyan konvergens sorozatot, amelynek van szigorúan monoton növő és csökkenő részsorozata is!

3.36. Tétel (Bolzano–Weierstrass)**.** *Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. A 3.34. Tétel alapján a sorozatnak van monoton részsorozata. Nyilván ez a részsorozat is korlátos lesz. A 3.13. Tétel szerint egy monoton és korlátos sorozat konvergens. □

3.5. Sorozat limes superiorja és limes inferiorja

Legyen (a_n) korlátos sorozat. Készítsük el az

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &:= \sup\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\} \\
\alpha_2 &:= \sup\{a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots\} \\
&\;\vdots \\
\alpha_k &:= \sup\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n, \ldots\} \\
&\;\vdots
\end{aligned} \tag{3.4}$$

számsorozatot. Mivel $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} \supset \{a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$, ezért a felső határukra nyilván $\alpha_1 \geq \alpha_2$ (ld. az 1.45. Feladatot). Ezt továbbgondolva látszik, hogy (α_k) monoton fogyó sorozat. Az (α_k) ugyanolyan korlátok közé szorítható, mint az eredeti (a_n) sorozat. Mivel (α_k) monoton és korlátos, ezért konvergens, és $\inf\limits_k \alpha_k$-hoz tart (ld. a 3.13. Tételt).

3.37. Definíció. $\limsup a_n := \lim \alpha_k$.

Az előző gondolatmenethez hasonlóan legyen

$$\begin{aligned}
\beta_1 &:= \inf\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\} \\
\beta_2 &:= \inf\{a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots\} \\
&\vdots \\
\beta_k &:= \inf\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_n, \dots\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Nyilván $\beta_1 \leq \beta_2$ (ld. az 1.49. Feladatot), és ez a tendencia megmarad, így (β_k) monoton növő. A (β_k) is korlátos. Mivel (β_k) monoton és korlátos, ezért konvergens.

3.38. Definíció. $\liminf a_n := \lim \beta_k$.

A definíciókból látszik, hogy $\forall k \in \mathbb{N}^+$ esetén $\alpha_k \geq \beta_k$, így

$$\liminf a_n = \lim \beta_k \leq \lim \alpha_k = \limsup a_n.$$

Bizonyítás nélkül megemlítjük a $\limsup a_n$ érdekes tulajdonságait.

1. Minden $\varepsilon > 0$ esetén a $(\limsup a_n) - \varepsilon$ számnál nagyobb tag végtelen sok van az (a_n) sorozatban, a $(\limsup a_n) + \varepsilon$ számnál nagyobb tag pedig csak véges sok van az (a_n) sorozatban.

2. A $\limsup a_n$ az (a_n) sorozat konvergens részsorozatainak a határértékei közül a legnagyobb (tehát van is olyan $(a_{\mathtt{n}_i})$ konvergens részsorozat, amelyre $a_{\mathtt{n}_i} \to \limsup a_n$.)

Értelemszerű módosítással megfogalmazhatók a $\liminf a_n$ tulajdonságai is.

1. Minden $\varepsilon > 0$ esetén a $(\liminf a_n) + \varepsilon$ számnál kisebb tag végtelen sok van az (a_n) sorozatban, a $(\liminf a_n) - \varepsilon$ számnál kisebb tag pedig csak véges sok van az (a_n) sorozatban.

2. A $\liminf a_n$ az (a_n) sorozat konvergens részsorozatainak a határértékei közül a legkisebb (tehát van is olyan $(a_{\mathtt{n}_i})$ konvergens részsorozat, amelyre $a_{\mathtt{n}_i} \to \liminf a_n$.)

A fentiek segítségével bebizonyítható az alábbi állítás.

3.39. Tétel. *Az (a_n) korlátos sorozat konvergens* $\iff \liminf a_n = \limsup a_n$.

Bizonyítás. Ha (a_n) konvergens, akkor a 3.33. Állítás alapján minden részsorozata ugyanoda tart, ezért a konvergens részsorozatok határértékei közül a legnagyobb megegyezik a legkisebbel, így a fenti 2. pontok alapján $\liminf a_n = \limsup a_n$.

Megfordítva, ha $\liminf a_n = \limsup a_n = A$, akkor A-ra teljesül mindkét fenti 1. tulajdonság, vagyis bármely $\varepsilon > 0$ esetén az $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ intervallumon kívül a sorozatnak csak véges sok tagja van – ami éppen azt jelenti, hogy $a_n \to A$. $\square$

3.40. Feladat. Igaz-e, hogy ha az (a_n) és (b_n) sorozatok korlátosak, akkor $\limsup(a_n + b_n) = \limsup a_n + \limsup b_n$?

3.41. Feladat. Legyen (q_n) a $(0,1) \cap \mathbb{Q}$ elemeinek egy sorozatba rendezése. Határozzuk meg $\liminf q_n$ és $\limsup q_n$ értékét!

3.6. Cauchy-féle konvergenciakritérium

A sorozat konvergenciájának definíciója tartalmaz egy komoly nehézséget: meg kell sejteni azt az $A \in \mathbb{R}$ számot, amelyhez a sorozat tagjai tetszőlegesen közel kerülnek. Ezt küszöböli ki a Cauchy-féle konvergenciakritérium.

3.42. Definíció. Azt mondjuk, hogy (a_n) *Cauchy-sorozat*, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N}^+, \text{ hogy } \ \forall n, m \geq N \text{ esetén } |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Tehát egy sorozat Cauchy-sorozat, ha *bármely* pozitív ε-hoz van olyan küszöbindex, hogy ettől az indextől kezdve a sorozat tagjai ε-nál közelebb vannak egymáshoz.

3.43. Tétel (Cauchy-féle konvergenciakritérium)**.** *Legyen (a_n) számsorozat. Ekkor*

$$(a_n) \text{ konvergens} \iff (a_n) \text{ Cauchy-sorozat.}$$

Tehát az, hogy a számsorozat tetszőlegesen megközelít egy számot, egyenértékű azzal, hogy a sorozat tagjai tetszőlegesen megközelítik egymást.

Bizonyítás. $(\Rightarrow)$ Legyen $\lim a_n =: A$. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $a_n \to A$, ezért az $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ számhoz

$$\exists N, \text{ hogy } \forall n \geq N \text{ esetén } |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Legyenek $n, m \geq N$ tetszőleges indexek. Ekkor

$$|a_n - a_m| = |a_n - A + A - a_m| \leq |a_n - A| + |A - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ezek szerint (a_n) Cauchy-sorozat.

$(\Leftarrow)$ Legyen (a_n) Cauchy-sorozat. Megmutatjuk, hogy (a_n) korlátos. Ugyanis az $\varepsilon := 1$ pozitív számhoz is $\exists N_1$, hogy $\forall n, m \geq N_1$ esetén

$$|a_n - a_m| < 1.$$

Rögzítsük az $m = N_1$ indexet! Így minden $n \geq N_1$ esetén

$$a_{N_1} - 1 < a_n < a_{N_1} + 1,$$

ami azt jelenti, hogy $\forall n \geq N_1$ esetén a sorozat tagjai $a_{N_1} - 1$ és $a_{N_1} + 1$ közé esnek. Az $a_1, a_2, \ldots, a_{N_1}$ véges sok tag már nem ronthatja el az egész (a_n) sorozat korlátosságát. Mivel tehát (a_n) korlátos, ezért a 3.36. Bolzano–Weierstrass-tétel miatt van $(a_{\mathtt{n}_i})$ konvergens részsorozata. Legyen

$$\alpha := \lim a_{\mathtt{n}_i}.$$

Megmutatjuk, hogy $a_n \to \alpha$. A bizonyítás meglehetősen technikai, ezért a lényegét szavakkal is összefoglaljuk. A konvergens részsorozat elegendően nagy indexű tagjai α közelében vannak. Mivel az eredeti sorozat Cauchy, ezért egy (elég nagy) index után a tagjai közel vannak egymáshoz. Tehát a konvergens részsorozathoz nem tartozó tagok elég nagy indexre közel vannak a részsorozat tagjaihoz – és így α-hoz is. Lássuk most részletesen! Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Mivel $a_{\mathtt{n}_i} \to \alpha$, ezért az $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ számhoz $\exists N_2$, hogy

$$\forall i \geq N_2 \text{ esetén } |a_{\mathtt{n}_i} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.5}$$

Mivel (a_n) Cauchy-sorozat, ezért az $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ számhoz $\exists N$ index, amit választhatunk úgy is, hogy $N \geq N_2$ legyen, melyre

$$\forall n, m \geq N \text{ esetén } |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.6}$$

Legyen most $n \geq N(\geq N_2)$ tetszőleges! Ekkor a (3.5) alapján és a (3.6) feltételben $m = \mathtt{n}_N$-et véve (ezt megtehetjük, mivel (3.3) alapján $n_N \geq N$ is teljesül) kapjuk, hogy

$$|a_n - \alpha| = |a_n - a_{\mathtt{n}_N} + a_{\mathtt{n}_N} - \alpha| \leq |a_n - a_{\mathtt{n}_N}| + |a_{\mathtt{n}_N} - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tehát rögzített $\varepsilon > 0$-hoz találtunk olyan N indexet, hogy $n \geq N$ esetén $|a_n - \alpha| < \varepsilon$, ezért $a_n \to \alpha$ teljesül. □

3.7. Divergens sorozatok, sorozatok végtelen határértéke

3.44. Definíció. Egy (a_n) sorozatot *divergens*nek nevezünk, ha nem konvergens. Másképp: ha $\forall A \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists \varepsilon > 0$, hogy $\forall N \in \mathbb{N}^+$ küszöbindex után $\exists n \geq N$ olyan, hogy $|a_n - A| \geq \varepsilon$.

Divergens sorozat például az (n^2) és a $((-1)^n)$ sorozat is. Az (n^2) sorozathoz tágabb értelemben lehetőség lesz határértéket rendelni.

Korlátos (a_n) sorozat esetén a 3.39. Tétel alapján a divergencia ekvivalens azzal, hogy

$$\limsup a_n \neq \liminf a_n.$$

Könnyen látható, hogy

$$\limsup (-1)^n = 1 \neq \liminf (-1)^n = -1.$$

3.45. Definíció. Azt mondjuk, hogy az (a_n) számsorozatnak $+\infty$ *a határértéke*, ha $\forall K \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists N \in \mathbb{N}^+$ küszöbindex, hogy $\forall n \geq N$ esetén $a_n > K$, vagyis $a_n \in (K, +\infty)$.
Ha az (a_n) sorozat ilyen, akkor azt jelölje

$$\lim a_n = +\infty \text{ vagy } a_n \to +\infty.$$

Ez a definíció arról szól, hogy a sorozat elég nagy küszöbindextől kezdve „közel van" a $+\infty$-hez. Ezért könnyen látható, hogy elég lett volna a feltételt pozitív K számokra megkövetelni. Hasonlóan definiáljuk a $-\infty$-hez tartás fogalmát.

3.46. Definíció. Azt mondjuk, hogy az (a_n) számsorozatnak $-\infty$ *a határértéke*, ha $\forall K \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists N \in \mathbb{N}^+$ küszöbindex, hogy $\forall n \geq N$ esetén $a_n < K$, vagyis $a_n \in (-\infty, K)$.
Ha az (a_n) sorozat ilyen, akkor azt jelölje

$$\lim a_n = -\infty \text{ vagy } a_n \to -\infty.$$

Könnyen meggondolható, hogy a definíciót elég lett volna negatív K számokra megkövetelni.
Példaként: $\lim n^2 = +\infty$ és $\lim(-n^2) = -\infty$.

3.47. *Megjegyzés.* A fenti definíciókból következik, hogy a sorozathatárérték itt is egyértelmű, hasonlóan a véges határérték esetéhez.

Megmutatjuk, hogy egy $+\infty$-hez tartó sorozat alulról, egy $-\infty$-hez tartó pedig felülről korlátos.

3.48. Állítás. *Ha $a_n \to +\infty$, akkor (a_n) alulról korlátos, ha pedig $a_n \to -\infty$, akkor (a_n) felülről korlátos sorozat.*

Bizonyítás. Legyen $a_n \to +\infty$ tetszőleges sorozat. Ekkor $K = 1$-hez is létezik olyan $N \in \mathbb{N}^+$ küszöbindex, hogy minden $n \geq N$ esetén $a_n > 1$. Legyen

$$L := \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{N-1}, 1\}.$$

Világos, hogy $a_n \geq L$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén. Az $a_n \to -\infty$ eset hasonlóan látható be. $\square$

Jelölje a továbbiakban

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\} \tag{3.7}$$

az ún. *kibővített számegyenest*, tehát a valós számokhoz hozzávéve a $+\infty$ és $-\infty$ szimbólumokat. Fontos, hogy ez utóbbiak valóban szimbólumok, és nem valós számok!

3.49. Állítás. *Ha $\lim a_n = A$ ($A \in \overline{\mathbb{R}}$), akkor bármely (a_{n_i}) részsorozatra $\lim a_{n_i} = A$*

Bizonyítás. Ugyanúgy belátható, mint a 3.33. Állítás. □

Könnyen meggondolható az alábbi állítás.

3.50. Állítás. *Minden monoton sorozatnak van határértéke.*

Bizonyítás. Ha a monoton sorozat korlátos, akkor a 3.13. Tétel alapján tudjuk, hogy konvergens. Ha (a_n) nem korlátos, akkor monoton növő esetben ez csak úgy lehet, hogy felülről nem korlátos. Legyen $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Mivel (a_n)-nek K nem felső korlátja, ezért létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy $a_N > K$. No de $n \geq N$ esetén – a monoton növést kihasználva – kapjuk, hogy

$$a_n \geq a_N > K.$$

Mivel K tetszőleges volt, ebből következik, hogy $a_n \to +\infty$.
A monoton fogyó eset hasonlóan bizonyítható, ekkor a sorozat $-\infty$-hez tart. □

A $+\infty$ vagy $-\infty$ határértékű sorozatokkal végzett műveletek (ilyenek összege, szorzata, hányadosa) nagy körültekintést igényelnek.

3.51. Tétel (Végtelen határérték és műveletek)**.** *Az alábbiak teljesülnek az (a_n) és (b_n) sorozatokra.*

1. *Ha $a_n \to +\infty$ és (b_n) alulról korlátos (pl. (b_n) konvergens vagy $+\infty$-hez tart), akkor $a_n + b_n \to +\infty$.*

2. *Ha $a_n \to +\infty$ és (b_n)-nek egy indextől kezdve van pozitív alsó korlátja (pl. (b_n) egy pozitív számhoz vagy $+\infty$-hez tart), akkor $a_n \cdot b_n \to +\infty$.*

3. *Ha $a_n \to +\infty$ és (b_n)-nek egy indextől kezdve van negatív felső korlátja (pl. (b_n) egy negatív számhoz vagy $-\infty$-hez tart), akkor $a_n \cdot b_n \to -\infty$.*

4. *Ha $a_n \to -\infty$ és (b_n) felülről korlátos (pl. (b_n) konvergens vagy $-\infty$-hez tart), akkor $a_n + b_n \to -\infty$.*

5. *Ha $a_n \to -\infty$ és (b_n)-nek egy indextől kezdve van pozitív alsó korlátja (pl. (b_n) egy pozitív számhoz vagy $+\infty$-hez tart), akkor $a_n \cdot b_n \to -\infty$.*

6. *Ha $a_n \to -\infty$ és (b_n)-nek egy indextől kezdve van negatív felső korlátja (pl. (b_n) egy negatív számhoz vagy $-\infty$-hez tart), akkor $a_n \cdot b_n \to +\infty$.*

7. *Ha $|a_n| \to +\infty$, akkor $\frac{1}{a_n} \to 0$.*

8. *Ha $a_n \to 0$ és $a_n > 0$ egy indextől kezdve, akkor $\frac{1}{a_n} \to +\infty$, ha pedig $a_n < 0$ egy indextől kezdve, akkor $\frac{1}{a_n} \to -\infty$.*

Bizonyítás. 1. Legyen $K \in \mathbb{R}$ tetszőleges. A feltétel szerint létezik olyan $L \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén $b_n \geq L$. Mivel $a_n \to +\infty$, ezért $K - L$-hez létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N$ esetén $a_n > K - L$. Tehát $n \geq N$ esetén

$$a_n + b_n > K - L + L = K,$$

amiből következik az állítás.

2. Legyen $K > 0$ tetszőleges szám. A feltétel szerint létezik olyan $L \in \mathbb{R}^+$ szám és $N_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N_1$ esetén $b_n \geq L$. Mivel $a_n \to +\infty$, ezért K/L-hez létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N_2$ esetén $a_n > K/L$. Legyen $N := \max\{N_1, N_2\}$. Ekkor $n \geq N$ indexekre

$$a_n \cdot b_n > \frac{K}{L} \cdot L = K,$$

ahol kihasználtuk, hogy $K/L > 0$ és $L > 0$. Így következik az állítás.

A $3 - 6$. állítások a fentiekkel analóg módon láthatók be.

7. Legyen $|a_n| \to +\infty$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor az $1/\varepsilon > 0$ számhoz létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy $n \geq N$ esetén $|a_n| > 1/\varepsilon$. Ebből

$$\frac{1}{|a_n|} = \left|\frac{1}{a_n}\right| < \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Ezért $1/a_n \to 0$.

8. Az előzőhöz hasonlóan látható. □

A fentiek alapján könnyen meggondolhatók az alábbi, táblázatba rendezett eredmények sorozatok összegének, szorzatának ill. hányadosának határértékeiről.

3.52. Állítás. *Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, akkor az $(a_n + b_n)$ sorozat határértéke az alábbiak szerint alakul:*

	$A \in \mathbb{R}$	$A = +\infty$	$A = -\infty$
$B \in \mathbb{R}$	$A + B$	$+\infty$	$-\infty$
$B = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$B = -\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, akkor az $(a_n \cdot b_n)$ sorozat határértéke az alábbiak szerint alakul:

	$A > 0$	$A = 0$	$A < 0$	$A = +\infty$	$A = -\infty$
$B > 0$	$A \cdot B$	0	$A \cdot B$	$+\infty$	$-\infty$
$B = 0$	0	0	0	?	?
$B < 0$	$A \cdot B$	0	$A \cdot B$	$-\infty$	$+\infty$
$B = +\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$B = -\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Ha $a_n \to A$ és $b_n \to B$, akkor az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sorozat határértéke az alábbiak szerint alakul:

	$A > 0$	$A = 0$	$A < 0$	$A = +\infty$	$A = -\infty$
$B > 0$	A/B	0	A/B	$+\infty$	$-\infty$
$B = 0$	?	?	?	?	?
$B < 0$	A/B	0	A/B	$-\infty$	$+\infty$
$B = +\infty$	0	0	0	?	?
$B = -\infty$	0	0	0	?	?

Ahol a táblázatokban ? szerepel, ott többfajta eshetőség van – ezeket a gyakorlatokon részletezzük. Álljon itt néhány kiragadott példa!

3.53. Példa. Ha $a_n \to 0$ és $b_n \to +\infty$ (vagy $b_n \to -\infty$), akkor az $a_n \cdot b_n$ sorozat határértéke bármi lehet, és az is előfordulhat, hogy a szorzatsorozatnak nem létezik határértéke. Például, előre rögzített A számhoz tartó sorozatot kapunk az

$$a_n = \frac{A}{n}, \quad b_n = n \quad (n \in \mathbb{N})$$

választással, hiszen ekkor $a_n \cdot b_n = A$ a konstans A sorozat.

Ha

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = n^2 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor $a_n \cdot b_n = n \to +\infty$, ha pedig

$$a_n = -\frac{1}{n}, \quad b_n = n^2 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor $a_n \cdot b_n = -n \to -\infty$.

A szorzatsorozatnak nem létezik hatáértéke például az alábbi esetben:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad b_n = n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

mivel $a_n \cdot b_n = (-1)^n$.

A $\overline{\mathbb{R}}$ halmazbeli műveleteket az alapján szokták definiálni, ami a fenti táblázatokban a megfelelő határértékkel rendelkező sorozatok közötti műveletekre érvényes.

A végtelen határérték és a rendezés kapcsolatáról szól az alábbi állítás.

3.54. Állítás.

1. *Ha $a_n \to +\infty$ és (b_n) olyan sorozat, hogy egy indextől kezdve $b_n \geq a_n$, akkor $b_n \to +\infty$.*
2. *Ha $a_n \to -\infty$ és (b_n) olyan sorozat, hogy egy indextől kezdve $b_n \leq a_n$, akkor $b_n \to -\infty$.*

Bizonyítás. Az olvasóra bízzuk. □

3.8. Sorozatok középsorozatai

3.55. Definíció. Legyen (a_n) egy pozitív tagú sorozat, vagyis $a_n > 0$ minden n-re. Képezzük ekkor (a_n)

- *számtaniközép-sorozatát* mint
$$A_n := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^+;$$
- *mértaniközép-sorozatát* mint
$$G_n := \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}, \quad n \in \mathbb{N}^+;$$
- *harmonikusközép-sorozatát* mint
$$H_n := \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}, \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

3.56. Feladat. Igazoljuk, hogy ha egy pozitív tagú sorozat monoton növő, akkor mértani- és harmonikusközép-sorozata is monoton növő!

3.57. Tétel. *Ha $a_n \to A$ $(A \in \overline{\mathbb{R}})$, akkor a fent definiált középsorozatai is mind A-hoz tartanak, tehát*
$$A_n \to A,\ G_n \to A,\ \text{és } H_n \to A.$$

Bizonyítás. 1. Legyen először $a_n \to 0$. Megmutatjuk, hogy (A_n), (G_n) és (H_n) is 0-hoz tart.
Legyen $\varepsilon > 0$ rögzítve. Ekkor $\varepsilon/2$-höz létezik N_1 küszöbindex, hogy
$$\forall n \geq N_1 \text{ esetén } |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.8}$$
Rögzítsük le N_1-et! Ekkor $|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{N_1}|$ konstans. Ezért $\varepsilon/2$-höz létezik olyan $N_2 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n \geq N_2$ esetén
$$\frac{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{N_1}|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.9}$$
Legyen $N := \max\{N_1, N_2\}$. Ha $n \geq N$, akkor (3.8) és (3.9) alapján
$$\begin{aligned} |A_n| &= \left|\frac{a_1 + \cdots a_{N_1} + a_{N_1+1} + \cdots + a_n}{n}\right| \leq \frac{|a_1| + \cdots + |a_{N_1}|}{n} + \frac{|a_{N_1+1}| + \cdots + |a_n|}{n} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon/2 \cdot (n - N_1)}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon/2 \cdot n}{n} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Ez bizonyítja az $A_n \to 0$ állítást. Az 1.12. Tétel alapján

$$0 \le H_n \le G_n \le A_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

ezért a 3.15. Tételből (Rendőr-elv) következik, hogy $G_n \to 0$ és $H_n \to 0$ is teljesül.

2. Legyen most $a_n \to A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, és mivel $a_n > 0$, azért $A > 0$. Ekkor

$$\begin{aligned} |A_n - A| &= \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - A \right| = \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n - nA}{n} \right| \\ &= \left| \frac{a_1 - A + a_2 - A + \cdots + a_n - A}{n} \right| \le \frac{|a_1 - A| + |a_2 - A| + \cdots + |a_n - A|}{n} \end{aligned}$$

A kapott felső becslés a $(b_n) := (|a_n - A|)$ 0-hoz tartó sorozat számtaniközép-sorozata, ami 1. alapján 0-hoz tart. Így $|A_n - A| \to 0$, vagyis $a_n \to A$.

Másrészt $\frac{1}{a_n} \to \frac{1}{A}$, és így az előbbieket az $(\frac{1}{a_n})$ sorozatra alkalmazva kapjuk, hogy

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} \to \frac{1}{A} \Longrightarrow H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \to A.$$

Az 1.12. Tétel és a 3.15. Tétel (Rendőr-elv) miatt $G_n \to A$ is igaz.

3. Már csak az $A = +\infty$ eset van hátra. A 3.52. Állítás 7. pontja alapján $\frac{1}{a_n} \to 0$. Ezért a bizonyítás 1. része miatt

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n} \to 0 \Longrightarrow H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \to +\infty,$$

mivel (H_n) pozitív tagú sorozat (ld. a 3.52. Állítás 8. pontja). Kihasználva, hogy $0 < H_n \le G_n \le A_n$ és $H_n \to +\infty$, valamint alkalmazva a 3.54. Állítást kapjuk, hogy

$$G_n \to +\infty \text{ és } A_n \to +\infty.$$

□

3.58. Feladat. Mutassunk olyan divergens sorozatot, amelynek számtaniközép-sorozata konvergens!

3.59. Példa. Legyen

$$a_n := \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Mi az (a_n) határértéke?

Nyilván

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n}},$$

vagyis (a_n) mértaniközép-sorozata az $(\frac{1}{n})$ sorozatnak. Ezért a 3.57. Tétel alapján $a_n \to 0$.

3.60. Példa. Legyen
$$a_n := \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$
Mi az (a_n) határértéke?

Vegyük észre, hogy a (3.1) egyenlőségben definiált (e_n) sorozatból képezett mértaniközép-sorozat a következő alakú:
$$\sqrt[n]{e_1 \cdot e_2 \cdot \dots \cdot e_n} = \sqrt[n]{\frac{2}{1} \cdot \frac{3^2}{2^2} \cdot \dots \cdot \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n}} = \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}},$$
ami a 3.57. Tétel alapján e-hez tart. Ebből
$$a_n = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{\sqrt[n]{n!}} \to 1 \cdot \mathrm{e} = \mathrm{e}.$$

3.9. Nevezetes sorozathatárértékek

1.
$$\lim \frac{1}{n} = 0.$$

Bizonyítás. Ld. a 3.8. Állítást. □

2.
$$\lim \sqrt[n]{n} = 1.$$

Bizonyítás. A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségből (ld. az 1.12. Tételt) $n \geq 2$-re
$$1 \leq \sqrt[n]{n} = \Big(\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot \underbrace{1 \cdot \dots \cdot 1}_{n-2}\Big)^{1/n} \leq \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n} + n - 2}{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \to 1 + 0 = 1.$$
Innen a 3.15. Rendőr-elv alapján következik az állítás. □

3.
$$\lim \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a \in \mathbb{R}^+).$$

Bizonyítás. Az Arkhimédészi axiómából következik, hogy $\exists N \in \mathbb{N} : \frac{1}{N} < a < N$. Ezért $n \geq N$ esetén
$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < a < N \leq n \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{n}} < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}.$$
Innen a 2. pont és a 3.15. Rendőr-elv alapján következik az állítás. □

4.

$$\lim q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1, \\ 1, & q = 1, \\ +\infty, & q > 1, \\ \nexists, & q \le -1. \end{cases}$$

Bizonyítás. Ha $0 < q < 1$, akkor könnyen látható, hogy (q^n) (szigorúan) monoton fogyó, tehát a 3.13. Tétel szerint az infimumához tart. Ha $a > 0$ infimuma volna, akkor $q^n \ge a$, vagyis $q \ge \sqrt[n]{a}$ volna, amiből határértéket véve $q \ge 1$ – ez ellentmondás. Tehát $a = 0$, és így $q^n \to 0$.

Ha $-1 < q \le 0$, akkor az előbbiek szerint a sorozat abszolút értéke, így maga a sorozat is 0-hoz tart. Ha $q > 1$, akkor $(\frac{1}{q})^n = \frac{1}{q^n} \to 0$, és ebből $q^n \to +\infty$, mivel a sorozat pozitív tagú. A $q \le -1$ esetben a sorozatnak van $+\infty$-hez és $-\infty$-hez tartó részsorozata. □

5.

$$\lim \left(n^k \cdot q^n\right) = 0 \quad (k \in \mathbb{Z}, |q| < 1).$$

Bizonyítás. Elég belátni a $0 < q < 1$ esetre. Mivel

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^k \cdot q^{n+1}}{n^k \cdot q^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \cdot q \to 1 \cdot q = q < 1,$$

ezért elég nagy n-re $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, így

$$a_{n+1} < a_n.$$

Tehát a sorozat egy indextől kezdve (szigorúan) monoton fogyó, így az infimumához tart. Ha $a > 0$ alsó korlátja lenne, akkor

$$a \le n^k \cdot q^n \iff \sqrt[n]{a} \le (\sqrt[n]{n})^k \cdot q$$

volna, amiből határértéket véve

$$1 \le q$$

következne – ez ellentmondás. □

6.

$$\lim \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad (k \in \mathbb{Z}, a > 1).$$

Bizonyítás. Azonnal adódik az előzőből $q = \frac{1}{a}$ jelöléssel. □

7.

$$\lim \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a > 1).$$

Bizonyítás. Ha $n \geq [a] + 1 =: N$ ($[a]$ az a egészrésze), akkor $\frac{a}{n} < 1$. Így $n > N$-re

$$0 < \frac{a^n}{n!} = \frac{a \cdot a \cdots a}{1 \cdot 2 \cdots n} = \frac{a^N}{N!} \cdot \frac{a}{N+1} \cdot \frac{a}{N+2} \cdots \frac{a}{n} < \frac{a^N}{N!} \cdot 1 \cdots 1 \cdot \frac{a}{n} = \frac{a^N}{N!} \cdot \frac{a}{n} \to 0.$$

Innen a 3.15. Rendőr-elv alapján következik az állítás. □

8.

$$\lim \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Bizonyítás.

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{n \cdot n \cdots n} \leq \frac{1}{n} \cdot 1 \cdots 1 = \frac{1}{n},$$

és Rendőr-elv. □

9.

$$\lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

(A valós kitevő pontos értelmezését ld. a következő szakaszban.)

Bizonyítás. Legyen $a_n \to +\infty$ tetszőleges sorozat. Ekkor, ha $[a_n]$ jelöli az a_n egészrészét,

$$\left(1 + \frac{1}{[a_n] + 1}\right)^{[a_n]} \leq \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \leq \left(1 + \frac{1}{[a_n]}\right)^{[a_n]+1}.$$

A bal ill. jobb oldalon az $((1 + \frac{1}{n+1})^n)$ ill. $((1 + \frac{1}{n})^{n+1})$ egy-egy részsorozata áll, melyek mindegyike a 3.14. Definíció szerint e-hez tart, tehát

$$\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to \mathrm{e}.$$

Ha $x > 0$, akkor $a_n := \frac{n}{x} \to +\infty$, ezért az előzőek és a később belátandó 3.69. Állítás alapján

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x \to \mathrm{e}^x.$$

A negatív x esete hasonlóan gondolható meg. □

10.
$$\lim \left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=\lim \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}=\mathrm{e}. \tag{3.10}$$

Bizonyítás. Fejtsük ki az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ kifejezést a Binomiális tétel szerint!

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \binom{n}{0}+\binom{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2}+\binom{n}{3}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\binom{n}{n}\cdot\frac{1}{n^n}\\ &=1+n\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{n}\right)^n\\ &=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!}+\cdots\\ &+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!}\end{aligned} \tag{3.11}$$

A (3.11) kifejtésből világos, hogy

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!},$$

amiből határértéket véve

$$\mathrm{e}\le \lim \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}.$$

A másik irányú egyenlőtlenség bizonyításához tekintsünk egy tetszőleges tagot a (3.11) kifejtésben:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}. \tag{3.12}$$

Most rögzítsük le k-t! Világos, hogy $n\to\infty$ esetén a (3.12) kifejezés $1/k!$-hoz tart. Ha n olyan, hogy $k\le n$, akkor (3.11) alapján

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ge \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!}+\cdots+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}.$$

Az $n\to\infty$ határátmenetet elvégezve kapjuk, hogy

$$\mathrm{e}\ge 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}.$$

Mivel k tetszőleges volt, ezért

$$\mathrm{e} \geq \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}\right)$$

is teljesül, amivel a bizonyítás teljes. $\square$

11.

$$\lim \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

Bizonyítás. Ld. a 3.59. Példát. $\square$

12.

$$\lim \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \mathrm{e}.$$

Bizonyítás. Ld. a 3.60. Példát. $\square$

3.61. Feladat. Igazoljuk az alábbiakat!

1. Ha a pozitív tagú (a_n) sorozatra $\lim a_n = A \in \mathbb{R}^+$, akkor $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$ teljesül! Mi a helyzet, ha (a_n) határértéke 0 vagy végtelen?

2. Ha az (a_n) sorozatra $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$, ahol $|A| < 1$, akkor $\lim a_n^n = 0$. Mi a helyzet, ha $|A| \geq 1$?

3.10. Valós számok valós kitevőjű hatványai

Az 1. fejezet végén volt szó valós számok racionális kitevős hatványairól, amelyeket a középiskolában megismert módon vezettünk be. Most a sorozathatárérték fogalmának ismeretében definiálni tudjuk egy (pozitív) szám tetszőleges valós, így irracionális kitevős hatványát is úgy, hogy a hatványozástól „elvárt" tulajdonságok érvényben maradjanak.

A definícióhoz szükségünk lesz a következő állításokra.

3.62. Állítás. *Legyen $r, s \in \mathbb{Q}$, $r < s$. Ha $a > 1$, akkor*

$$a^r < a^s,$$

ha pedig $0 < a < 1$, akkor

$$a^r > a^s.$$

Legyen $0 < a < b$ és $r \in \mathbb{Q}$. Ha $r > 0$, akkor

$$a^r < b^r,$$

ha pedig $r < 0$, akkor

$$a^r > b^r.$$

Bizonyítás. Legyen először $a > 1$. A hatványozás azonosságaiból és a valós számok (r6.) rendezési tulajdonságából következik, hogy

$$a^r < a^s \Leftrightarrow 1 < a^{s-r},$$

ezért elég belátni, hogy ha $p \in \mathbb{Q}$, $p > 0$, akkor $a^p > 1$. Legyen $p = \frac{n}{m}$, $m \neq 0$. Ekkor

$$a^p = \sqrt[m]{a^n}.$$

Mivel $a > 1$, azért szintén a hatványozás azonosságaiból és a rendezés (r6.) tulajdonságából következik, hogy $a^n > 1$ is teljesül. Tegyük fel indirekt, hogy $\sqrt[m]{a^n} \leq 1$. Ekkor az előbbiekhez hasonló meggondolással

$$\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^m = a^n \leq 1,$$

ami ellentmondás. Tehát $a^p = \sqrt[m]{a^n} > 1$.

Ugyanígy látható be az $0 < a < 1$ eset is.

Ha $0 < a < b$, akkor

$$a^r < b^r \Longleftrightarrow 1 < \left(\frac{b}{a}\right)^r,$$

ahol $\frac{b}{a} > 1$ és $r > 0$. Tehát az állítás a bizonyítás első része alapján adódik. Hasonlóan gondolható meg az $r < 0$ eset is. □

Az Arkhimédészi axióma következménye lesz az alábbi állítás.

3.63. Állítás. *Ha $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor található olyan $(r_n) \subset \mathbb{Q}$ racionális számokból álló szigorúan monoton növő sorozat, melyre $r_n \to x$.*

Bizonyítás. Az 1.41. Következmény azt mondja, hogy minden (nemelefajuló) nyílt intervallumban, így az $(x-1, x)$ intervallumban is van racionális szám. Ezért

$$\exists r_1 \in (x-1, x) \cap \mathbb{Q}.$$

Világos, hogy $(r_1, x) \cap (x - \frac{1}{2}, x)$ egy nyílt intervallum. Ezért igaz, hogy

$$\exists r_2 \in (r_1, x) \cap (x - \frac{1}{2}, x) \cap \mathbb{Q}.$$

Hasonlóan,

$$\exists r_3 \in (r_2, x) \cap (x - \frac{1}{3}, x) \cap \mathbb{Q}.$$

Folytatva az eljárást, kapjuk racionális számoknak olyan $r_1, r_2, r_3, \ldots$ szigorúan monoton növő sorozatát, melyre

$$x - \frac{1}{n} < r_n < x \Longrightarrow r_n \to x.$$

□

3.64. Definíció. Legyenek $a \in \mathbb{R}^+$ és $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges számok. Ekkor a fentiek alapján létezik $(r_n) \subset \mathbb{Q}$ racionális számokból álló szigorúan monoton növő sorozat, melyre $r_n \to x$. Az (a^{r_n}) sorozat a 3.62. Állítás szerint monoton. Továbbá, korlátos is, hiszen bármely $q > x$, $q \in \mathbb{Q}$ esetén a^q egy felső, ill. alsó korlátja, attól függően, hogy $a > 1$ vagy $0 < a < 1$. Tehát (a^{r_n}) konvergens. Definiálja

$$a^x := \lim a^{r_n}.$$

Be kell látnunk még, hogy a fenti definíció nem függ az (r_n) sorozat megválasztásától. Ehhez az alábbi állítást gondoljuk meg, mely az

$$\sqrt[n]{a} \to 1 \quad (a > 0)$$

nevezetes sorozathatárérték általánosítását mondja ki.

3.65. Állítás. *Legyen $(r_n) \subset \mathbb{Q}$, $r_n \to 0$ racionális számokból álló nullsorozat és $a > 0$ tetszőleges. Ekkor*

$$a^{r_n} \to 1.$$

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzítve. Tudjuk, hogy $a^{\frac{1}{n}} \to 1$ és ezért a reciproksorozatra $a^{-\frac{1}{n}} \to 1$. Így ε-hoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}^+$, hogy $\forall n \geq N$ esetén

$$a^{\frac{1}{n}}, a^{-\frac{1}{n}} \in (1 - \varepsilon,\, 1 + \varepsilon).$$

Speciálisan,

$$a^{\frac{1}{N}}, a^{-\frac{1}{N}} \in (1 - \varepsilon,\, 1 + \varepsilon). \tag{3.13}$$

Mivel $r_n \to 0$, ezért $\frac{1}{N} > 0$-hoz létezik olyan $K \in \mathbb{N}^+$ küszöbindex, hogy $\forall k \geq K$ esetén

$$-\frac{1}{N} < r_k < \frac{1}{N}.$$

A (3.13) tartalmazásból és a 3.62. Állításból kapjuk, hogy $a > 1$ esetén

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{N}} < a^{r_k} < a^{\frac{1}{N}} < 1 + \varepsilon, \quad k \geq K.$$

Tehát $\varepsilon > 0$-hoz találtunk olyan $K \in \mathbb{N}^+$ küszöbindexet, hogy $\forall k \geq K$ esetén $a^{r_k} \in (1 - \varepsilon,\, 1 + \varepsilon)$, ezért $a^{r_n} \to 1$.

A $0 < a < 1$ eset könnyen meggondolható abból, hogy ilyenkor $\frac{1}{a} > 1$. □

3.66. Következmény. *Az a^x hatvány 3.64. Definíciója nem függ az x-hez tartó (szigorúan monoton növő) racionális számokból álló sorozat megválasztásától, tehát tetszőleges $(r_n), (q_n) \subset \mathbb{Q}$, $r_n \to x$ és $q_n \to x$ szigorúan monoton növő sorozatok esetén $\lim a^{r_n} = \lim a^{q_n}$.*

Bizonyítás. Ha $r_n \to x$ és $q_n \to x$ a fenti tulajdonságú, akkor $s_n := r_n - q_n$, $n \in \mathbb{N}^+$ definícióval $(s_n) \subset \mathbb{Q}$ és $s_n \to 0$. Az előző állítás alapján

$$\frac{a^{r_n}}{a^{q_n}} = a^{r_n - q_n} = a^{s_n} \to 1.$$

Mivel (a^{r_n}) és (a^{q_n}) is konvergens, és a hányadosuk 1-hez tart, ezért a határértékük megegyezik. □

A sorozathatárérték és műveletek kapcsolatából adódik, hogy a fent definiált valós kitevős hatványozás megőrzi a hatványozás ismert azonosságait.

3.67. Állítás. *Legyenek $a, b \in \mathbb{R}^+$. Ekkor a hatványozás azonosságai érvényben maradnak valós kitevős hatványokra is, tehát bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén*

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
2. $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$;
3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$;
4. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

Továbbá, érvényben maradnak a 3.62. Állításban kimondott rendezési tulajdonságok is $r, s \in \mathbb{R}$ esetén.

Bizonyítás. Az 1. állítást bizonyítjuk, a többi hasonlóan megy. Legyenek $(r_n), (q_n) \subset \mathbb{Q}$, $r_n \to x$ és $q_n \to y$ tetszőleges szigorúan monoton növő sorozatok. Nyilván $r_n + q_n \to x + y$ és $(r_n + q_n)$ szigorúan monoton növő. A definíció alapján, és kihasználva a sorozathatárérték és műveletek kapcsolatáról tanultakat:

$$a^x \cdot a^y = (\lim a^{r_n}) \cdot (\lim a^{q_n}) = \lim (a^{r_n} \cdot a^{q_n}) = \lim a^{r_n + q_n} = a^{x+y},$$

ahol alkalmaztuk a racionális kitevős hatványozás azonosságát. □

Ezen állítás egyik következménye, hogy a továbbiakban, ha a^x-et akarjuk közelíteni, vehetünk tetszőleges $(x_n) \subset \mathbb{R}$, $x_n \to x$ sorozatot is.

3.68. Következmény. *Ha $a > 0$ és $x_n \to x$ tetszőleges valós sorozat, akkor*

$$a^{x_n} \to a^x.$$

Bizonyítás. A hatványozás azonosságai miatt

$$a^{x_n} \to a^x \iff \frac{a^{x_n}}{a^x} = a^{x_n - x} \to 1.$$

Tudjuk, hogy $x_n - x \to 0$ és a 3.65. Állítás bizonyításával analóg módon látható, hogy $a^{x_n - x} \to 1$ teljesül (a bizonyításban sehol sem használtuk ki, hogy a kitevők racionálisak!). □

Végül belátjuk, hogy a 3.29. Következmény is általánosítható valós kitevőre.

3.69. Állítás. *Legyen* (a_n) *valós számsorozat,* $a_n, A > 0$ *és* $a_n \to A$*. Ekkor bármely* $x \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$a_n^x \to A^x.$$

Bizonyítás. Legyen először $x > 0$. Elég megmutatni, hogy

$$\frac{a_n^x}{A^x} = \left(\frac{a_n}{A}\right)^x \to 1,$$

ahol

$$b_n := \frac{a_n}{A} \to 1.$$

Belátjuk, hogy $b_n^x \to 1$. Legyen $0 < \varepsilon < 1$. Ekkor felhasználva, hogy $\frac{1}{x} > 0$, és alkalmazva a 3.67. Állítás utolsó kijelentését kapjuk, hogy

$$(1-\varepsilon)^{\frac{1}{x}} < 1 < (1+\varepsilon)^{\frac{1}{x}}.$$

Mivel $b_n \to 1$, ezért létezik $N \in \mathbb{N}^+$, hogy $n \geq N$ esetén

$$(1-\varepsilon)^{\frac{1}{x}} < b_n < (1+\varepsilon)^{\frac{1}{x}},$$

amiből, szintén a rendezési tulajdonságokat felhasználva az $x > 0$ valós kitevőre,

$$1 - \varepsilon < b_n^x < 1 + \varepsilon.$$

Tehát bármely $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan N küszöbindex, hogy $n \geq N$ esetén

$$b_n^x \in (1-\varepsilon,\, 1+\varepsilon),$$

ezért $b_n^x \to 1$.

Az $x < 0$ eset következik abból, hogy egy 1-hez tartó sorozat reciproka is 1-hez tart. $\square$

3.11. A valós kitevőjű hatványok egy másik lehetséges értelmezése

A következőkben az a^x $(a > 0, x \in \mathbb{R})$ alakú hatványok értelmezésének egy másik lehetséges módját vázoljuk. Természetesen csak az értelmezés menete különbözik a fentiektől, a végeredményben nyert konstrukció ekvivalens a korábbival, amely az alábbiakban ki is fog derülni .

Az ötlet a következő: először az e^x hatványt értelmezzük tetszőleges valós x kitevőre. Ezt követően megmutatjuk, hogy az $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp x := \mathrm{e}^x$ (természetes alapú) exponenciális függvény szigorúan monoton növő és az értékkészlete $\mathbb{R}^+$, így értelmezhetjük az inverzfüggvényét, amelyet természetes alapú logaritmusfüggvénynek nevezünk: $\ln\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Ekkor $a^x := \exp(x \ln a) = \mathrm{e}^{x \ln a}$, amely összhangban van a hatványozástól elvárt azonosságokkal.

A fentiek kivitelezése több lépésben történik. Első lépésként értelmezzük az exp függvényt! A 3.5. Példa első részének szinte szó szerinti megismétlésével belátható, hogy tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén az

$$\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)$$

sorozat elég nagy n-től kezdve (nevezetesen $n > -x$ esetén) szigorúan monoton növekedő. Másrészt ugyancsak nem nehéz igazolni, hogy a sorozat felülről is korlátos, így konvergens. Legyen $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\exp x := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Vegyük észre, hogy $\exp 0 = 1$, továbbá $\exp 1 = \mathrm{e}$ a 3.14. Definíció alapján. Nyilván $\exp x > 0$ is teljesül minden valós x számra, hiszen a fenti sorozat pozitív és monoton növő, ezért a határértéke is pozitív.

Második lépésben az imént definiált exp függvény néhány tulajdonságát igazoljuk. A Bernoulli-egyenlőtlenség felhasználásával nem nehéz belátni, hogy tetszőleges $|x| < 1$ esetén minden elég nagy n-re

$$1+x \le \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \le 1+\frac{x}{1-x},$$

és így határátmenettel

$$1+x \le \exp x \le 1+\frac{x}{1-x} \quad (|x|<1). \tag{3.14}$$

A fenti egyenlőtlenségeknek, és a Rendőr-elvnek azonnali következménye, hogy tetszőleges $h_n \to 0$ sorozatra

$$\left(1+\frac{h_n}{n}\right)^n \to 1 \quad \text{és} \quad \exp h_n \to 1.$$

Ekkor azonban az

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n = \left(1+\frac{-\frac{x^2}{n}}{n}\right)^n$$

összefüggésben elvégezve a határátmenetet kapjuk, hogy

$$\exp x \cdot \exp(-x) = 1.$$

Teljesen hasonló módon igazolható, hogy tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\exp x \cdot \exp y = \exp(x + y).$$

Ennek alkalmazásával rögtön adódik, hogy $h_n \to 0$ esetén

$$\exp(x + h_n) = \exp x \cdot \exp h_n \to \exp x \tag{3.15}$$

(amely később az exp függvény folytonosságát fogja jelenteni). Másrészt pedig $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\exp n = \exp(\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ darab}}) = \underbrace{\exp 1 \cdot \exp 1 \cdot \cdots \cdot \exp 1}_{n \text{ darab}} = \mathrm{e}^n.$$

Sőt,

$$\left(\exp \frac{p}{q}\right)^q = \exp \underbrace{\left(\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \cdots + \frac{p}{q}\right)}_{q \text{ darab}} = \exp p = \mathrm{e}^p,$$

tehát

$$\exp \frac{p}{q} = \mathrm{e}^{\frac{p}{q}}.$$

Mindez azt jelenti, hogy az exp függvény a racionális számok halmazán megegyezik e racionális kitevőjű hatványaival, így az exp függvény megfelel az elvárásainknak, az e valós kitevőjű hatványait értelmezi.

Következzen most az exp függvény néhány tulajdonsága. Vegyük észre, hogy $x < y$ esetén a (3.14) egyenlőtlenség alapján

$$\exp y = \exp(x + y - x) = \exp x \cdot (\exp(y - x) \geq \exp x \cdot (1 + y - x) > \exp x,$$

tehát az exp függvény szigorúan monoton növő, ezért injektív. Megmutatható, hogy az értékkészlete $\mathbb{R}^+$. Ennek lényege, hogy adott $y \in \mathbb{R}^+$ esetén a

$$H := \{x \in \mathbb{R} : \exp x \leq y\}$$

halmaz nem üres és felülről korlátos, ezért $t := \sup H \in \mathbb{R}$. Igazolható, hogy $\exp t = y$. Ezzel tehát azt kaptuk, hogy $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ bijekció, így van inverze, amelyet természetes alapú logaritmusfüggvénynek nevezünk: $\ln\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Legyen ekkor $a > 0, x \in \mathbb{R}$ esetén

$$a^x := \exp(x \ln a) = \mathrm{e}^{x \ln a}.$$

A fentiek alapján könnyen látható, hogy a valós kitevőjű hatványok ily módon való értelmezése összehangban áll a hatványozástól elvárt tulajdonságokkal. Végül megemlítjük, hogy a (3.14) egyenlőtlenségből átrendezéssel az is következik, hogy $h_n \to 0$ esetén

$$\frac{\exp h_n - 1}{h_n} \to 0$$

(ami később az exponenciális függvény 0 pontbeli differenciálhatóságát fogja jelenteni).

4. fejezet

Függvények határértéke és folytonossága

Egy függvény határértéke az a pontban A, ha az a-hoz közeli helyeken a függvény A-hoz közeli értékeket vesz fel. Itt az a pontbeli függvényérték nem érdekes, lehet, hogy a függvény nincs is értelemzve a-ban. Egy függvény folytonos az a pontban, ha az a-hoz közeli helyeken a függvény $f(a)$-hoz közeli értékeket vesz fel. Vagyis az argumentum kis változása az értékek kis változását eredményezi.

4.1. Torlódási pontok

Az előző fejezet 3.7 Definíciójának megfelelően jelölje a továbbiakban

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

az ún. *kibővített számegyenest.*

Idézzük fel, hogy az 1.40 Definícióban bevezettük egy $a \in \mathbb{R}$ szám $r > 0$ sugarú *környezetét* mint a

$$K_r(a) = (a - r, a + r)$$

nyílt intervallumot. Bár a $+\infty$ és $-\infty$ nem valós számok, szükségünk lesz a „környezetük” fogalmára, melyeket nemkorlátos intervallumokként értelmezünk. Legyen $r > 0$ pozitív szám, ekkor

$$K_r(+\infty) := \left(\frac{1}{r}, +\infty\right),$$
$$K_r(-\infty) := \left(-\infty, -\frac{1}{r}\right).$$

Világos, hogy a fenti jelöléssel, ha $r > 0$ kicsi és $x \in K_r(+\infty)$, akkor x „közel van” a $+\infty$-hez. Továbbá az is könnyen látható, hogy egy (a_n) sorozat $A \in \overline{\mathbb{R}}$ (véges vagy végtelen) határértékének fogalma a fenti környezetek segítségével egyszerűen definiálható az alábbi módon.

4.1. Definíció. Az (a_n) sorozat határértéke $A \in \overline{\mathbb{R}}$, ha

$\forall \varepsilon > 0$ számhoz létezik $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, melyre $\forall n \geq N$ esetén $a_n \in K_\varepsilon(A)$.

Bevezetjük még egy a pont $r > 0$ sugarú ún. *kipontozott környezetét*, mely az a-n kívüli valós számokat tartalmazza az r sugarú környezetből, vagyis

$$\dot{K}_r(a) := (a - r, a) \cup (a + r), \quad \text{ha } a \in \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

$$\dot{K}_r(+\infty) := K_r(+\infty) = \left(\frac{1}{r}, +\infty\right), \tag{4.2}$$

$$\dot{K}_r(-\infty) := K_r(-\infty) = \left(-\infty, -\frac{1}{r}\right). \tag{4.3}$$

4.2. Definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}$ tetszőleges halmaz. Azt mondjuk, hogy egy $a \in \overline{\mathbb{R}}$ pont *torlódási pontja* H-nak, ha

$$\text{minden } r > 0 \text{ esetén } \dot{K}_r(a) \cap H \neq \emptyset,$$

vagyis ha az a pont tetszőleges környezete tartalmaz tőle különböző H-beli elemet.

Egy $H \subset \mathbb{R}$ halmaz torlódási pontjainak halmazát jelölje H'.

Könnyen látható, hogy ha $a \in H'$, akkor $a \in H$ és $a \notin H$ is előfordulhat (pl. $a = +\infty$ vagy $a = -\infty$ is lehet).

4.3. Példa. Ha $H = \mathbb{N}$, akkor $H' = \{+\infty\}$, továbbá ha $H = [a, b]$, akkor $H' = [a, b]$. Másrészt, ha H véges halmaz, akkor meggondolható, hogy $H' = \emptyset$.

4.4. Feladat. Legyen $H = \mathbb{Q}$. Mi lesz a H' halmaz?

4.5. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $K \subset \mathbb{R}$ felülről nem korlátos, akkor $\infty \in K'$ teljesül!

Az alábbi állítás a torlódási pont egy fontos ekvivalens definícióját fogalmazza meg.

4.6. Állítás. *Legyen $H \subset \mathbb{R}$ tetszőleges halmaz, $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

1. *$a \in H'$;*
2. *létezik olyan $(h_n) \subset H$ sorozat, melyre $h_n \neq a$ ($n \in \mathbb{N}$) és $h_n \to a$.*

Bizonyítás. 1. $\Rightarrow$ 2.: Tegyük fel, hogy $a \in H'$ teljesül. Legyen

$$h_n \in \dot{K}_{\frac{1}{n}}(a) \cap H$$

tetszőleges elem, ilyen a torlódási pont definíciója alapján létezik. Világos, hogy az így kapott (h_n) sorozat kielégíti a kívánalmakat.

2. $\Rightarrow$ 1.: Mivel $h_n \to a$, ezért $\forall r > 0$ esetén létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N$ esetén $h_n \in K_r(a)$. A feltételek miatt $n \geq N$ esetén $h_n \in \dot{K}_r(a) \cap H$ is teljesül, ezért $\forall r > 0$ esetén $\dot{K}_r(a) \cap H \neq \emptyset$, így a valóban torlódási pontja H-nak. $\square$

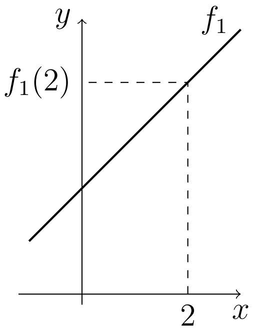
4.2. Függvény határértéke

Vizsgáljunk meg három, egymáshoz nagyon hasonló függvényt!
Legyen

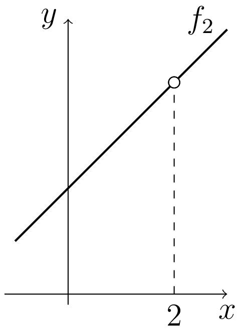
$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f_1(x) := x + 2, \qquad$ (4.1. ábra)

$$f_2 : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \quad f_2(x) := \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2, \qquad \text{(4.2. ábra)}$$

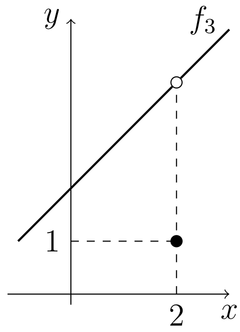
$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f_3(x) := \begin{cases} x + 2, & \text{ha } x \neq 2 \\ 1, & \text{ha } x = 2. \end{cases} \qquad \text{(4.3. ábra)}$$



4.1. ábra.



4.2. ábra.



4.3. ábra.

A függvények $a := 2$ pont körüli viselkedésére vagyunk kíváncsiak. Az f_1 függvény esetén jól látható, hogy ha x közel van a 2-höz, akkor az $f_1(x) = x + 2$ értékek közel esnek a 4-hez, amely éppen $f_1(2)$.

Az f_2 függvény ugyan nincs értelmezve a 2-ben, de ha x közel van a 2-höz, az $f_2(x) = x + 2$ értékek egy szám, ebben az esetben a 4 körül keveset ingadoznak.

Az f_3 függvény a 2-ben is értelmezve van. Ha x közel van a 2-höz (de $x \neq 2$), akkor az $f_3(x) = x + 2$ értékek (az f_1 és f_2 függvényhez hasonlóan) a 4 körül keveset ingadoznak (függetlenül attól, hogy $f(2) = 1$).

A példákban tapasztalt jelenségek nyomán alakítjuk ki a függvény határértékének fogalmát.

Az f függvény a pontbeli határértékének fogalmát olyan pontokra értelmezzük, melyek „elég közel" vannak az értelmezési tartományhoz, de annak nem feltétlenül elemei, vagyis melyek $\mathcal{D}(f)'$-ben vannak.

4.7. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}(f)'$ az értelmezési tartomány egy torlódási pontja.

Azt mondjuk, hogy az f függvény *határértéke a-ban* $A \in \overline{\mathbb{R}}$, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ esetén } \exists \delta > 0, \text{ hogy ha } x \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f), \text{ akkor } f(x) \in K_\varepsilon(A),$$

vagyis a-hoz „elég közeli” (értelmezési tartományból való) pontok esetén a függvényértékek közel vannak A-hoz.

Jelölésben:

$$\lim_a f = A \text{ vagy } \lim_{x\to a} f(x) = A.$$

Fontos megjegyeznünk, hogy amennyiben $a \in \mathcal{D}(f)' \cap \mathcal{D}(f)$, vagyis a az értelmezési tartománynak is eleme, a definíció nem függ a függvény a-ban felvett helyettesítési értékétől, $f(a)$-tól!

Továbbá, azért követeltük meg, hogy a az értelmezési tartomány torlódási pontja legyen, hogy így (bármely $\delta > 0$ esetén) $\dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f)$ tartalmazzon (legalább egy) x elemet.

4.8. Feladat. Fogalmazzuk meg a fenti definíció összesen 9 speciális esetét aszerint, hogy $a \in \mathbb{R}$, $a = +\infty$ vagy $a = -\infty$, illetve $A \in \mathbb{R}$, $A = +\infty$ vagy $A = -\infty$!

Nézzük meg példaként az $a \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$ esetet! A definíció az alábbi formát ölti:

$$\lim_a f = A \in \mathbb{R} \iff$$
$$\forall\varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\delta > 0, \text{ hogy ha } x \in (a-\delta, a+\delta) \cap \mathcal{D}(f),\ x \neq a, \text{ akkor } f(x) \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon).$$

Másképp,

$$\lim_a f = A \in \mathbb{R} \iff$$
$$\forall\varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\delta > 0, \text{ hogy ha } 0 < |x-a| < \delta,\ x \in \mathcal{D}(f), \text{ akkor } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Nézzük meg az $a \in \mathbb{R}$, $A = +\infty$ esetet is! A definíció az alábbi formát ölti:

$$\lim_a f = +\infty \iff$$
$$\forall\varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\delta > 0, \text{ hogy ha } x \in (a-\delta, a+\delta) \cap \mathcal{D}(f),\ x \neq a, \text{ akkor } f(x) > \frac{1}{\varepsilon}.$$

(Világos, hogy itt ε helyett $K > 0$-t és $f(x) > K$-t is írhattunk volna.)

A szakasz elején lévő példában

$$\lim_2 f_1 = \lim_2 f_2 = \lim_2 f_3 = 2.$$

Példa végtelen határértékre:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty.$$

A követező fontos tétel a függvényhatárérték fogalmát „viszi át” sorozathatárérték fogalmára, ezért a neve Átviteli elv.

4.9. Tétel (Átviteli elv függvényhatárértékre)**.** *Legyen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $a \in \mathcal{D}(f)'$ *és* $A \in \overline{\mathbb{R}}$*. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

1. $\lim\limits_{a} f = A$*;*

2. *minden* $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$*,* $x_n \neq a$ $(n \in \mathbb{N})$*,* $x_n \to a$ *sorozat esetén* $f(x_n) \to A$*.*

Bizonyítás. 1. $\Rightarrow$ 2.: Legyen $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$ tetszőleges sorozat (ilyen létezik $a \in \mathcal{D}(f)'$ és a 4.6 Állítás miatt!). Legyen adva $\varepsilon > 0$. Mivel 1. szerint $\lim\limits_{a} f = A$, ezért a definíció alapján

$$\varepsilon > 0\text{-hoz létezik } \delta > 0, \text{ hogy ha } x \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f), \text{ akkor } f(x) \in K_\varepsilon(A). \tag{4.4}$$

Másrészt, $x_n \to a$ miatt

$$\delta > 0\text{-hoz létezik } N \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall n \geq N \text{ esetén } x_n \in K_\delta(a).$$

Mivel a feltétel szerint $x_n \neq a$, $x_n \in \mathcal{D}(f)$ is teljesül, ezért $n \geq N$ esetén $x_n \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f)$, és így (4.4) miatt

$$f(x_n) \in K_\varepsilon(A), \quad n \geq N.$$

Tehát adott ε-hoz találtunk olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindexet, hogy $n \geq N$ esetén $f(x_n) \in K_\varepsilon(A)$, ezért $f(x_n) \to A$ teljesül.

2. $\Rightarrow$ 1.: Tegyük fel, hogy 2. teljesül. Indirekt tegyük fel, hogy f-nek A nem határértéke a-ban. Ekkor

$$\begin{aligned} &\exists \varepsilon > 0, \text{ hogy minden } \frac{1}{n} > 0 \text{ esetén található olyan } x_n \in \dot{K}_{\frac{1}{n}}(a) \cap \mathcal{D}(f), \\ &\qquad \text{melyre } f(x_n) \notin K_\varepsilon(A). \end{aligned}$$

Így kaptunk egy $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$ sorozatot (hiszen $x_n \in \dot{K}_{\frac{1}{n}}(a)$), melyre $f(x_n) \not\to A$ (hiszen $f(x_n) \notin K_\varepsilon(A)$ minden n-re), ami ellentmond 2-nek. □

4.10. Következmény. *Adott pontbeli függvényhatárérték egyértelmű. Tehát*

$$\lim_{a} f = A \text{ és } \lim_{a} f = B \Longrightarrow A = B.$$

Bizonyítás. Következik a 3.11 és a 3.47 Megjegyzésekből és a 4.9 Tételből. □

4.11. Példa. Egyszerű példa olyan függvényre, amelynek nem létezik határértéke egy pontban, az előjelfüggvény $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ a 2.2.5. alszakasz 2. példájából.

Ennek az $a = 0$ pontban nincs határértéke, hiszen ha $x_n = \frac{1}{n} \to 0$, akkor $f(x_n) = 1 \to 1$, viszont ha $x_n = -\frac{1}{n} \to 0$, akkor $f(x_n) = -1 \to -1$. Könnyen látható azonban, hogy ez a függvény sem „teljesen csúnya”, mert rendelkezik a következő tulajdonsággal. Ha $x_n > 0$, $x_n \to 0$, azaz az (x_n) sorozat jobbról tart az a ponthoz, akkor $f(x_n) = 1 \to 1$. Hasonlóan, ha $x_n < 0$, $x_n \to 0$, azaz az (x_n) sorozat balról tart az a ponthoz, akkor $f(x_n) = -1 \to -1$.

Az Átviteli elv egy következménye, hogy függvények *véges* határértékére megfogalmazhatunk a sorozat konvergenciájával analóg módon *Cauchy-kritérium*ot (ld. a 3.43 Tételt).

4.12. Tétel (Cauchy-kritérium függvényhatárértékre)**.** *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}(f)'$. A következők ekvivalensek.*

1. *Létezik és véges a $\lim\limits_a f$ határérték.*
2. *Bármely $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $\delta > 0$, hogy minden $x, y \in \dot{K}_\delta(a) \cap D(f)$, esetén $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Bizonyítás. 1. $\Rightarrow$ 2.: Tegyük fel, hogy létezik $\lim\limits_a f = A \in \mathbb{R}$. Ez azt jelenti a határérték definíciója szerint, hogy

$$\forall\varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\delta > 0, \text{ hogy } \forall x \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f) \text{ esetén } |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Így ha $x, y \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f)$, akkor

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - A| + |A - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. $\Rightarrow$ 1.: A 4.9 Átviteli elvet használjuk. Először belátjuk, hogy ha $(x_n) \subset D(f)$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$, akkor $(f(x_n))$ Cauchy-sorozat. A sorozathatárérték definíciója alapján

$$\forall\delta > 0\text{-hoz } \exists N \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall n \geq N \text{ esetén } x_n \in \dot{K}_\delta(a) \cap D(f).$$

Legyen $\varepsilon > 0$ adva. A 2. feltételből kapjuk, hogy ehhez létezik megfelelő $\delta > 0$ szám. Válasszunk δ-hoz az előbbiek szerinti N küszöbindexet! Ekkor 2. alapján

$$n, m \geq N \text{ esetén } x_n, x_m \in \dot{K}_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f) \;\Rightarrow\; |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

Tehát minden ilyen tulajdonságú (x_n) sorozatra $(f(x_n))$ sorozat Cauchy-sorozat, így létezik $\lim f(x_n)$ véges határérték.

Azt kell meggondolnunk, hogy különböző (x_n) sorozatokra nem kaphatunk különböző határértékeket (tehát minden esetben ugyanaz az A szám lesz a határérték). Legyen $(x_n) \subset D(f)$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$ sorozat – ehhez található $A \in \mathbb{R}$, hogy $f(x_n) \to A$.

Hasonlóan, legyen $(z_n) \subset D(f)$, $z_n \neq a$, $z_n \to a$. Az előzőek alapján ehhez is található $B \in \mathbb{R}$, hogy $f(z_n) \to B$.

Ekkor „összefésülve" az (x_n) és a (z_n) sorozatot kapjuk, hogy az alábbi sorozat

$$x_1,\ z_1,\ x_2,\ z_2,\ \ldots,\ x_n,\ z_n,\ \ldots$$

a-hoz tart. Az előzőek alapján következik, hogy

$$f(x_1),\ f(z_1),\ f(x_2),\ f(z_2),\ \ldots,\ f(x_n),\ f(z_n),\ \ldots$$

sorozat Cauchy-sorozat, azaz konvergens. Mivel a páratlan indexű részsorozata A-hoz, a páros indexű B-hez tart, ezért a 3.33 Állítás miatt $A = B$. □

A függvényhatárérték és műveletek kapcsolata könnyen meggondolható az Átviteli elv és a sorozathatárérték és műveletek kapcsolatáról tanultak alapján (ld. a 3.52 Állítást).

4.13. Állítás (Függvényhatárérték és műveletek)**.** *Legyenek f és g valós függvények, legyen $a \in (\mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g))'$, és $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$. Tegyük fel, hogy*

$$\lim_a f = A \text{ és } \lim_a g = B.$$

Ekkor

$$\exists \lim_a |f| = |A|,$$

továbbá

$$\exists \lim_a (f+g) = A + B, \text{ ha } A + B \text{ értelmes;}$$

$$\exists \lim_a (f \cdot g) = A \cdot B, \text{ ha } A \cdot B \text{ értelmes.}$$

Ha $g \neq 0$ az a egy kipontozott környezetében, akkor

$$\exists \lim_a \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{A}{B}, \text{ ha } \frac{A}{B} \text{ értelmes.}$$

Az A és B közötti műveleteket a 3.52 Állítás alapján értelmezzük.

Bizonyítás. A bizonyítások adódnak a 4.9 Tételből és a 3.52 Állításból. Példaként nézzük meg az $f + g$ határértékének esetét! A 4.9 Tétel szerint elég megmutatni, hogy

$$\text{ha } (x_n) \subset \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g), x_n \neq a, x_n \to a \text{ akkor } (f+g)(x_n) \to A + B.$$

Mivel $\lim_a f = A$ és $\lim_a g = B$, ezért a 4.9 Tétel alapján igaz, hogy minden ilyen sorozatra

$$f(x_n) \to A \text{ és } g(x_n) \to B.$$

Alkalmazva a 3.52 Állítást kapjuk, hogy ha $A + B$ értelmes, akkor

$$\lim (f+g)(x_n) = \lim \left(f(x_n) + g(x_n)\right) = A + B.$$

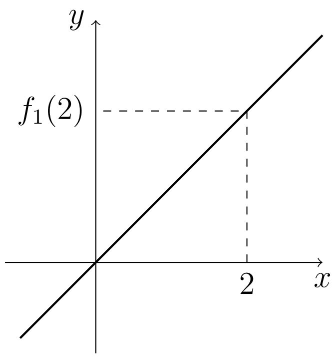
□

A későbbiekben látni fogjuk, hogy az $f \circ g$ kompozícióművelet nem viselkedik ilyen jól a függvényhatárértékre nézve.

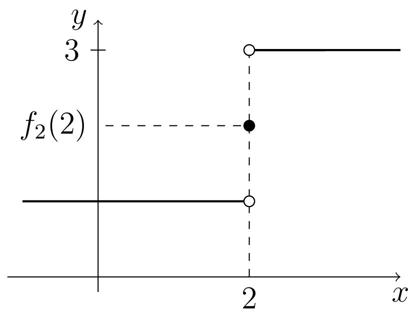
4.3. Függvény folytonossága

Legyen $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) := x,\ a := 2$ (4.4. ábra). Egy másik függvény pedig legyen a 4.5. ábrán látható $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_2(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x < 2 \\ 2, & \text{ha } x = 2 \\ 3, & \text{ha } x > 2. \end{cases}$$



4.4. ábra.



4.5. ábra.

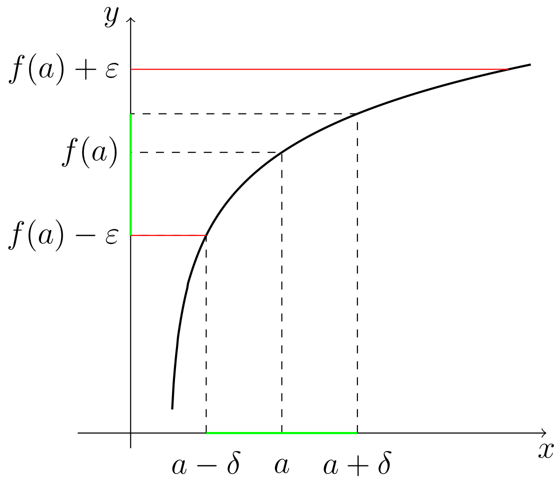
Látható, hogy az f_1 függvény olyan, hogy ha x közel van az $a := 2$ ponthoz, akkor az $f_1(x) = x$ függvényértékek is közel lesznek az $f_1(2) = 2$ értékhez. Ugyanezt nem mondhatjuk el az f_2 függvényről. Akármilyen x számot veszünk is, amely közel van az $a = 2$ ponthoz ($x \neq 2$), az $f_2(x)$ függvényértékek elég távol lesznek az $f_2(2) = 2$ számtól (biztosan $\frac{1}{2}$-nél távolabb). Az f_1 függvény viselkedése nyomán fogalmazzuk meg a folytonosság fogalmát.

4.14. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}(f)$ az értelmezési tartomány egy pontja. Azt mondjuk, hogy az f függvény *folytonos a-ban*, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ esetén } \exists \delta > 0, \text{ hogy ha } x \in K_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f), \text{ akkor } f(x) \in K_\varepsilon(f(a)),$$

vagyis a-hoz elég „közeli" (értelmezési tartományból való) pontok esetén a függvényértékek közel vannak $f(a)$-hoz. Ha $H \subset \mathcal{D}(f)$ olyan részhalmaz, hogy f minden $a \in H$ pontban folytonos, akkor azt mondjuk, hogy f *folytonos H-n*. Ha $H = \mathcal{D}(f)$, akkor azt mondjuk, hogy f *folytonos (függvény)*.

Figyeljük meg, miben különbözik ez a definíció a függvényhatárérték 4.7 Definíciójától! Most megköveteltük, hogy $a \in \mathcal{D}(f)$ legyen – értelmezési tartományon kívüli pontban nem beszélhetünk a függvény folytonosságáról. Másrészt, a definícióban szereplő $x \in K_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f)$ pont $x = a$ is lehet. Erre azonban triviálisan teljesül, hogy $f(x) = f(a) \in K_\varepsilon(f(a))$, mivel itt A helyett $f(a)$ szerepel.



4.6. ábra. Az a pontbeli folytonosság

A folytonosság egy másik, ekvivalens megfogalmazása a következő, mely a halmaz függvény általi ősképét (ld. az 1.34 Definíciót), valamint a környezet fogalmát használja.

4.15. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}(f)$ az értelmezési tartomány egy pontja. Azt mondjuk, hogy az f függvény *folytonos a-ban*, ha az $f(a)$ pont minden $K(f(a))$ környezetére a $K(f(a))$ halmaznak az f függvény általi ősképe, $f^{-1}(K(f(a)))$ tartalmazza az a pont egy környezetét.

4.16. Állítás. *Ha $a \in \mathcal{D}(f)' \cap \mathcal{D}(f)$, akkor*

$$f \text{ folytonos } a\text{-ban} \iff \exists \lim_a f = f(a).$$

Bizonyítás. Rögtön adódik a 4.7 és a 4.14 Definíciókból. □

A folytonosság definíciója segítségével a véges helyen vett véges határérték fogalma is újradefiniálható az alábbi módon.

4.17. Definíció. Ha $a \in \mathcal{D}(f)' \cap \mathbb{R}$, akkor

$$\exists \lim_a f =: A \in \mathbb{R} \iff \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \neq a, \\ A, & x = a \end{cases} \text{ függvény folytonos } a\text{-ban.}$$

Ha például $\mathcal{D}(f)$ intervallum, akkor $a \in \mathcal{D}(f)' \cap \mathcal{D}(f)$ teljesül minden pontjára.

Egyszerűen meggondolható, hogy a *Dirichlet-függvény* egyetlen pontban sem folytonos.

4.18. *Megjegyzés.* Ha $a \in \mathcal{D}(f) \setminus \mathcal{D}(f)'$, vagyis létzik $r > 0$, hogy $K_r(a) \cap H = \{a\}$, akkor a ún. *izolált pontja* $\mathcal{D}(f)$-nek. Könnyen látható a definíció alapján, hogy ilyenkor f mindig folytonos a-ban.

4.19. Tétel (Átviteli elv függvény folytonosságára)**.** *Legyen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *és* $a \in \mathcal{D}(f)$. *Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

1. *f folytonos a-ban;*

2. *minden $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$, $x_n \to a$ sorozat esetén $f(x_n) \to f(a)$.*

Bizonyítás. Analóg módon történik, mint a 4.9 Tételé.

1. $\Rightarrow$ 2.: Legyen $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$, $x_n \to a$ tetszőleges sorozat. Legyen adva $\varepsilon > 0$. Mivel 1. szerint f folytonos a-ban, ezért a definíció alapján

$$\varepsilon > 0\text{-hoz létezik } \delta > 0, \text{ hogy minden } x \in K_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f) \text{ esetén } f(x) \in K_\varepsilon(f(a)). \quad (4.5)$$

Másrészt $x_n \to a$ miatt

$$\delta > 0\text{-hoz létezik } N \in \mathbb{N}, \text{ hogy minden } n > N \text{ indexre } x_n \in K_\delta(a).$$

Mivel a feltétel szerint $x_n \in \mathcal{D}(f)$ is teljesül, ezért $n > N$ esetén $x_n \in K_\delta(a) \cap \mathcal{D}(f)$, és így (4.5) miatt

$$f(x_n) \in K_\varepsilon(f(a)), \quad n > N.$$

Tehát adott ε-hoz találtunk olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindexet, hogy $n > N$-re $f(x_n) \in K_\varepsilon(f(a))$, ezért $f(x_n) \to f(a)$ teljesül.

2. $\Rightarrow$ 1.: Tegyük fel, hogy 2. teljesül. Indirekt tegyük fel, hogy f nem folytonos a-ban. Ekkor

$$\exists \varepsilon > 0, \text{ hogy minden } \frac{1}{n} > 0 \text{ esetén található olyan } x_n \in K_{\frac{1}{n}}(a) \cap \mathcal{D}(f), \text{ melyre } f(x_n) \notin K_\varepsilon(f(a)).$$

Így kaptunk egy $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$, $x_n \to a$ sorozatot (hiszen $x_n \in K_{\frac{1}{n}}(a)$), melyre $f(x_n) \not\to f(a)$ (hiszen $f(x_n) \notin K_\varepsilon(f(a))$ minden n-re), ami ellentmond 2-nek. □

4.20. *Megjegyzés.* Ha a fenti átviteli elvet akarjuk alkalmazni egy $a \in \mathcal{D}(f) \setminus \mathcal{D}(f)'$ pontban, akkor a 4.6 Állítás alapján nincs olyan $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$ sorozat, hogy $x_n \neq a$ $(n \in \mathbb{N})$ és $x_n \to a$. Ezért a (ii)-ben csak olyan (x_n) sorozatokat vizsgálunk, melynek tagjai egy indextől kezdve megegyeznek a-val. Ekkor egy indextől kezdve $f(x_n) = f(a)$, tehát $f(x_n) \to f(a)$ teljesül. Ezzel beláttuk a 4.18 Megjegyzést is.

A függvények közötti műveletek a folytonosságra is „jól viselkednek".

4.21. Állítás (Folytonosság és műveletek)**.** *Legyenek f és g valós függvények és $a \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$. Tegyük fel, hogy f és g folytonosak a-ban. Ekkor*

$$|f|, \quad f+g, \quad f \cdot g \ \text{ és } \ \frac{f}{g} \ \ (\text{ha } g(a) \neq 0)$$

is folytonosak a-ban.

Bizonyítás. A bizonyítások adódnak a 4.19 Tételből és a sorozatok közötti műveletekről tanultakból. Példaként nézzük meg az $f \cdot g$ folytonosságának esetét! A 4.19 Tétel szerint elég megmutatni, hogy

$$\text{ha } (x_n) \subset \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g), x_n \to a \text{ akkor } (f \cdot g)(x_n) \to (f \cdot g)(a).$$

Mivel f és g folytonosak a-ban, ezért a 4.19 Tétel alapján igaz, hogy minden ilyen sorozatra

$$f(x_n) \to f(a) \text{ és } g(x_n) \to g(a).$$

Alkalmazva a 3.23 Állítást kapjuk, hogy

$$\lim (f \cdot g)(x_n) = \lim \left(f(x_n) \cdot g(x_n)\right) = f(a) \cdot g(a) = (f \cdot g)(a).$$

□

4.22. Feladat. Mutassunk olyan f éss g függvényeket, amelyekre $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g) = \mathbb{R}$, nem folytonosak mindenütt, de

1. $f+g$ folytonos $\mathbb{R}$-en.
2. f^2 folytonos $\mathbb{R}$-en.
3. fg folytonos $\mathbb{R}$-en.
4. $f \circ g$ folytonos $\mathbb{R}$-en.

4.4. Határérték, folytonosság és kompozíció

Az előző szakasz utolsó tétele a folytonosság és függvények közötti műveletek kapcsolatáról a függvényhatárértékre vonatkozó megfelelő tétel analogonja. Van azonban a függvények között lehetséges műveletek között még egy, a *kompozíció* (ld. az 1.31 Definíciót), melyre folytonosság és határérték esetén lényegesen különböző tételeket kell megfogalmaznunk. Kezdjük a folytonosság és függvények közötti kompozíció kapcsolatával.

4.23. Tétel (Folytonosság és kompozíció)**.** *Legyenek f és g valós függvények, és tegyük fel, hogy g folytonos az $a \in \mathcal{D}(f \circ g)$ pontban, f pedig az $g(a)(\in \mathcal{D}(f))$ pontban. Ekkor $f \circ g$ folytonos az a pontban.*

Bizonyítás. Az állítást legegyszerűbben a 4.19 Átviteli elv segítségével bizonyíthatjuk. Legyen $x_n \to a$, $(x_n) \subset \mathcal{D}(f \circ g)$ tetszőleges sorozat. A g függvény a-beli folytonosságára vonatkozó átviteli elv alapján $g(x_n) \to g(a)$. Az f függvény $g(a)$ pontbeli folytonosságát kihasználva

$$(f \circ g)(x_n) = f(g(x_n)) \to f(g(a)) = (f \circ g)(a),$$

amiből az állítás következik. □

Próbáljuk meg megfogalmazni a függvényhatárértékre vonatkozó, fentinek megfelelő állítást!

4.24. Állítás. *Legyenek f és g valós függvények, $a \in \mathcal{D}(f \circ g)'$. Tegyük fel, hogy $\exists \lim\limits_a g = b$ és $\exists \lim\limits_b f = c$. Ekkor*

$$\exists \lim_a (f \circ g) = c.$$

Egy nagyon egyszerű példán megmutatható, hogy a fenti állítás nem igaz! Legyen

$$g(x) :\equiv 0,$$

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

Ekkor

$$(f \circ g)(x) \equiv 1.$$

Legyen $a = 1$. Ekkor $\exists \lim\limits_a g = \lim\limits_1 g = 0 = b$, $\exists \lim\limits_b f = \lim\limits_0 f = 0 = c$, de

$$\lim_a (f \circ g) = 1 \neq c = 0!$$

A probléma azzal van, hogy a g függvény „nagyon nem injektív” az a pont környezetében. Ha megpróbálnánk a fenti *Hamis Állítás*t az átviteli elv segítségével bizonyítani, kiderül, ez miért baj. Legyen $(x_n) \subset \mathcal{D}(f \circ g)$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$ tetszőleges sorozat. Ekkor a 4.9 Tétel alapján $g(x_n) \to b$. Ebből azonban nem következik (feltétlenül), hogy $(f \circ g)(x_n) = f(g(x_n)) \to c$, ugyanis nem biztos, hogy $g(x_n) \neq b$ (legalább egy indextől kezdve) teljesül! Épp ez a probléma az előbbi példában is. A következő tétel a helyes állítást fogalmazza meg.

4.25. Tétel (Határérték és kompozíció)**.** *Legyenek f és g valós függvények, $a \in \mathcal{D}(f \circ g)'$. Tegyük fel, hogy $\exists \lim_a g = b$. Ekkor az alábbi* 1. *és* 2. *feltételek bármelyikéből következik, hogy*

$$\exists \lim_a (f \circ g) = c.$$

1. *$b \in \mathcal{D}(f)$ és f folytonos b-ben, $f(b) = c$;*

2. *$b \in \mathcal{D}(f)'$ és $\exists \lim_b f =: c$, továbbá a-nak létezik olyan $K(a)$ környezete, hogy $g(x) \neq b$, ha $x \in \dot{K}(a)$ (pl. g injektív/szigorúan monoton az a egy környezetében vagy $b = \pm\infty$).*

Bizonyítás. A bizonyítás lényege, hogy mindkét esetben működik az átviteli elv. Legyen $(x_n) \subset \mathcal{D}(f \circ g)$, $x_n \neq a$, $x_n \to a$ tetszőleges sorozat. Ekkor a 4.9 Tétel alapján $g(x_n) \to b$. Továbbá:

1. Mivel f folytonos b-ben, ezért $(f \circ g)(x_n) = f(g(x_n)) \to f(b) = c$.

2. Mivel $x_n \in \dot{K}(a)$ egy indextől kezdve, ezért $g(x_n) \neq b$ teljesül elég nagy n-re. Így ismét alkalmazva a 4.9 Tételt, $\lim_b f = c$ miatt kapjuk, hogy $(f \circ g)(x_n) = f(g(x_n)) \to c$. □

4.5. Jobb és bal oldali határérték, folytonosság

4.26. Definíció. Egy $a \in \mathbb{R}$ szám $r > 0$ sugarú *bal oldali környezetén* a

$$K_r^-(a) := (a - r, a]$$

intervallumot értjük. Az r sugarú *jobb oldali környezetén* a

$$K_r^+(a) := [a, a + r)$$

nyílt intervallumot értjük. A $+\infty$-nek csak bal oldali, a $-\infty$-nek csak jobb oldali környezeteit értelmezzük, ezek megegyeznek az eredeti környezetekkel, vagyis

$$K_r^-(+\infty) = K_r(+\infty) := \left(\frac{1}{r}, +\infty\right),$$
$$K_r^+(-\infty) = K_r(-\infty) := \left(-\infty, -\frac{1}{r}\right).$$

4.27. Definíció. Egy a pont $r > 0$ sugarú *kipontozott bal/jobb oldali környezetein* azon halmazokat értjük, melyek az a-n kívüli számokat tartalmazzák az r sugarú bal/jobb oldali környezetből, vagyis

$$\begin{aligned}
\dot{K}_r^-(a) &:= (a-r,a), \quad \text{ha } a \in \mathbb{R},\\
\dot{K}_r^+(a) &:= (a,a+r), \quad \text{ha } a \in \mathbb{R},\\
\dot{K}_r^-(+\infty) &:= K_r(+\infty) = \left(\frac{1}{r}, +\infty\right),\\
\dot{K}_r^+(-\infty) &:= K_r(-\infty) = \left(-\infty, -\frac{1}{r}\right).
\end{aligned}$$

4.28. Definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}$ tetszőleges halmaz. Azt mondjuk, hogy egy $a \in \overline{\mathbb{R}}$ pont *bal (jobb) oldali torlódási pontja* H-nak, ha

$$\text{minden } r > 0 \text{ esetén } \dot{K}_r^-(a) \cap H \neq \emptyset \, (\dot{K}_r^+(a) \cap H \neq \emptyset),$$

vagyis ha az a pont tetszőleges bal (jobb) oldali környezete tartalmaz tőle különböző H-beli elemet.
Egy $H \subset \mathbb{R}$ halmaz bal ill. jobb oldali torlódási pontjainak halmazát jelölje H'_- ill. H'_+.

4.29. *Megjegyzés.* Könnyen meggondolható, hogy $H'_- \subset H'$ és $H'_+ \subset H'$, de a fordított irányú tartalmazások nem állnak fent feltétlenül! Például, $H = (a,b)$ esetén $a \in H'$, de $a \notin H'_-$.

Az alábbi állítás a bal/jobb oldali torlódási pont fontos ekvivalens definícióját fogalmazza meg.

4.30. Állítás. *Legyen $H \subset \mathbb{R}$ tetszőleges halmaz, $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

1. *$a \in H'_-$ ($a \in H'_+$);*

2. *létezik olyan $(h_n) \subset H$ sorozat, melyre $h_n < a$ ($h_n > a$), $n \in \mathbb{N}$ és $h_n \to a$.*

Bizonyítás. Ld. mint a 4.6 Állítás bizonyítása. □

Most definiáljuk egy f függvény a pontbeli bal/jobb oldali határértékének fogalmát.

4.31. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}(f)'_-$ ($a \in \mathcal{D}(f)'_+$) az értelmezési tartomány egy bal (jobb) oldali torlódási pontja.
Azt mondjuk, hogy az f függvény *bal (jobb) oldali határértéke a-ban az $A \in \overline{\mathbb{R}}$ pont*, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ esetén } \exists \delta > 0, \text{ hogy ha } x \in \dot{K}_\delta^-(a) \cap \mathcal{D}(f) \; (x \in \dot{K}_\delta^+(a) \cap \mathcal{D}(f)),$$
$$\text{akkor } f(x) \in K_\varepsilon(A).$$

Jelölésben:

$$\lim_{a-0} f = A \text{ vagy } \lim_{a-} f = A \text{ vagy } \lim_{x \to a-0} f(x) = A \text{ ill.}$$
$$\lim_{a+0} f = A \text{ vagy } \lim_{a+} f = A \text{ vagy } \lim_{x \to a+0} f(x) = A.$$

Világos, hogy $+\infty$-ben csak bal oldali, $-\infty$-ben pedig csak jobb oldali határértéket értelmezhetünk.

4.32. Állítás. *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}(f)'_- \cap \mathcal{D}(f)'_+$. Ekkor*

$$\exists \lim_a f \iff \exists \lim_{a-0} f,\ \exists \lim_{a+0} f \text{ és } \lim_{a-0} f = \lim_{a+0} f.$$

Bizonyítás. Azonnal adódik a definícióból. □

4.33. Példa.

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty \neq -\infty = \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$

A bal/jobb oldali határérték definíciójához hasonló módon értelmezhetjük egy függvény balról, ill. jobbról való folytonosságát.

4.34. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}(f)$ az értelmezési tartomány egy pontja. Azt mondjuk, hogy az f függvény f *balról (jobbról) folytonos a-ban*, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ esetén } \exists \delta > 0, \text{ hogy ha } x \in K_\delta^-(a) \cap \mathcal{D}(f)\ (x \in K_\delta^+(a) \cap \mathcal{D}(f)),$$
$$\text{akkor } f(x) \in K_\varepsilon(f(a)).$$

A 4.16 Állításhoz hasonlóan belátható a következő.

4.35. Állítás. *Ha $a \in \mathcal{D}(f)'_- \cap \mathcal{D}(f)$ $(a \in \mathcal{D}(f)'_+ \cap \mathcal{D}(f))$, akkor*

$$f \text{ balról (jobbról) folytonos } a\text{-ban} \iff \exists \lim_{a-0} f = f(a) \quad (\exists \lim_{a+0} f = f(a)).$$

4.36. Feladat. Fogalmazzuk meg a függvény bal/jobb oldali határértékére ill. folytonosságára vonatkozó átviteli elvet!

4.37. Tétel (Monoton függvények határértékéről)**.** *Minden monoton függvénynek az értelmezési tartománya minden bal (jobb) oldali torlódási pontjában létezik bal (jobb) oldali határértéke, mégpedig:*

1. *ha f monoton növő, akkor*

$$\lim_{a-0} f = \sup_{(-\infty,a)\cap\mathcal{D}(f)} f, \tag{4.6}$$

$$\lim_{a+0} f = \inf_{(a,+\infty)\cap\mathcal{D}(f)} f,$$

2. *ha f monoton fogyó, akkor*

$$\lim_{a-0} f = \inf_{(-\infty,a)\cap\mathcal{D}(f)} f,$$

$$\lim_{a+0} f = \sup_{(a,+\infty)\cap\mathcal{D}(f)} f.$$

Itt

$$\sup_H f := \sup \{f(x) : x \in H\},$$
$$\inf_H f := \inf \{f(x) : x \in H\}.$$

Bizonyítás. A (4.6) esetet bizonyítjuk, a többi hasonlóan meggondolható.

Legyen
$$A := \sup_{(-\infty,a)\cap\mathcal{D}(f)} f.$$

Be kell látni, hogy $\lim\limits_{a-0} f$ létezik és A-val egyenlő. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. A szuprémum definíciója miatt
$$\exists x' \in (-\infty, a) \cap \mathcal{D}(f) : f(x') \in K_\varepsilon(A)$$
(ha A véges, akkor $A - \varepsilon < f(x') < A$). Mivel f monoton növő, ezért

$$\text{ha } x' < x < a \text{ és } x \in \mathcal{D}(f), \text{ akkor } f(x') \le f(x) \le A \Rightarrow f(x) \in K_\varepsilon(A).$$

Nyilván $\exists\delta > 0$, melyre $(x', a) = \dot{K}_\delta^-(a)$ (ha $a \in \mathbb{R}$, akkor $\delta := |a - x'|$). Ezzel a δ választással

$$x \in \dot{K}_\delta^-(a) \cap \mathcal{D}(f)\,(\Leftrightarrow x' < x < a, x \in \mathcal{D}(f)) \text{ esetén } f(x) \in K_\varepsilon(A),$$

tehát $\lim\limits_{a-0} f = A$. □

A bal és jobb oldali határérték segítségével osztályozhatjuk egy függvény értelmezési tartományának azon pontjait, melyekben nem folytonos.

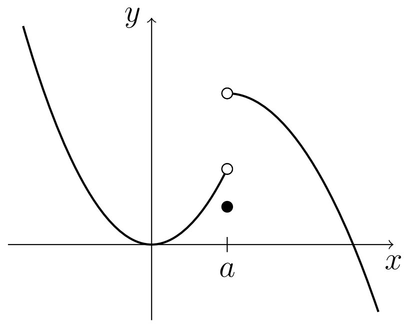
4.38. Definíció (Szakadási pontok osztályozása)**.** Ha $a \in \mathcal{D}(f)$ olyan pont, hogy f nem folytonos a-ban, akkor a *szakadási pontja* vagy *szakadási helye* f-nek.
Az $a \in \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(f)'_- \cap \mathcal{D}(f)'_+$ *elsőfajú szakadási pontja* f-nek, ha szakadási pontja és

$$\exists \lim_{a-0} f,\ \exists \lim_{a+0} f \in \mathbb{R}.$$

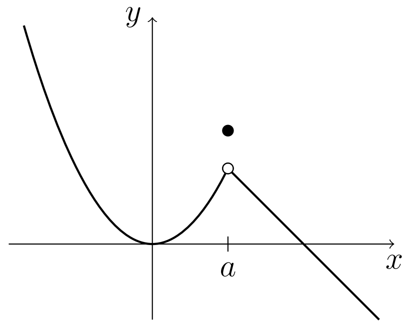
Ilyenkor
$$u := |\lim_{a+0} f - \lim_{a-0} f|$$
az f *ugrása* a-ban.

- Ha $u \neq 0$, akkor az a pont *ugráshelye* f-nek.
- Ha $u = 0$, akkor az a pont *megszüntethető szakadási pont.* Ilyenkor

$$\mathbb{R} \ni \lim_{a-0} f = \lim_{a+0} f (= \lim_a f \neq f(a)).$$



4.7. ábra. Ugráshely



4.8. ábra. Megszüntethető szakadási hely

Az $a \in \mathcal{D}(f)$ *másodfajú szakadási pont*, ha olyan szakadási pont, ami nem elsőfajú.

4.39. *Megjegyzés.* A 4.37 Tételből rögtön adódik, hogy intervallumon értelmezett monoton függvénynek bármely szakadási pontja csak elsőfajú lehet, mégpedig ugráshely, tehát nem megszüntethető. (Világos, hogy a monotonitás miatt a létező egyoldali határértékek végesek.) Azt sem nehéz belátni, hogy a szakadási helyeinek száma megszámlálható.

4.40. *Megjegyzés.* A Dirichlet-függvénynek minden valós szám másodfajú szakadási pontja.

4.6. Elemi függvények folytonossága és határértéke

Jelen szakasz tanulmányozásához érdemes visszalapozni a 2. fejezethez, és az ott szereplő ábrákhoz!

4.41. Állítás. *A 2.2.1. alszakaszban felsorolt* hatványfüggvények *folytonosak.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 4.19 Átviteli elvet! Legyen $x_n, x \in \mathcal{D}(\mathrm{id}^r)$ $(n \in \mathbb{N})$, $x_n \to x$ tetszőleges sorozat. Be kell látni, hogy

$$\mathrm{id}^r(x_n) = x_n^r \to \mathrm{id}^r(x) = x^r.$$

Ez következik a 3.69 Állításból. □

A hatványfüggvények folytonossága miatt határértékeiket elegendő az értelmezési tartományon kívüli torlódási pontokban meggondolni.

4.42. Állítás. *Ha n páros, akkor*

$$\lim_{-\infty} \mathrm{id}^n = \lim_{+\infty} \mathrm{id}^n = +\infty,$$
$$\lim_{-\infty} \mathrm{id}^{-n} = \lim_{+\infty} \mathrm{id}^{-n} = 0,$$
$$\lim_{0} \mathrm{id}^{-n} = +\infty.$$

Ha n páratlan, akkor

$$\lim_{-\infty} \mathrm{id}^n = -\infty, \lim_{+\infty} \mathrm{id}^n = +\infty,$$
$$\lim_{-\infty} \mathrm{id}^{-n} = \lim_{+\infty} \mathrm{id}^{-n} = 0,$$
$$\lim_{0-} \mathrm{id}^{-n} = -\infty, \lim_{0+} \mathrm{id}^{-n} = +\infty.$$

Továbbá, ha $r \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor az $\mathbb{R}^+$-on értelmezett id^r *függvényre*

$$\lim_{+\infty} \mathrm{id}^r = +\infty, \quad r > 0,$$
$$\lim_{0+} \mathrm{id}^r = +\infty, \quad \lim_{+\infty} \mathrm{id}^r = 0, \quad r < 0.$$

Bizonyítás. Adódik a 4.9 Átviteli elvből és a függvények szigorú monotonitásából a megfelelő intervallumokon, ld. a 3.67 Állításnak a hatványozás és rendezés kapcsolatáról szóló részét. □

4.43. Állítás. *Bármely $a > 0$, $a \neq 1$ esetén az* $\exp_a$ exponenciális függvény *(ld.* (2.1)*) folytonos.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 4.19 Átviteli elvet! Legyen $x \in \mathbb{R}$, $x_n \to x$ tetszőleges sorozat. Be kell látni, hogy

$$\exp_a(x_n) = a^{x_n} \to \exp_a(x) = a^x.$$

Ez adódik a 3.68 Következményből. □

4.44. Állítás. *Bármely $a > 0$, $a \neq 1$ esetén a* $\log_a = (\exp_a)^{-1}$ logaritmusfüggvény *folytonos.*

Bizonyítás. Következni fog a később belátott 4.58 Tételből (folytonos függvény inverze is folytonos). □

Az exponenciális és logaritmusfüggvények folytonossága miatt határértékeiket elegendő az értelmezési tartományon kívüli torlódási pontokban meggondolni.

4.45. Állítás. *Bármely $a > 1$ esetén*

$$\lim_{+\infty} \exp_a = \lim_{+\infty} \log_a = +\infty,$$
$$\lim_{-\infty} \exp_a = 0, \lim_{0+} \log_a = -\infty.$$

Bármely $0 < a < 1$ esetén

$$\lim_{-\infty} \exp_a = \lim_{0+} \log_a = +\infty,$$
$$\lim_{+\infty} \exp_a = 0, \lim_{+\infty} \log_a = -\infty.$$

Bizonyítás. Adódik a 4.9 Átviteli elvből és a függvények szigorú monotonitásából, ld. a 3.67 Állításnak a hatványozás és rendezés kapcsolatáról szóló részét. □

4.46. Állítás. *A 2.2.3. alszakaszban felsorolt trigonometrikus függvények és inverzeik folytonosak.*

Bizonyítás. A 4.9 ábra alapján belátható $|x| < \frac{\pi}{2}$-re ($|x| > \frac{\pi}{2}$-re pedig triviális), hogy

$$|\sin x| \leq |x|, \quad x \in \mathbb{R}.$$

A 4.19 Átviteli elvet alkalmazzuk. Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $x_n \to x$ tetszőleges sorozat. Ekkor felhasználva, hogy $|\cos| \leq 1$, kapjuk:

$$|\sin x_n - \sin x| = \left|2 \cdot \cos \frac{x_n + x}{2} \cdot \sin \frac{x_n - x}{2}\right| \leq 2 \left|\sin \frac{x_n - x}{2}\right|.$$

A fenti egyenlőtlenség alapján

$$|\sin x_n - \sin x| \leq 2 \left|\frac{x_n - x}{2}\right| = |x_n - x| \to 0, \tag{4.7}$$

és ezt akartuk belátni.

Mivel

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

ezért a 4.23 Tétel miatt cos is folytonos. A tg és ctg függvények így két folytonos függvény hányadosaként állnak elő, ezért folytonosak (ld. a 4.21 Állítást). A trigonometrikus függvények inverzeinek folytonossága pedig a 4.58 Tételből adódik. □

Könnyen meggondolható, hogy a sin és cos függvényeknek nincs határértékük $\pm\infty$-ben. Azonban érvényesek az alábbiak:

4.47. Állítás.

$$\begin{aligned}
\lim_{\frac{\pi}{2}+k\pi-0} \operatorname{tg} = +\infty, \lim_{\frac{\pi}{2}+k\pi+0} \operatorname{tg} = -\infty,\ k \in \mathbb{Z},\\
\lim_{k\pi-0} \operatorname{ctg} = -\infty, \lim_{k\pi+0} \operatorname{ctg} = +\infty,\ k \in \mathbb{Z},\\
\lim_{-\infty} \operatorname{arctg} = -\frac{\pi}{2}, \lim_{+\infty} \operatorname{arctg} = \frac{\pi}{2},\\
\lim_{-\infty} \operatorname{arcctg} = \pi, \lim_{+\infty} \operatorname{arcctg} = 0.
\end{aligned}$$

4.48. Állítás. *A 2.2.4. alszakaszban felsorolt hiperbolikus függvények és inverzeik folytonosak.*

Bizonyítás. A hiperbolikus függvények folytonossága adódik az exp függvény folytonosságából és a 4.21 Állításból, az inverzeik folytonossága pedig a 4.58 Tételből. □

4.49. Állítás.

$$\lim_{-\infty} \operatorname{sh} = -\infty, \lim_{+\infty} \operatorname{sh} = +\infty,$$
$$\lim_{-\infty} \operatorname{ch} = \lim_{+\infty} \operatorname{ch} = +\infty,$$
$$\lim_{-\infty} \operatorname{th} = \lim_{-\infty} \operatorname{cth} = -1,$$
$$\lim_{+\infty} \operatorname{th} = \lim_{+\infty} \operatorname{cth} = 1,$$
$$\lim_{0-} \operatorname{cth} = -\infty, \lim_{0+} \operatorname{cth} = +\infty.$$

Bizonyítás. A sh esetét bizonyítjuk, a többi hasonlóan megy. Felhasználjuk az exp függvény határértékeit.

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sh} x = \lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \frac{0-\infty}{2} = -\infty.$$

□

4.50. Állítás.

$$\lim_{-\infty} \operatorname{arsh} = -\infty, \lim_{+\infty} \operatorname{arsh} = +\infty,$$
$$\lim_{+\infty} \operatorname{arch} = +\infty,$$
$$\lim_{-1+0} \operatorname{arth} = \lim_{-1-0} \operatorname{arcth} = -\infty,$$
$$\lim_{1-0} \operatorname{arth} = \lim_{1+0} \operatorname{arcth} = \infty,$$
$$\lim_{-\infty} \operatorname{arcth} = \lim_{+\infty} \operatorname{arcth} = 0.$$

Bizonyítás. Adódik a megfelelő inverzfüggvények határértékeiből. □

4.7. Nevezetes függvényhatárértékek

Az alábbi nevezetes függvényhatárértékek bizonyítása mind adódik a 4.25 Tétel megfelelő szereposztással való alkalmazásából.

1.
$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$$

Bizonyítás. A 4.9 Tételt alkalmazzuk. Legyen $x_n \to \infty$ tetszőleges sorozat, és tegyük fel, hogy $x_n > 1$ (egy indextől kezdve ez biztos teljesül). Ekkor

$$([x_n])^{\frac{1}{[x_n]+1}} \leq (x_n)^{\frac{1}{x_n}} \leq ([x_n]+1)^{\frac{1}{[x_n]}}.$$

A bal ill. jobb oldalon az $(n^{\frac{1}{n+1}})$ ill. $((n+1)^{\frac{1}{n}})$ egy-egy részsorozata áll, melyek 1-hez tartanak. Így $(x_n)^{\frac{1}{x_n}} \to 1$, amiből az állítás következik. □

2.

$$\lim_{x \to 0+} x^x = 1.$$

Bizonyítás. Mivel tetszőleges $x_n \to 0+$ esetén $\frac{1}{x_n} \to +\infty$, ezért az 1. pont alapján

$$\left(\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \frac{1}{x_n^{x_n}} \to 1,$$

így $x_n^{x_n} \to 1$ is teljesül. A 4.9 Tétel alapján készen vagyunk. □

3.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_c x}{x^p} = 0 \quad (p, c > 0, c \neq 1).$$

Bizonyítás. Világos, hogy ha $p > 0$, akkor $\lim_{x \to \infty} x^p = +\infty$. Alkalmazva a 4.25 Tétel 2. pontját és az 1. nevezetes határértéket kapjuk, hogy

$$\lim_{x \to +\infty} (x^p)^{\frac{1}{x^p}} = 1.$$

Kihasználva a $\log_c$ függvény folytonosságát és a 4.25 Tétel 1. pontját,

$$\lim_{x \to +\infty} \log_c (x^p)^{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log_c x^p}{x^p} = \lim_{x \to +\infty} \frac{p \log_c x}{x^p} = \log_c 1 = 0.$$

Ebből p-vel való osztás után következik az állítás. □

4.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^q}{a^x} = 0 \quad (a \in (1, +\infty), q > 0).$$

Bizonyítás. A fenti 3.-at $p := \frac{1}{q}$ és $c := a$ számokra alkalmazva kapjuk, hogy

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^{\frac{1}{q}}} = 0.$$

Tudjuk, hogy $a > 1$ miatt $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$. A 4.25 Tétel 2. pontját felhasználva

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log_a a^x}{(a^x)^{\frac{1}{q}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(a^x)^{\frac{1}{q}}} = 0.$$

Mivel $\lim_{x\to 0} x^q = 0$, ezért a 4.25 Tétel 1. pontja alapján – tulajdonképpen a fenti határérték q-adik hatványát véve –,

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{(a^x)^{\frac{1}{q}}}\right)^q = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^q}{a^x} = 0.$$

□

5.

$$\lim_{x\to 0+} x^p \log_c x = 0 \quad (p, c > 0, c \neq 1).$$

Bizonyítás. Ha $x \to 0+$, akkor $x^p \to 0+$ is teljesül. Felhasználva 2.-t és a 4.25 Tétel 1. pontját, kapjuk:

$$\lim_{x\to 0+} (x^p)^{x^p} = 1.$$

Ismét alkalmazva a 4.25 Tétel 1. pontját és a $\log_c$ függvény folytonosságát,

$$\lim_{x\to 0+} \log_c (x^p)^{x^p} = \lim_{x\to 0+} x^p \cdot \log_c x^p = \lim_{x\to 0+} p \cdot x^p \cdot \log_c x = \log_c 1 = 0.$$

Innen p-vel osztva kapjuk a kívánt egyenlőséget. □

6.

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e},$$
$$\lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

Bizonyítás. A 3.9. szakasz 9. pontjának bizonyításában meggondoltak szerint következik. □

7.

$$\lim_{t\to 0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} = \mathrm{e}.$$

Bizonyítás. Legyen $t_n \to 0$ tetszőleges sorozat. Ekkor az $(\frac{1}{t_n})$ sorozat vagy $+\infty$-hez tart, vagy $-\infty$-hez, vagy két olyan részsorozatból áll össze, melyek egyike $+\infty$-hez, a másik $-\infty$-hez tart. A 6. pont alapján ezért

$$(1+t_n)^{\frac{1}{t_n}} = \left(1+\frac{1}{\frac{1}{t_n}}\right)^{\frac{1}{t_n}} \to \mathrm{e},$$

és ezt kellett megmutatni. □

8.
$$\lim_{t\to 0}\frac{\log_c(1+t)}{t} = \frac{1}{\ln c} \quad (c>0, c\neq 1).$$

Bizonyítás. Mivel $\log_c$ folytonos, ezért alkalmazva a 4.25 Tétel 1. pontját és a fenti 7. határértéket:

$$\lim_{t\to 0}\log_c(1+t)^{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to 0}\frac{\log_c(1+t)}{t} = \log_c \mathrm{e} = \frac{1}{\ln c}.$$

□

9.
$$\lim_{x\to a}\frac{\log_c x - \log_c a}{x-a} = \frac{1}{a\cdot \ln c} \quad (a, c>0, c\neq 1).$$

Bizonyítás. Világos, hogy

$$x\to a \iff \frac{x}{a}-1\to 0.$$

A 4.25 Tétel 2. pontja és a fenti 8. határérték alapján

$$\lim_{x\to a}\frac{\log_c(1+\frac{x}{a}-1)}{\frac{x}{a}-1} = \lim_{x\to a} a\cdot\frac{\log_c x-\log_c a}{x-a} = \frac{1}{\ln c}.$$

Ebből a-val osztva adódik az állítás. □

10.
$$\lim_{x\to 0}\frac{c^x-1}{x} = \ln c \quad (c>0, c\neq 1).$$

Bizonyítás. Világos, hogy

$$x\to 0 \iff c^x-1\to 0.$$

A 4.25 Tétel 2. pontja és a fenti 8. határérték alapján

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_c(1+c^x-1)}{c^x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{c^x-1} = \frac{1}{\ln c}.$$

Ebből reciprokot véve adódik az állítás. □

11.
$$\lim_{x\to a} \frac{c^x - c^a}{x-a} = c^a \cdot \ln c \quad (c>0, c\neq 1).$$

Bizonyítás. Világos, hogy

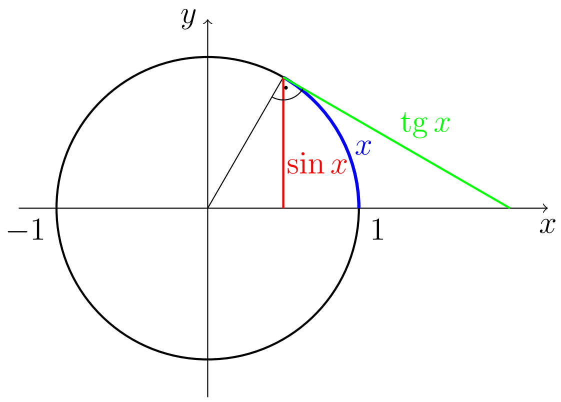
$$x \to a \iff x-a \to 0.$$

A 4.25 Tétel 2. pontja és a 10. határérték alapján

$$\lim_{x\to a} \frac{c^{x-a}-1}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{1}{c^a} \cdot \frac{c^x - c^a}{x-a} = \ln c.$$

Ebből c^a-nal szorozva adódik az állítás. □

12.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



4.9. ábra. A $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ egyenlőtlenség

Bizonyítás. A 4.9. ábra alapján meggondolható, hogy

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \text{ ha } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Ebből
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$
adódik, és felhasználva a cos függvény 0 pontbeli folytonosságát, kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

A

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$$

egyenlőség alapján

$$\lim_{x \to 0-} \frac{\sin x}{x} = 1$$

is igaz, így az állítást bizonyítottuk. $\square$

4.51. Feladat. Számítsuk ki az

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-c}{x+c} \right)^x \quad (c \in \mathbb{R})$$

határértéket!

Egyszerű átalakítással

$$\left(\frac{x-c}{x+c} \right)^x = \exp\left(x \cdot \ln \frac{x-c}{x+c} \right). \tag{4.8}$$

Mivel

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x-c}{x+c} = 1,$$

és a 8. nevezetes határérték alapján

$$\lim_{t \to 1} \frac{\ln t}{t-1} = 1,$$

alkalmazva az $g(x) = (x-c)/(x+c)$ belső függvénnyel való helyettesítést , a 4.25 Tétel 2. pontja alapján kapjuk, hogy

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln \frac{x-c}{x+c}}{\frac{x-c}{x+c} - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x+c}{-2c} \cdot \ln \frac{x-c}{x+c} = 1.$$

Ezt behelyettesítve a (4.8) egyenlőségbe, kapjuk

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x-c}{x+c} \right)^x &= \lim_{x \to +\infty} \exp\left(x \cdot \ln \frac{x-c}{x+c} \right) = \lim_{x \to +\infty} \exp\left(\frac{-2cx}{x+c} \cdot \frac{x+c}{-2c} \ln \frac{x-c}{x+c} \right) \\ &= \mathrm{e}^{-2c \cdot 1} = \mathrm{e}^{-2c}. \end{aligned}$$

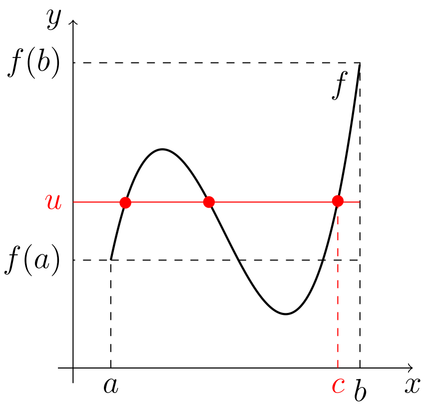
4.8. Folytonos függvények tulajdonságai

Ebben a szakaszban intervallumon értelmezett folytonos függvények tulajdonságaival foglalkozunk, ezért az alábbiakban az $f : I \to \mathbb{R}$ jelölés alatt mindig $\mathcal{D}(f) = I$-t értünk. Az első fontos eredményt egyszerűbben úgy fogalmazhatjuk meg, hogy egy intervallumon folytonos függvény grafikonjának lerajzolásakor „nem emeljük fel a ceruzát”.

4.52. Tétel (Bolzano-Darboux-tétel)**.** *Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor ha $u \in \mathbb{R}$ olyan, hogy*

$$f(a) < u < f(b) \quad (\textit{vagy } f(b) < u < f(a)),$$

akkor létezik $c \in (a, b)$, melyre $f(c) = u$.



4.10. ábra. Bolzano–Darboux-tétel

Bizonyítás. Legyen például $f(a) < u < f(b)$. Definiáljuk a következő halmazt:

$$H := \{x \in [a, b] : f(x) < u\}.$$

Ekkor $H \neq \emptyset$, ugyanis $a \in H$. Másrészt H felülről korlátos, mivel $H \subset [a, b]$, tehát b egy felső korlátja. Így a Felső határ axiómája miatt H-nak van legkisebb felső korlátja, $\sup H \in \mathbb{R}$. Legyen

$$c := \sup H.$$

$H \subset [a, b]$ miatt $c \in [a, b]$ teljesül. Belátjuk, hogy $f(c) = u$. Indirekt, ha $f(c) > u$ volna, akkor az f függvény c pontbeli folytonossága miatt létezne olyan $\delta > 0$ szám, hogy $f(x) > u$, ha $x \in (c - \delta, c) \subset [a, b]$. Ez ellentmond annak, hogy c a legkisebb felső korlátja H-nak, hiszen $c - \delta$ is felső korlát volna. Másrészt, ha $f(c) < u$ volna, akkor szintén az f függvény c pontbeli folytonosságát használva, létezne olyan $\delta > 0$ szám, hogy $f(x) < u$, ha $x \in (c, c + \delta) \subset [a, b]$. Ez pedig ellentmond annak, hogy c felső korlátja H-nak. $\square$

Ennek a tételnek egy fontos következménye, hogy intervallum folytonos függvénnyel vett képe is intervallum.

4.53. Következmény. *Ha f egy tetszőleges I intervallumon értelmezett folytonos függvény, akkor f* Darboux-tulajdonságú, *azaz bármely $J \subset I$ intervallum esetén*

$$f(J) := \{f(x) : x \in J\}$$

intervallum.

Bizonyítás. Legyen f egy I intervallumon értelmezett folytonos függvény, és legyen $J \subset I$ intervallum. Be kell látni, hogy $f(J)$ is intervallum, vagyis az intervallum 1.38 Definíciója szerint

$$\text{bármely } y_1 < u < y_2, \;\; y_1, y_2 \in f(J) \text{ esetén } u \in f(J).$$

Mivel $y_1 = f(a)$ és $y_2 = f(b)$ valamely $a, b \in J$ számokra, továbbá $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos (hiszen $[a, b] \subset J \subset I$), ezért alkalmazhatjuk a Bolzano-Darboux-tételt. Ennek alapján

$$\exists c \in (a, b) \subset J, \text{ melyre } f(c) = u,$$

vagyis $u \in f(J)$, és ezt akartuk belátni. □

4.54. Következmény (Bolzano-tétel)**.** *Ha f olyan, intervallumon értelmezett folytonos függvény, mely felvesz pozitív és negatív értéket is, akkor f-nek van gyöke (nullhelye) az intervallumban.*

Bizonyítás. A feltétel szerint léteznek olyan $a, b \in I$ számok, melyekre $f(a) < 0 < f(b)$. A Bolzano-Darboux-tétel alapján $\exists c \in (a, b)$ (vagy $c \in (b, a)$), melyre $f(c) = 0$. □

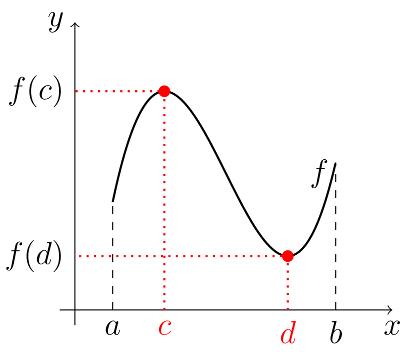
Ha egy halmaz infimuma/szupremuma eleme a halmaznak, akkor azt mondjuk, hogy ez a halmaz *minimuma/maximuma*. Hasonlóan definiálhatjuk egy függvény minimumát/maximumát mint az értékkészletének megfelelő elemét.

4.55. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Ha létezik olyan $x_0 \in \mathcal{D}(f)$, hogy

$$\forall x \in \mathcal{D}(f) \text{ esetén } f(x) \geq f(x_0) \text{ (ill. } f(x) \leq f(x_0)),$$

akkor $f(x_0)$ az f *minimuma* (ill. *maximuma*).

4.56. Tétel (Weierstrass-tétel)**.** *Legyen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f-nek van minimuma és maximuma.*



4.11. ábra. Weierstrass-tétel

Bizonyítás. A 4.53 Következmény alapján $\mathcal{R}(f) = f([a,b])$ intervallum. Jelölje $m := \inf \mathcal{R}(f)$ és $M := \sup \mathcal{R}(f)$. Azt kell belátni, hogy $m, M \in \mathcal{R}(f)$. Az infimum tulajdonságai alapján

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ esetén } \exists y_n \in \mathcal{R}(f) : m \leq y_n < m + \frac{1}{n}.$$

A kapott (y_n) sorozatra $y_n \to m$ teljesül. Mivel $y_n \in \mathcal{R}(f)$, $n \in \mathbb{N}$, ezért léteznek $x_n \in [a,b]$, $n \in \mathbb{N}$ számok, melyekre $f(x_n) = y_n$. Így

$$f(x_n) \to m.$$

A kapott $(x_n) \subset [a,b]$ sorozat korlátos, ezért a 3.36 Bolzano-Weierstrass-tétel szerint van konvergens részsorozata, (x_{n_i}). Legyen

$$d := \lim x_{\mathrm{n}_i} \in [a,b].$$

A 4.19 Átviteli elv alapján az f függvény d-beli folytonosságából adódik, hogy

$$f(x_{\mathrm{n}_i}) \to f(d) = m,$$

mivel $(f(x_{\mathrm{n}_i}))$ részsorozata az m-hez tartó $(f(x_n))$-nek. Ezzel beláttuk, hogy $f(d) = m \in \mathcal{R}(f)$.

Az M esete ezzel analóg módon gondolható meg. □

4.57. Következmény. *Korlátos és zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény értékkészlete korlátos és zárt intervallum.*

Bizonyítás. Azonnal adódik a 4.53 Következményből és a 4.56 Weierstrass-tételből. □

A következő tételben azt gondoljuk meg, hogy milyen tulajdonságú egy (intervallumon értelmezett) folytonos függvény inverze.

4.58. Tétel (Folytonos függvény inverze)**.** *Legyen f egy I intervallumon értelmezett folytonos és injektív függvény. Ekkor f szigorúan monoton. Továbbá, az f^{-1} inverz függvény*

- *is intervallumon van értelmezve;*
- *szigorúan monoton ugyanúgy, mint f;*
- *folytonos.*

Bizonyítás. Először meggondoljuk, hogy ha f folytonos és injektív, akkor szigorúan monoton. Tegyük fel indirekt, hogy

$$\exists x_1, x_2, x_3 \in I,\ x_1 < x_2 < x_3,\ \text{hogy } f(x_1) < f(x_3) < f(x_2),$$

(az összes többi „rossz” eset hasonlóan gondolható meg).

Mivel $[x_1, x_2] \subset I = \mathcal{D}(f)$ és $f(x_1) < u := f(x_3) < f(x_2)$, ezért a 4.52 Bolzano-Darboux-tétel alapján

$$\exists c \in (x_1, x_2) : f(c) = u = f(x_3).$$

Ez azonban ellentmond f injektivitásának, ugyanis $c < x_3$.

Most lássuk be az inverzfüggvényre vonatkozó állításokat!

- A 4.53 Következmény alapján $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f)$ intervallum.
- Legyenek $y_1 < y_2$, $y_1, y_2 \in \mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{R}(f)$ számok, és tegyük fel, hogy f szigorúan monoton növő. Ekkor a létező $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$, $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ számokra nyilván

  $$f^{-1}(y_1) = x_1 < x_2 = f^{-1}(y_2)$$

  teljesül. A szigorúan monoton fogyó eset hasonlóan meggondolható.
- Indirekt tegyük fel, hogy y az f^{-1} egy szakadási pontja. Mivel f^{-1} intervallumon értelmezett szigorúan monoton függvény, ezért a 4.39 Megjegyzés alapján y-ban csak elsőfajú, nem megszüntethető szakadása lehet. Ez azonban azt jelentené, hogy $\mathcal{R}(f^{-1}) = \mathcal{D}(f)$ nem volna intervallum, ami ellentmondás. Tehát f^{-1} folytonos.

$\square$

4.59. *Megjegyzés.* Az előző tételben valójában nincs szükség f folytonosságára. Könnyen meggondolható, hogy egy szigorúan monoton függvény inverze mindig folytonos, csak nem feltétlenül intervallumon van értelmezve.

Az alábbiakban a folytonosságnak egy fontos speciális esetét definiáljuk, amikor egy halmaz pontjaiban a folytonosság definíciója alapján $\varepsilon > 0$-hoz létező δ nem függ a pont helyétől.

4.60. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $H \subset \mathcal{D}(f)$. Azt mondjuk, hogy az f függvény *egyenletesen folytonos H-n*, ha

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \text{ hogy } x, y \in H,\ |x-y| < \delta \text{ esetén } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

4.61. Feladat. Igazoljuk, hogy az id függvény egyenletesen folytonos $\mathbb{R}$-en! Ez igaz, ugyanis minden $\varepsilon > 0$ esetén $\delta := \varepsilon$ jó választás.

Gondoljuk meg, hogy az id^2 függvény nem egyenletesen folytonos $\mathbb{R}$-en! Ha x nagy, akkor δ kicsi kell legyen, mert f meredeken nő. Később látni fogjuk, hogy viszont ez a függvény is egyenletesen folytonos bármely $[a, b]$ korlátos és zárt intervallumon.

4.62. Definíció. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt *Lipschitz-tulajdonságú*nak (vagy *Lipschitz-folytonos*nak) mondjuk, ha létezik olyan $L > 0$ konstans, hogy

$$|f(x) - f(y)| \le L \cdot |x - y|, \quad x, y \in \mathcal{D}(f).$$

4.63. *Megjegyzés.* Egy Lipschitz-tulajdonságú függvény egyenletesen folytonos $\mathcal{D}(f)$-en, ugyanis ha $\varepsilon > 0$ adott, akkor $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$ választással, $x, y \in \mathcal{D}(f)$, $|x - y| < \delta$ esetén

$$|f(x) - f(y)| \le L \cdot |x - y| < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon.$$

Lipschitz-tulajdonságú például az id és a sin (ld. a (4.7) becslést $x_n = y$-ra) $L = 1$ konstanssal.

4.64. Példa. Vigyázat! Az nem igaz, hogy minden egyenletesen folytonos függvény Lipschitz-tulajdonságú volna! Például, az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény egyenletesen folytonos a $[0, 1]$ intervallumon, de nem Lipschitz-tulajdonságú (a 0 közelében L tetszőlegesen nagy kellene legyen).

4.65. Állítás. *Ha f egyenletesen folytonos H-n, akkor folytonos is H-n.*

Bizonyítás. Legyen $a \in H$ tetszőleges és $\varepsilon > 0$ adva. Ekkor az egyenletes folytonosság definíciója alapján

$$\varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \delta > 0, \text{ hogy } x, y \in H,\ |x-y| < \delta \text{ esetén } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Ezzel a δ választással, a fentit $y = a$-ra alkalmazva kapjuk, hogy

$$|x - a| < \delta \text{ esetén } |f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

ami épp az a-beli folytonosságot jelenti. □

A 4.61 Feladatban láttuk, hogy az állítás megfordítása általában nem igaz, tehát van olyan H halmaz és H-n folytonos függvény, mely nem egyenletesen folytonos. A következő tétel azt mondja ki, hogy ha H korlátos és zárt intervallum, akkor ez az eset nem állhat fenn.

4.66. Tétel (Heine-tétel)**.** *Ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor f egyenletesen folytonos $[a,b]$-n.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy f nem egyenletesen folytonos $[a,b]$-n. Ez a definíció alapján a következőt jelenti:

$$\exists \varepsilon > 0, \text{ hogy } \forall \delta > 0 \text{ esetén } \exists x_\delta, y_\delta \in [a,b],\ |x_\delta - y_\delta| < \delta, \text{ melyre } |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon.$$

Válasszunk megfelelő $x_n, y_n \in [a,b]$ pontokat $\delta = \frac{1}{n} > 0$-hoz minden $n \in \mathbb{N}$-re! Így kaptunk olyan $(x_n), (y_n) \subset [a,b]$ sorozatokat, melyekre

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ és } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mivel $(x_n) \subset [a,b]$ korlátos sorozat, ezért a 3.36 Bolzano-Weierstrass-tétel szerint létezik konvergens részsorozata, (x_{n_i}). Legyen

$$x := \lim x_{\mathrm{n}_i} \in [a,b],$$

itt használtuk az $[a,b]$ intervallum zártságát. Az $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ miatt (y_{n_i}) is konvergens és

$$x = \lim y_{\mathrm{n}_i}.$$

A 4.19 Átviteli elv alapján az f függvény x pontbeli folytonosságából következik, hogy

$$f(x_{\mathrm{n}_i}) \to f(x) \text{ és } f(y_{\mathrm{n}_i}) \to f(x),$$

ami ellentmondás, hiszen

$$|f(x_{\mathrm{n}_i}) - f(y_{\mathrm{n}_i})| \geq \varepsilon, \quad i \in \mathbb{N}.$$

$\square$

5. fejezet

Sorok

A sorokra akkor van szükségünk, mikor végtelen sok számot akarunk összeadni. A sorok tulajdonképpen speciális alakú, véges összegekből álló sorozatok.

5.1. Végtelen sorok

Vegyünk egy 1 méteres rudat. A 3., sorozatokról szóló fejezetben meggondoltak szerint ha a rudat félbevágjuk, majd a félrudat is félbevágjuk, majd az egyik darabot ismét félbevágjuk és így tovább, akkor a rúdhosszaknak

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$$

sorozatához jutunk. Most gondoljunk arra, hogy valaki a rúd szeletelésénél kapott darabokat össze szeretné illeszteni, azaz az

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

„összeget” szeretné elkészíteni. Akkor az $\frac{1}{2}$-hez hozzáragasztja az $\frac{1}{2^2}$ hosszúságút, így a kapott rúd $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$ hosszú lesz; majd ehhez ragasztja az $\frac{1}{2^3}$ hosszúságút, így $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}$ hosszút kap, és így tovább. A kapott összegekből álló sorozatot fogjuk végtelen sornak nevezni.

A végtelen sorok klasszikus motivációja Akhilleusz és a teknősbéka „futóversenye”, Zénon paradoxona. Akhilleusz kezdetben száz láb előnyt ad a hüllőnek. Alighogy elindul a verseny, Akhilleusz pár ugrással ott terem, ahonnan a teknős indult. Ezalatt az idő alatt azonban a teknős is haladt egy keveset. Akhilleusz egy újabb lépéssel odaér, ám ezalatt a teknős ismét halad egy kicsit, és még mindig vezet. Akármilyen gyorsan is ér Akhilleusz oda, ahol a teknős egy pillanattal korábban volt, amaz mindig egy kicsit előrébb lesz. Zénón úgy érvelt, hogy Akhilleusz sohasem fogja megelőzni, de még csak utolérni sem a teknőst. Azonban, ha összeadjuk a végtelen sok apró időszeletet, amit az egyes lépések igénybe vesznek, véges időt kapunk eredményül, méghozzá pontosan annyit, amennyire Akhilleusznak szüksége van, hogy utolérje a teknőst. Ha ennél több időt adunk, természetesen meg is előzi.

5.1. Definíció. Legyen (a_n) egy adott sorozat. Készítsük el az

$$S_1 := a_1,\ S_2 := a_1 + a_2,\ S_3 := a_1 + a_2 + a_3,\ \dots, S_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n,\ \dots$$

összegek sorozatát. A kapott $(S_n) := (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ sorozatot *(végtelen) sor*nak nevezzük, és $\sum a_n$-nel jelöljük, azaz

$$\sum a_n := (S_n).$$

Itt $S_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n$ a sor *n-edik részletösszege* vagy *szelete.*

A végtelen sor tehát egy speciális alakú sorozat. Ennek megfelelően beszélhetünk arról, hogy egy sor konvergens vagy divergens.

5.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor *konvergens*, ha az (S_n) sorozat konvergens. $\sum a_n$ *divergens*, ha az (S_n) sorozat divergens.

Ha az (S_n) sorozatnak létezik (véges vagy végtelen) határértéke, akkor a $\sum a_n$ *végtelen sor összegén* a részletösszeg-sorozat határértékét értjük, azaz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim S_n.$$

5.3. Feladat. *Mértani sor* Legyen $q \in \mathbb{R},\ |q| < 1$. Tekintsük a

$$\sum q^n$$

ún. *mértani sort*! Az n-edik részletösszeg ($n \geq 0$):

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Mivel $q^n \to 0$, ezért

$$\lim S_n = \lim \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \frac{-1}{q - 1} = \frac{1}{1 - q},$$

tehát a $\sum q^n$ végtelen sor konvergens, és

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$$

a végtelen sor összege.

Ha $q \geq 1$, akkor a fenti részletösszegre $S_n \to \infty$ teljesül, tehát

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \infty.$$

Ha pedig $q \leq -1$, akkor a $\sum q^n$ sornak nem létezik összege.

5.4. Példa. A (3.10) nevezetes határérték tulajdonképpen az alábbi sorösszeget jelenti:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}. \tag{5.1}$$

A véges sok szám összeadására teljesülő azonosságok közül a végtelen sorok összegére teljesül az asszociativitás, valamint, hogy konstanst kiemelhetünk belőle. A végtelen sorok szorzatára (és a szorzat megfelelő definiálására) vonatkozó szabályok már bonyolultabbak, erről a fejezet végén ejtünk néhány szót.

5.5. Tétel (Sorok összege és műveletek)**.** *Tegyük fel, hogy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \in \overline{\mathbb{R}} \text{ és } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B \in \overline{\mathbb{R}},$$

$c \in \mathbb{R}$. *Ekkor*

1.

$$\exists \sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = c \cdot A;$$

2.

$$\exists \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A + B, \text{ ha az összeg értelmes.}$$

Bizonyítás. Jelölje $S_n := a_1 + \cdots + a_n$, $T_n := b_1 + \cdots + b_n$. A feltételek szerint $\lim S_n = A$, $\lim T_n = B$.

1. A $\sum (c \cdot a_n)$ sor n-edik szeletére

$$U_n = (c \cdot a_1) + \cdots (c \cdot a_n) = c \cdot (a_1 + \cdots + a_n) = c \cdot S_n.$$

Ebből következik, hogy

$$\exists \sum_{n=1}^{\infty} (c \cdot a_n) = \lim U_n = c \cdot \lim S_n = c \cdot A = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

2. A $\sum(a_n+b_n)$ sor n-edik szeletére

$$V_n = (a_1+b_1)+\cdots(a_n+b_n) = (a_1+\cdots+a_n)+(b_1+\cdots+b_n) = S_n+T_n.$$

Ebből következik, hogy

$$\exists \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \lim V_n = \lim S_n + \lim T_n = A+B = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

□

5.6. *Megjegyzés.* Egy konvergens sor konvergens marad (legfeljebb az összege változik), ha

- (a_n) első néhány tagját megváltoztatjuk (akár elhagyjuk, felcseréljük, stb.);
- zárójeleket iktatunk be a végtelen összegbe (így tulajdonképpen (S_n) egy részsorozatát kapjuk).

Zárójeleket elhagyni azonban nem szabad! Például, a

$$1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots$$

végtelen sor konvergens, összege 1, a zárójeleket elhagyva azonban egy divergens sort kapunk (az (S_n) sorozat tagjai felváltva 0-k és 1-ek).

A részletösszegek sorozata – így a sor – pontosan akkor konvergens, ha teljesül rá a Cauchy-kritérium.

5.7. Tétel (Cauchy-kritérium sorokra)**.** *A $\sum a_n$ sor pontosan akkor konvergens, ha*

$$\forall \varepsilon > 0\text{-}hoz\ \exists N \in \mathbb{N},\ hogy\ \forall n > m \geq N\ esetén\ |a_{m+1}+\cdots+a_n| < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 3.43 Tételt az (S_n) sorozatra, és használjuk fel, hogy

$$|S_n - S_m| = |a_{m+1}+\cdots+a_n|, \quad n > m.$$

□

A Cauchy-kritériumból következik, hogy ha egy sor konvergens, akkor a tagjaiból álló sorozat 0-hoz tart.

5.8. Állítás („Triviális kritérium" sorokra)**.** *Ha $\sum a_n$ konvergens, akkor $a_n \to 0$.*

Bizonyítás. Mivel $\sum a_n$ egy konvergens sor, ezért az (S_n) sorozat konvergens. A fenti Cauchy-kritérium szerint bármely $\varepsilon > 0$ hibakorláthoz van olyan N küszöbindex, hogy minden $m \geq N$ és $n := m + 1 > N$ esetén

$$|a_{m+1} + \cdots + a_n| = |a_n| < \varepsilon.$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $a_n \to 0$.

Másképp: ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, vagyis $S_n \to A$, akkor persze $S_{n-1} \to A$ is teljesül. Így

$$a_n = S_n - S_{n-1} \to A - A = 0.$$

□

Fontos megjegyeznünk, hogy a fenti állítás megfordítása nem igaz! Ehhez az alábbi példákat gondoljuk meg.

5.9. Feladat. Legyen $(a_n) := (\ln \frac{n+1}{n})$, vagyis tekintsük a

$$\sum \ln \frac{n+1}{n}$$

sort! Igazoljuk, hogy nem konvergens!

Mivel $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \to 1$, ezért

$$a_n = \ln \frac{n+1}{n} \to \ln 1 = 0.$$

Másrészt minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} S_n &= \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \ldots + \ln \frac{n+1}{n} \\ &= (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 4 - \ln 3) + \cdots + (\ln(n+1) - \ln n) \\ &= \ln(n+1). \end{aligned}$$

Mivel $\ln(n+1) \to \infty$, ezért (S_n) nem korlátos, így $\sum a_n$ nem konvergens.

5.10. *Megjegyzés.* Láttuk, hogy az előbbi sor tagjai átalakíthatók mint

$$\sum \ln \frac{n+1}{n} = \sum (\ln(n+1) - \ln n).$$

Az ilyen típusú sorokat *teleszkópikus összeg*nek szokták hívni.

5.11. Feladat. *Harmonikus sor* Tekintsük a

$$\sum \frac{1}{n} \tag{5.2}$$

ún. *harmonikus sort*! Tudjuk, hogy $\frac{1}{n} \to 0$. Mutassuk meg, hogy a $\sum \frac{1}{n}$ sor nem konvergens!

Az 5.7 Tételt alkalmazzuk. Legyen $\varepsilon := \frac{1}{2}$. Ekkor bármely $N \in \mathbb{N}$ esetén $m = N$ és $n = 2N$ választással

$$|a_{m+1} + \cdots + a_n| = \left|\frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{2N}\right| \geq N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2},$$

tehát a $\sum \frac{1}{n}$ sorra nem teljesül a Cauchy-kritérium, így nem konvergens.

A gyakorlatban előfordulnak az ún. abszolút konvergens sorok.

5.12. Definíció. A $\sum a_n$ sor *abszolút konvergens*, ha $\sum |a_n|$ konvergens.

5.13. Állítás. *Ha $\sum a_n$ abszolút konvergens, akkor $\sum a_n$ konvergens.*

Bizonyítás. Mivel $\sum |a_n|$ konvergens, ezért az 5.7 Tétel alapján $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists N$, hogy $\forall n > m \geq N$ esetén

$$||a_{m+1}| + \ldots + |a_n|| = |a_{m+1}| + \ldots + |a_n| < \varepsilon.$$

Ekkor a $\sum a_n$ sorra is teljesül a Cauchy-kritérium ugyanezen küszöbindexszel, hiszen

$$|a_{m+1} + \ldots + a_n| \leq |a_{m+1}| + \ldots + |a_n| < \varepsilon.$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $\sum a_n$ konvergens. □

5.2. Konvergenciakritériumok

A gyakorlatban sokszor nehéz eldönteni egy-egy sor konvergenciáját a definíció vagy a Cauchy-kritérium alapján. Másrészt, általában a sor összegének értékére nincs szükségünk, csak annak ismeretére, hogy konvergens-e. Az alábbiakban néhány olyan tétellel ismerkedünk meg, melyek hasznosak lehetnek sorok konvergenciájának/divergenciájának megállapításához. A tételeket pozitív (≥ 0) tagú sorokra mondjuk ki, majd általánosítjuk tetszőleges előjelű tagokból álló sorokra.

Először azt gondoljuk meg, hogy egy pozitív tagú sornak mindig létezik összege.

5.14. Állítás. *Ha $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, akkor*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \in \overline{\mathbb{R}}$$

mindig létezik, mégpedig $A \in \mathbb{R}$ (tehát a sor konvergens), ha a részletösszegeiből álló (S_n) sorozat felülről korlátos, és $A = +\infty$, ha (S_n) felülről nem korlátos.

Bizonyítás. Következik abból, hogy ilyenkor (S_n) monoton növő sorozat, tehát alkalmazható a 3.50 Állítás: (S_n) határértéke véges vagy $+\infty$, attól függően, hogy felülről korlátos vagy sem. □

5.15. Következmény. *Az 5.11 Feladatban a harmonikus sor összege*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Az 5.14 Állítás alapján az alábbi, pozitív tagú sorokra kimondott konvegenciakritériumok esetében mindig elegendő azt vizsgálni, hogy a részletösszegekből álló sorozat felülről korlátos vagy nem.

Az első az ún. összehasonlító vagy majoráns- ill. minoránskritérium.

5.16. Tétel (Összehasonlító kritérium)**.** *Legyen* $0 \le a_n \le b_n$, $n \in \mathbb{N}$.

1. *Ha* $\sum b_n$ *konvergens, akkor* $\sum a_n$ *konvergens.*
2. *Ha* $\sum a_n$ *divergens, akkor* $\sum b_n$ *divergens.*

Bizonyítás. Legyen $S_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ és $T_n := b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, $n \in \mathbb{N}$. Az előbbiek alapján (S_n) és (T_n) monoton növő sorozatok. Továbbá, a feltétel szerint

$$S_n \le T_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.3}$$

1. Ha $\sum b_n$ konvergens, akkor ez azt jelenti, hogy (T_n) konvergens, tehát felülről korlátos. Az (5.3) miatt ilyenkor (S_n) is felülről korlátos, tehát konvergens, azaz $\sum a_n$ konvergens.
2. Következik az 1. pontból.

□

5.17. *Megjegyzés.* Könnyen meggondolható, hogy a fenti tételben elég lett volna megkövetelni, hogy $a_n \le b_n$ egy N indextől kezdve teljesüljön.

5.18. Feladat. A

$$\sum \frac{1}{n^\alpha}$$

alakú sorokat *hiperharmonikus sor*nak nevezik. Igazoljuk, hogy

$$\begin{aligned} &\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ divergens, ha } \alpha \le 1; \\ &\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ konvergens, ha } \alpha > 1! \end{aligned} \tag{5.4}$$

A bizonyításhoz szükség lesz egy újabb konvergenciakritériumra, amit bizonyítás nélkül mondunk ki.

5.19. Tétel (Kondenzációs kritérium)**.** *Ha az* (a_n) *sorozat monoton fogyó és* $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, *akkor a*

$$\sum a_n \text{ és } \sum 2^n a_{2^n}$$

sorok egyszerre konvergensek vagy divergensek.

A hiperharmonikus sorra alkalmazva, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ pontosan akkor konvergens, ha a

$$\sum 2^n \frac{1}{2^{n\alpha}} = \sum 2^{n\cdot(1-\alpha)}$$

sor konvergens. Ez pedig az 5.3 Feladat alapján éppen az (5.4) kitétel.

A továbbiakban a hányados- és gyökkritériummal ismerkedünk meg.

5.20. Tétel (D'Alembert-féle hányadoskritérium)**.** *Legyen* (a_n) *adott sorozat,* $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

1. *Ha* $\exists q \in (0,1)$ *és* $\exists N \in \mathbb{N}$, *hogy*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q, \quad n \geq N,$$

akkor $\sum a_n$ *konvergens.*

2. *Ha* $\exists q > 1$ *és* $\exists N \in \mathbb{N}$, *hogy*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q, \quad n \geq N,$$

akkor $\sum a_n$ *divergens.*

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}$. Az 1. feltételből

$$\begin{aligned}
\frac{a_{N+1}}{a_N} &\leq q \Rightarrow a_{N+1} \leq a_N \cdot q \\
\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} &\leq q \Rightarrow a_{N+2} \leq a_{N+1} \cdot q \leq a_N \cdot q^2 \\
&\vdots \\
\frac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}} &\leq q \Rightarrow a_{N+k} \leq a_{N+k-1} \cdot q \leq \ldots \leq a_N \cdot q^k.
\end{aligned}$$

Ekkor a $\sum a_n$ sor $n = N + k$-adik részletösszegére

$$\begin{aligned}
S_n = S_{N+k} &= a_1 + \ldots + a_{N-1} + a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots + a_{N+k} \\
&\leq L + a_N + a_N \cdot q + a_N \cdot q^2 + \ldots + a_N \cdot q^k \\
&= L + a_N \cdot (1 + q + \ldots + q^k) < L + a_N \cdot \frac{1}{1-q},
\end{aligned}$$

ahol $L := a_1 + a_2 + \ldots + a_{N-1}$, és felhasználtuk az 5.3 Feladatból, hogy $0 < q < 1$ esetén $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$. Tehát (S_n) felülről korlátos, így konvergens, ami azt jelenti, hogy $\sum a_n$ konvergens.

A 2. feltétel esete hasonlóan meggondolható. □

5.21. *Megjegyzés.* A hányadoskritérium feltételei teljesülnek, ha

1. $$\exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \in [0,1),$$

   illetve

2. $$\exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1.$$

Ha $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, akkor „bármi” lehet.

5.22. Tétel (Cauchy-féle gyökkritérium)**.** *Legyen (a_n) adott sorozat, $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Ha $\exists q \in (0,1)$ és $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy*

   $$\sqrt[n]{a_n} \leq q, \quad n \geq N,$$

   akkor $\sum a_n$ konvergens.

2. *Ha $\exists q > 1$, hogy*

   $$\sqrt[n]{a_n} \geq q \text{ végtelen sok } n\text{-re},$$

   akkor $\sum a_n$ divergens.

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}$. Az 1. feltételből

$$\begin{aligned}
\sqrt[N]{a_N} \leq q &\Rightarrow a_N \leq q^N \\
\sqrt[N+1]{a_{N+1}} \leq q &\Rightarrow a_{N+1} \leq q^{N+1} \\
&\vdots \\
\sqrt[N+k]{a_{N+k}} \leq q &\Rightarrow a_{N+k} \leq q^{N+k}.
\end{aligned}$$

Ekkor a $\sum a_n$ sor $n = N + k$-adik részletösszegére

$$\begin{aligned}
S_n = S_{N+k} &= a_1 + \ldots + a_{N-1} + a_N + a_{N+1} + \ldots + a_{N+k} \\
&\leq L + q^N + q^{N+1} + \ldots + q^{N+k} \\
&= L + q^N \cdot (1 + q + \ldots + q^k) < L + q^N \cdot \frac{1}{1-q},
\end{aligned}$$

ahol $L := a_1 + a_2 + \ldots + a_{N-1}$, és felhasználtuk az 5.3 Feladatból, hogy $0 < q < 1$ esetén $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$. Tehát (S_n) felülről korlátos, így konvergens, ami azt jelenti, hogy $\sum a_n$ konvergens.

A 2. eset hasonlóan gondolható meg. □

5.23. *Megjegyzés.* A gyökkritérium feltételei teljesülnek, ha

1.
$$\exists \lim \sqrt[n]{a_n} = q \in [0, 1),$$
illetve

2.
$$\exists \lim \sqrt[n]{a_n} = q > 1.$$

Ha $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$, akkor „bármi" lehet.

Ha a fenti kritériumokat tetszőleges előjelű sorokra akarjuk alkalmazni, akkor a sor tagjainak abszolút értékére kell őket vonatkoztatni.

5.24. Állítás. *Tegyük fel, hogy (a_n) és (b_n) tetszőleges előjelű sorozatok. Ekkor az 5.16, 5.20 és 5.22 Tételek feltételeit a $\sum |a_n|$ ill. $\sum |b_n|$ sorra alkalmazva, mindegyik tételben az*

1. *feltétel teljesülése esetén $\sum a_n$ abszolút konvergens, így konvergens; a*

2. *feltétel teljesülése esetén $\sum a_n$ divergens – kivéve, az 5.16 Tételben csak a $\sum |a_n|$ divergenciáját állíthatjuk.*

Bizonyítás. A bizonyítás az 1. esetben megegyezik a korábbi tételek bizonyításával. A 2. feltétel esetében az 5.20 és az 5.22 Tételek alkalmazásakor meggondolható, hogy $(|a_n|)$, így (a_n) sem tarthat 0-hoz. □

5.25. Feladat. Adjunk példát olyan konvergens ill. divergens sorra, melyről sem a hányados- sem a gyökkritérium alapján nem dönthető el, hogy konvergens-e! (Tehát ezek a kritériumok nem szükséges feltételt adnak.)

5.26. Feladat. Lássuk be, hogy ha a $\sum a_n$ sorra az 5.20 Tétel (hányadoskritérium) valamelyik feltétele teljesül, akkor az 5.22 Tétel (gyökkritérium) megfelelő feltétele is teljesül rá!

Adjunk példát olyan sorra, melynek a gyökkritérium alapján eldönthető a konvergenciája, a hányadoskritérium alapján azonban nem! Tehát az előbbi állítás megfordítása nem igaz, így a gyökkritérium ténylegesen erősebb a hányadoskritériumnál.

5.27. Példa. A $\sum \frac{1}{n}$ divergens és a $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens sor esetén is

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \sqrt[n]{a_n} = 1$$

teljesül. Tehát az 5.21 és az 5.23 Megjegyzésben a feltételek élesek.

Az alternáló sorokra vonatkozik a következő tétel.

5.28. Tétel (Leibniz-tétel)**.** *Legyen (a_n) monoton fogyó, $a_n \to 0$. Ekkor a*

$$\sum (-1)^{n+1} a_n$$

végtelen sor konvergens.

Bizonyítás. Legyen $k \in \mathbb{N}$. Ekkor

$$\begin{array}{ll} S_1 = a_1 & S_2 = a_1 - a_2 \\ S_3 = a_1 - a_2 + a_3 & S_4 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \\ \vdots & \vdots \\ S_{2k-1} = a_1 - a_2 + \ldots + a_{2k-1} & S_{2k} = a_1 - a_2 + \ldots + a_{2k-1} - a_{2k} \end{array}$$

Mivel $a_n > 0$ minden n-re, ezért

$$\begin{aligned} S_1 &> S_2 \\ S_3 &> S_4 \\ &\vdots \\ S_{2k-1} &> S_{2k}. \end{aligned}$$

Felhasználva, hogy $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \ldots \geq a_{2k-1} \geq a_{2k} > \ldots$, kapjuk az alábbit

$$S_1 \geq S_3 \geq \ldots \geq S_{2k-1} > \ldots \text{ és } S_2 \leq S_4 \leq \ldots \leq S_{2k} \leq \ldots$$

Ebből következik, hogy (S_{2k-1}) és (S_{2k}) is monoton, korlátos sorozat, tehát konvergens (ld. a 3.13 Tételt). Mivel $S_{2k-1} - S_{2k} = a_{2k}$, ezért

$$\lim(S_{2k-1} - S_{2k}) = \lim a_{2k} = 0,$$

hiszen $a_n \to 0$. Ez éppen azt jelenti, hogy

$$\lim S_{2k-1} = \lim S_{2k} = A \in \mathbb{R},$$

amiből következik, hogy (S_n) is konvergens, $\lim S_n = A$, tehát $\sum(-1)^{n+1} a_n$ konvergens. $\square$

A bizonyításból látszik, hogy $A \in [S_{2k}, S_{2k-1}]$ minden $k \in \mathbb{N}$-re, így

$$|S_{2k-1} - A| \le a_{2k} \le a_{2k-1} \text{ és } |S_{2k} - A| \le a_{2k} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

azaz

$$|S_n - A| \le a_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.5}$$

Ez hasznos lehet az alternáló sor összegének a becsléséhez.

5.29. Definíció. Ha egy sor kielégíti a Leibniz-tétel feltételeit, vagyis

$$\sum (-1)^{n+1} a_n$$

alakú, ahol (a_n) monoton fogyó, $a_n \to 0$, akkor *Leibniz-sor*nak nevezzük.

5.30. Példa. A

$$\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

sor Leibniz-sor, így a Leibniz-tétel szerint konvergens. Azonban nem abszolút konvergens, mert láttuk, hogy $\sum \frac{1}{n}$ divergens.

5.31. Definíció. Azt mondjuk, hogy $\sum a_n$ *feltételesen konvergens*, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.

5.3. Végtelen sorok átrendezései, Cauchy-szorzata

5.32. Definíció. Egy $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekciót (p kölcsönösen egyértelmű és $\mathcal{R}(p) = \mathbb{N}$) a *természetes számok permutációjá*nak (más szóval *átrendezésé*nek) nevezünk.

Például a $3, 2, 1, 6, 5, 4, \ldots, 3k+3, 3k+2, 3k+1, \ldots$ sorozat egy permutációja a természetes számoknak.

Világos, hogy egy permutáció egyben egy sorozat is, ezért a

$$p(n) = p_n, \quad n \in N$$

jelölést fogjuk használni.

5.33. Definíció. Legyen adva az (a_n) és (b_n) sorozat. Azt mondjuk, hogy (b_n) az (a_n) sorozat egy *átrendezése*, ha létezik p permutációja a természetes számoknak, hogy $(b_n) = (a_{p_n})$.

A következő két tételt bizonyítás nélkül mondjuk ki.

5.34. Tétel. *A $\sum a_n$ sor pontosan akkor abszolút konvergens, ha minden p permutáció esetén $\sum a_{p_n}$ abszolút konvergens. Ekkor bármely p permutáció esetén*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

E tétel szerint az abszolút konvergens sorok öröklik a véges sok szám összeadásánál teljesülő kommutativitást. Ezzel szemben a feltételesen konvergens sorok nagyon labilis képződmények.

5.35. Tétel. *Legyen $\sum a_n$ feltételesen konvergens sor.*

1. *Minden $A \in \mathbb{R}$ számhoz létezik p permutáció, hogy*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n} = A.$$

2. *Létezik olyan p permutáció, hogy $\sum a_{p_n}$ divergens.*

A következőkben technikai okokból a sorozatok tagjait $n = 0$-tól kezdve sorszámozzuk.

5.36. Definíció. Legyenek $\sum a_n$ és $\sum b_n$ végtelen sorok. E két sor *Cauchy-szorzat*án azt a $\sum c_n$ végtelen sort értjük, melyre

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Szemléletesen:

Formálisan a Cauchy-szorzatot úgy képzelhetjük el, mintha a végtelen sorok végtelen összegek lennének, és szorzásukkor minden tagot minden taggal megszorzunk.

5.37. Tétel (Mertens-tétel)**.** *Legyen $\sum a_n$ abszolút konvergens és $\sum b_n$ konvergens végtelen sor. Ekkor a $\sum c_n$ Cauchy-szorzatuk konvergens, továbbá*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

Mielőtt a tételt bizonyítanánk, gondoljuk meg az alábbi lemmát!

5.38. Lemma. *Ha $\sum a_n$ abszolút konvergens végtelen sor és (x_n) nullsorozat, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k x_{n-k} = \lim_{n\to\infty} (a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_n x_0) = 0.$$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\
\hline
b_0 & a_0b_0 & a_1b_0 & a_2b_0 & a_3b_0 & \cdots \\
b_1 & a_0b_1 & a_1b_1 & a_2b_1 & \cdots & \\
b_2 & a_0b_2 & a_1b_2 & \cdots & & \\
b_3 & a_0b_3 & \cdots & & & \\
\vdots & \vdots & & & &
\end{array}
$$

5.1. ábra. Sorok Cauchy-szorzata

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Válasszunk egy K pozitív számot, melyre

$$|x_n| \le K,\ n \in \mathbb{N} \text{ és } \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \le K. \tag{5.6}$$

Mivel $x_n \to 0$, a $\sum |a_n|$ sorra pedig teljesül az 5.7 Cauchy-kritérium, ezért létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{2K} \text{ és } |a_{N+1}| + ... + |a_n| < \frac{\varepsilon}{2K}, \quad n > N. \tag{5.7}$$

Ha $n > 2N$, akkor $n - k > N$ minden $0 \le k \le N$ esetén, ezért (5.6) és (5.7) alapján

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{n} a_k x_{n-k}\right| &= \left|\sum_{k=0}^{N} a_k x_{n-k} + \sum_{k=N+1}^{n} a_k x_{n-k}\right| \\
&\le \sum_{k=0}^{N} |a_k| \cdot |x_{n-k}| + \sum_{k=N+1}^{n} |a_k| \cdot |x_{n-k}| \\
&< \frac{\varepsilon}{2K} \cdot \sum_{k=0}^{N} |a_k| + K \cdot \sum_{k=N+1}^{n} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2K} \cdot K + K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Ezzel az állítást beláttuk. $\square$

A Mertens-tétel bizonyítása. Jelölje

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := A \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n := B \in \mathbb{R}.$$

Be kell látnunk, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0) = A \cdot B.$$

Legyen $S_n := a_0 + a_1 + \cdots a_n$, $T_n := b_0 + b_1 + \cdots b_n$. Ekkor $\lim S_n = A$ és $\lim T_n = B$. Felírva a Cauchy-szorzat n-edik részletösszegét, átalakítások után az alábbit kapjuk:

$$\begin{aligned}
V_n &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \cdots + (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0) \\
&= a_0T_n + a_1T_{n-1} + \cdots + a_nT_0 \\
&= a_0 \cdot (T_n - B) + a_1 \cdot (T_{n-1} - B) + \cdots + a_n \cdot (T_0 - B) + (a_0 + a_1 + \cdots a_n) \cdot B \\
&= [a_0 \cdot (T_n - B) + a_1 \cdot (T_{n-1} - B) + \cdots + a_n \cdot (T_0 - B)] + S_n \cdot B.
\end{aligned}$$

Mivel a $(T_n - B)$ sorozat 0-hoz tart, ezért az 5.38 Lemma alapján a kapott összeg első (szögletes zárójelben lévő) tagja 0-hoz tart. A 2. tag pedig definíció szerint $A \cdot B$-hez tart, amivel a tételt beláttuk. □

5.39. Példa. Könnyen látható (akár a hányados-, akár a gyökkritérium segítségével), hogy a

$$\sum \frac{x^n}{n!}$$

sor abszolút konvergens bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén. Számítsuk ki a

$$\sum \frac{x^n}{n!} \text{ és } \sum \frac{y^n}{n!}$$

sorok Cauchy-szorzatát tetszőleges $x, y \in \mathbb{R}$ valós számokra! Az 5.36 Definíció alapján a $\sum c_n$ szorzatsor n. tagja

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k},$$

ami az 1.10 Binomiális tétel alapján

$$c_n = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Tehát a két sor Cauchy-szorzatára

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$$

teljesül.

5.40. *Megjegyzés.* Az előbbi példában

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Ez könnyen igazolható abból, hogy – amint láttuk – az $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ függvény ugyanazt az egyenlőséget elégíti ki, mint az exponenciális függvény, nevezetesen

$$E(x) \cdot E(y) = E(x+y),$$

$x = 1$-re pedig az (5.1) egyenlőség alapján $E(1) = \mathrm{e}$.

5.4. A sorok néhány alkalmazásáról

5.4.1. Végtelen tizedestörtek

A valós számok középiskolából ismert végtelen tizedestört-előállítása

$$x = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots, \quad a_0 \in \mathbb{Z},\ a_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}, n \geq 1$$

tulajdonképpen egy végtelen sorösszeg:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}. \tag{5.8}$$

Kérdések:

1. Ha adva van egy ilyen sor, miért konvergens?
2. Ha adva van $x \in \mathbb{R}$, hogyan kapjuk meg az előállítását?
3. Ha adva van $x \in \mathbb{R}$, egyértelmű-e az előállítás?

Az 1. kérdésre eddigi tanulmányaink alapján könnyen válaszolhatunk. Mivel

$$0 \leq \frac{a_n}{10^n} \leq \frac{9}{10^n}, \quad n \geq 1,$$

ezért az 5.16 Összehasonlító kritérium és a $\sum \frac{1}{10^n}$ mértani sor konvergenciája miatt az (5.8) sorelőállítás mindig konvergens.

A 2. kérdésre a válasz az, hogy sokféle előállítás lehetséges, mi az alábbiakban mutatunk ezek közül egy szokásos konstrukciót. Válasszuk meg az $a_0 \in \mathbb{Z}$ számot úgy, hogy

$$a_0 \leq x < a_0 + 1.$$

A továbbiakban az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $a_0 \geq 0$ (az $a_0 < 0$ eset hasonlóan gondolható meg). Válasszuk meg az $a_1 \in \{0, 1, \dots, 9\}$ számot úgy, hogy

$$a_0 + \frac{a_1}{10^1} \leq x < a_0 + \frac{a_1 + 1}{10^1}.$$

Válasszuk meg az $a_2 \in \{0, 1, \dots, 9\}$ számot úgy, hogy

$$a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2 + 1}{10^2}.$$

Tovább folytatva, az n-edik lépésben válasszuk meg az $a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$ számot úgy, hogy

$$a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \dots + \frac{a_n}{10^n} \leq x < a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \dots + \frac{a_n + 1}{10^n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.9}$$

Mivel az

$$s_n := a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \dots + \frac{a_n}{10^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

sorozatra (5.9) alapján

$$0 \leq x - s_n < \frac{1}{10^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

teljesül, ezért $s_n \to x$, vagyis

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = x.$$

A 3. kérdésre adott válasz nemleges, hiszen például

$$0,999\ldots = 1,000\ldots$$

Könnyen meggondolható, hogy az általunk leírt előállítás az 1 számra az $1,000\ldots$ alakot eredményezi. Ha azonban az (5.9) képletben az egyenlőség- és egyenlőtlenségjelet felcseréljük, vagyis azt követeljük meg, hogy

$$a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \dots + \frac{a_n}{10^n} < x \leq a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \dots + \frac{a_n + 1}{10^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

legyen, akkor az 1-et $0,999\ldots$ alakban kapnánk meg. A következőkben azt mutatjuk meg, hogy a konstrukciónk maga olyan, hogy minden valós számhoz egyetlen előállítást rendel hozzá. Tegyük fel indirekt, hogy x előáll mint

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{10^k},$$

és legyen $n \in \mathbb{N}$ az első olyan index, melyre $a_n \neq b_n$. Feltehető, hogy $a_n < b_n$, és mivel egész számokról van szó, $a_n + 1 \leq b_n$, tehát

$$a_0 = b_0, \dots, a_{n-1} = b_{n-1}, a_n + 1 \leq b_n.$$

Ekkor az (5.9) egyenlőtlenséget (b_n)-re és (a_n)-re alkalmazva

$$a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \dots + \frac{a_n + 1}{10^n} \le b_0 + \frac{b_1}{10^1} + \dots + \frac{b_n}{10^n} \le x < a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \dots + \frac{a_n + 1}{10^n},$$

ami ellentmondás.

5.4.2. Az e szám irracionális

Az (5.1) egyenlőség alapján

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}.$$

Tegyük fel indirekt, hogy

$$\mathrm{e} = \frac{p}{q}, \; p, q \in \mathbb{Z}^+, q \ge 2$$

(a $q \ge 2$ feltehető, egyébként bővítjük a törtet). Az

$$s_n := 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}$$

jelöléssel $s_n \to \mathrm{e}$ szigorúan monoton növő módon. Legyen $n > q$ tetszőleges. Ekkor

$$\begin{aligned}
0 \le q! \cdot (s_n - s_q) &= q! \cdot \left(\frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \dots + \frac{1}{n!} \right) \\
&= \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1) \cdot (q+2)} + \dots + \frac{1}{(q+1) \cdot \dots \cdot n} \\
&= \frac{1}{q+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{q+2} + \dots + \frac{1}{(q+2) \cdot \dots \cdot n} \right) \\
&\le \frac{1}{q+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \dots + \frac{1}{(q+1)^{n-q-1}} \right) \\
&\le \frac{1}{q+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{q+1}} = \frac{1}{q} \le \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ebből az $n \to \infty$ határátmenetet elvégezve kapjuk, hogy

$$0 \le q! \cdot (\mathrm{e} - s_q) \le \frac{1}{2}.$$

Másrészt, az indirekt feltevés alapján

$$0 \le q! \cdot (\mathrm{e} - s_q) = q! \cdot \left(\frac{p}{q} - s_q \right) = q! \cdot \left(\frac{p}{q} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{q!} \right) \in \mathbb{Z},$$

ami ellentmondás.

5.41. *Megjegyzés.* Ez az elegáns bizonyítás Joseph Fourier (1768–1830) francia matematikustól származik.

6. fejezet

Differenciálhatóság

6.1. A derivált fogalma és geometriai jelentése

Vizsgáljunk meg két egyszerű függvényt: $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(t) := t^2$, és $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(t) := |t|$. Rögzítsük az $a := 0$ pontot! Könnyen ellenőrizhető, hogy f_1 és f_2 is páros; alulról korlátos és felülről nem korlátos; a pozitív számok halmazán növekvő, a negatív számok halmazán fogyó; az $a = 0$ pontban minimuma van, és a minimum értéke 0; az $a = 0$ pontban folytonos. Szembetűnő a sok hasonlóság ellenére, hogy az $a = 0$ pontban az f_1 függvény sima, az f_2 függvénynek pedig törése van. Van-e olyan „műszer”, amely kimutatja, hogy egy függvény valamely pontban sima, egy másik pedig nem?

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény, $a \in \mathcal{D}(f)$ egy rögzített pont. Az f függvény a-hoz tartozó *különbségihányados-függvénye* legyen a

$$K_a^f : \mathcal{D}(f) \setminus \{a\} \to \mathbb{R} \quad K_a^f(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

függvény. Vizsgáljuk meg ezzel a „műszerrel” az f_1 és f_2 függvényt az $a := 0$ pont esetén (6.1. és 6.2. ábra)!

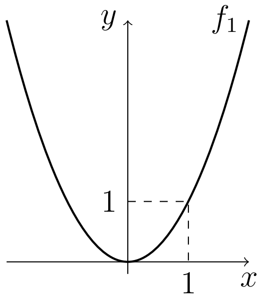
Az f_1 függvény esetén

$$K_0^{f_1}(x) = \frac{f_1(x) - f_1(0)}{x - 0} = \frac{x^2 - 0^2}{x - 0} = x.$$

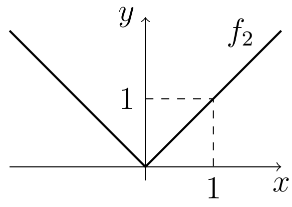
Az f_2 függvény esetén

$$K_0^{f_2}(x) = \frac{f_2(x) - f_2(0)}{x - 0} = \frac{|x| - 0}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases} \tag{6.1}$$

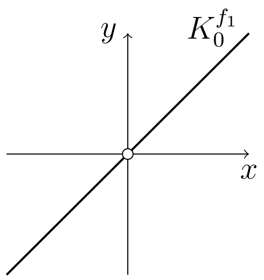
(ld. a 6.3. és a 6.4. ábrát!) Látjuk, hogy a sima f_1 függvény esetén van határértéke (folytonossá tehető) a $K_0^{f_1}$ különbségihányados-függvénynek a 0-ban, míg a töréssel rendelkező



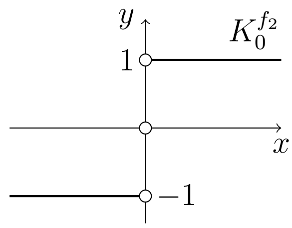
6.1. ábra. Az f_1 függvény



6.2. ábra. Az f_2 függvény



6.3. ábra. A $K_0^{f_1}$ függvény



6.4. ábra. A $K_0^{f_2}$ függvény

f_2 függvény $K_0^{f_2}$ különbségihányados-függvényének nincs határértéke a 0 pontban. Ez a vizsgálat motiválja, hogy azokat a függvényeket, amelyek különbségihányados-függvényének van határértéke abban az a pontban, amelyhez tartozik (a példában $a = 0$), *differenciálható*nak fogjuk nevezni a-ban, és az a-beli *deriváltja* ezt a határértéket jelenti:

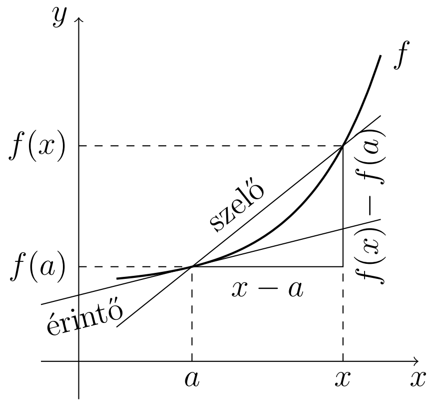
$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Honnan került elő az a „műszer”, amely alkalmas egy függvény simaságát kimutatni? Először egy geometriai megközelítést mutatunk be. A koordináta-rendszer $(a, f(a))$ és a tőle különböző $(x, f(x))$ pontjain át fektessünk egy egyenest (szelőt). Az egyenes *meredeksége (iránytangense)*

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

(Ezt jelöltük $K_a^f(x)$-szel.)

Ha x tart az a-hoz, akkor (sima függvény esetén) a szelők tartanak egy határhelyzethez, amelyet *érintő*nek nevezünk, így a szelők meredeksége is tart az érintő meredekségéhez (6.5. ábra). (Ezt a határértéket neveztük el deriváltnak.) A másik egy fizikai interpretáció legyen. Tegyük fel, hogy egy pont mozgását a $t \mapsto s(t)$ út-idő függvény írja



6.5. ábra. Szelő meredeksége

le. A $[t_0, t]$ időintervallumban az átlagsebesség a megtett $s(t) - s(t_0)$ út és a megtételéhez szükséges $t - t_0$ idő hányadosa, azaz

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Ha „minden határon túl” rövidítjük az időintervallumot, az átlagsebesség egy szám körül keveset ingadozik (feltéve, hogy sima volt az út-idő függvény), ezt a számot nevezzük *pillanatnyi sebesség*nek:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} =: v(t_0) \quad \text{vagy} \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v.$$

Látható, hogy a pillanatnyi sebesség az átlagsebesség határértéke és az út-idő függvény differenciálhányadosa: $s'(t_0) = v(t_0)$. Ez fizikailag tulajdonképpen azt jelenti, hogy a derivált az „utolsó mérhető egységre jutó megváltozás”.

6.2. A derivált fogalma és kapcsolata a folytonossággal

6.1. Definíció. Legyen $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$. Azt mondjuk, hogy *a belső pontja* az A halmaznak, ha a-nak létezik $K(a)$ környezete, hogy $K(a) \subset A$.
Az A halmaz belső pontjainak halmazát jelölje $\operatorname{int} A$.

6.2. Példa. Legyen $A := [0, 1)$ intervallum. Ekkor $\operatorname{int} A = (0, 1)$ (nyílt) intervallum.

6.3. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Azt mondjuk, hogy az f függvény *differenciálható* az a pontban, ha

$$\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R},$$

vagyis ha az f függvény a-hoz tartozó K_a^f *különbségihányados-függvényének*, ahol

$$K_a^f : \mathcal{D}(f) \setminus \{a\} \to \mathbb{R} \quad K_a^f(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

létezik véges határértéke a-ban.[1]
Ha f differenciálható az a pontban, akkor

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Az $f'(a) \in \mathbb{R}$ számot az f függvény a pontbeli *differenciálhányados*ának vagy *derivált-ján*ak[2] nevezzük.
Az $f'(a)$ helyett használatos még az $\dot{f}(a)$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}|_{x=a}$, $Df(a)$ jelölés is.

6.4. *Megjegyzés.* A derivált definíciója ekvivalens módon így is írható:

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

6.5. *Megjegyzés.* A derivált defníciójában szereplő határérték létezése és végessége egyaránt fontos. Az $f(x) := \sqrt[3]{x}$ függvény esetén az $a = 0$ pontban a különbségi hányados határértéke létezik, de $+\infty$, így ez a függvény nem differenciálható a 0-ban.

A fenti 6.5. ábra alapján meggondoltak szerint az $f'(a)$ szám a függvény grafikonjának, graph(f)-nek $(a, f(a))$ pontjához húzott érintőjének a meredeksége. Ennek megfelelően definiálhatjuk az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban differenciálható f függvény a pontbeli érintőjét.

6.6. Definíció. Tegyük fel, hogy f differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban. Ekkor az *f függvény a pontbeli érintője* az alábbi egyenlettel meghatározott egyenes:

$$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a). \tag{6.2}$$

Az érintő tehát az $(a, f(a))$ ponton átmenő $f'(a)$ meredekségű egyenes. A következő fontos tétel arról szól, hogy a függvény érintője mennyire van „közel” a függvény grafikonjához.

6.7. Tétel (Főtétel)**.** [3] *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Ekkor az alábbiak ekvivalensek:*

1. *f differenciálható az a pontban;*

---

[1] Ez A. L. Cauchy francia matematikus definíciója 1821-ből.
[2] Jelentése: származtatott (J. L. Lagrange, 1797.)
[3] A differenciálhatóság C. Carathéodory (1950) görög matematikustól származó ekvivalens megfogalmazása.

2. $\exists F_a : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}$ *az a pontban folytonos függvény, hogy* $\forall x \in \mathcal{D}(f)$ *esetén*

$$f(x) = f(a) + F_a(x) \cdot (x - a). \tag{6.3}$$

Bizonyítás. 1. $\Rightarrow$ 2.: Legyen f differenciálható a-ban. Ekkor vezessük be az

$$F_a : \mathcal{D}(f) \to \mathbb{R}, \quad F_a(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, & \text{ha } x \neq a\,; \\ f'(a), & \text{ha } x = a \end{cases}$$

függvényt. Az F_a folytonos a-ban, ugyanis $\forall x \in \mathcal{D}(f) \setminus \{a\}$ esetén

$$F_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

az f függvény a-beli differenciálhatósága miatt pedig

$$\lim_{x \to a} F_a(x) = f'(a) = F_a(a).$$

Legyen ezután $x \in \mathcal{D}(f)$ tetszőleges. Ha $x \neq a$, akkor

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) = F_a(x) \cdot (x - a);$$

ha $x = a$, akkor pedig

$$f(a) - f(a) = F_a(a) \cdot (a - a)$$

nyilván igaz.
2. $\Rightarrow$ 1.: Tegyük fel, hogy $\exists F_a$ az a-ban folytonos függvény, hogy $\forall x \in \mathcal{D}(f)$ esetén $f(x) - f(a) = F_a(x) \cdot (x - a)$.
Ha $x \neq a$, akkor

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = F_a(x).$$

Mivel a feltétel szerint F_a folytonos a-ban, ezért $\exists \lim_{x \to a} F_a(x) = F_a(a)$, de akkor

$$\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = F_a(a) \in \mathbb{R}$$

is teljesül, azaz f differenciálható a-ban, sőt $F_a(a) = f'(a)$. $\square$

6.8. *Megjegyzés.* A bizonyításból kiderült, hogy a tétel szerint létező F_a függvényre

$$F_a(a) = f'(a)$$

teljesül.

Vonjuk most ki a (6.3) azonosságból az érintő (6.2) egyenletét! Ekkor

$$f(x) - y = (F_a(x) - f'(a)) \cdot (x - a)$$

Ez azt jelenti, hogy f érintője olyan közel van f-hez x-ben, mint egy a-ban 0 határértékkel rendelkező folytonos függvény, megszorozva $(x - a)$-val. Az érintő egyenletét behelyettesítve és az egyenletet átrendezve pedig azt kapjuk, hogy

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + (F_a(x) - f'(a))\,(x - a).$$

Ebből

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + r(x, a), \tag{6.4}$$

ahol

$$\lim_{x \to a} \frac{r(x, a)}{x - a} = 0.$$

A (6.4) egyenlet a differenciálhatóság egy harmadik ekvivalens megfogalmazása, amely K. T. W. Weierstrass német matematikustól származik 1861-ből.

6.9. Tétel. *Ha f differenciálható a-ban, akkor f folytonos a-ban.*

Bizonyítás. Ha f differenciálható a-ban, akkor $\exists F_a$ olyan a-ban folytonos függvény, hogy $\forall x \in \mathcal{D}(f)$ esetén $f(x) - f(a) = F_a(x) \cdot (x - a)$, azaz

$$f = f(a) + F_a \cdot (\mathrm{id} - a).$$

Mivel a-ban folytonos függvények összege, szorzata is folytonos, ezért f is folytonos az a pontban. □

6.10. *Megjegyzés.* Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := |x|$ függvény folytonos az $a := 0$ pontban, de a (6.1) összefüggésben láttuk, hogy a 0-hoz tartozó különbségihányados-függvényének nincs határértéke a 0-ban, ezért f nem differenciálható a 0 pontban. A példa azt mutatja, hogy a tétel nem fordítható meg.

6.11. Definíció. Az f függvény *deriváltfüggvényé*nek nevezzük, és f'-vel jelöljük azt a függvényt, amely minden x pontban, melyben a függvény differenciálható, megadja az x-beli deriváltat. Tehát

$$\mathcal{D}(f') := \{x : f \text{ differenciálható } x\text{-ben}\}$$
$$f'(x) := \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

6.12. Definíció. Azt mondjuk, hogy az f függvény *folytonosan differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban*, ha az f' deriváltfüggvény létezik az a pont egy környezetében és folytonos a-ban. Az f függvény *folytonosan differenciálható*, ha $\mathcal{D}(f') = \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ és f' folytonos.

6.13. Példa. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) := t^2$ függvény nem csak az $x := 0$ pontban tűnik simának (ld. az előző szakaszt). Legyen $x \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges valós szám! Nézzük meg, hogy az f függvény x-hez tartozó különbségihányadosának van-e határértéke x-ben! Egyszerűen látható, hogy

$$\lim_{t\to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = \lim_{t\to x} \frac{t^2 - x^2}{t - x} = \lim_{t\to x} \frac{(t - x)(t + x)}{t - x} = \lim_{t\to x}(t + x) = 2x,$$

tehát f differenciálható x-ben és $f'(x) = 2x$, vagyis a deriváltfüggvénye $(\mathrm{id}^2)' = 2 \cdot \mathrm{id}$.

6.3. Műveletek differenciálható függvényekkel

6.14. Tétel. *Ha f, g differenciálhatók a-ban, akkor $f + g$ is differenciálható a-ban, és*

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

Bizonyítás. A definíció és az összeg határértékére vonatkozó összefüggés alapján

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(a)}{x - a} &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) + g(x) - f(a) - g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + \lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= f'(a) + g'(a).\end{aligned}$$

□

6.15. Tétel. *Ha f differenciálható a-ban és $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor λf is differenciálható a-ban, és*

$$(\lambda f)'(a) = \lambda \cdot f'(a).$$

Bizonyítás. Ismét a definíció és a konstansszoros határértékére vonatkozó összefüggés alapján

$$\lim_{x\to a} \frac{(\lambda f)(x) - (\lambda f)(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \lambda \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lambda \cdot f'(a).$$

□

6.16. Következmény. *Ha f, g differenciálhatók a-ban, akkor $f - g$ is differenciálható a-ban, és*

$$(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a).$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 6.14 és a 6.15 Tételeket f-re és g-re, valamint $\lambda = -1$-re. □

6.17. Tétel (Leibniz-szabály)**.** *Ha f, g differenciálhatók a-ban, akkor $f \cdot g$ is differenciálható a-ban, és*

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Bizonyítás. Az előbbiekhez hasonlóan

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a}&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}\\&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot g(x)+f(a)\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\\&=f'(a)g(a)+f(a)g'(a).\end{aligned}$$

Felhasználtuk, hogy mivel g differenciálható a-ban, ezért g folytonos a-ban (ld. a 6.9 Tételt), így $\lim_{x\to a} g(x)=g(a)$. □

6.18. Tétel. *Ha g differenciálható a-ban és $g(a)\neq 0$, akkor $\frac{1}{g}$ is differenciálható a-ban, és*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a)=-\frac{g'(a)}{g^2(a)}.$$

Bizonyítás. Mivel g differenciálható a-ban, ezért g folytonos a-ban (ld. a 6.9 Tételt). Így a $g(a)\neq 0$ feltétel miatt $\exists K(a)\subset\mathcal{D}(g)$ környezet, hogy $\forall x\in K(a)$ esetén $g(x)\neq 0$, tehát $a\in\operatorname{int}\mathcal{D}\left(\frac{1}{g}\right)$. Ekkor

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x)-\left(\frac{1}{g}\right)(a)}{x-a}&=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(a)}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{g(a)-g(x)}{g(x)g(a)}}{x-a}=\\&=\lim_{x\to a}\left(-\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\cdot\frac{1}{g(x)g(a)}\right)\\&=-g'(a)\cdot\frac{1}{g^2(a)}.\end{aligned}$$

□

6.19. Tétel. *Ha f,g differenciálhatók a-ban és $g(a)\neq 0$, akkor $\frac{f}{g}$ is differenciálható a-ban és*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Bizonyítás. Mivel $\frac{f}{g}=f\cdot\frac{1}{g}$, és a feltételek szerint $\frac{1}{g}$ differenciálható a-ban, ezért a szorzatfüggvény differenciálhatóságára vonatkozó tétel miatt $\frac{f}{g}$ differenciálható a-ban és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a)=\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(a)=f'(a)\cdot\frac{1}{g(a)}+f(a)\cdot\left(-\frac{g'(a)}{g^2(a)}\right)=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

□

6.20. Tétel. *Tegyük fel, hogy g differenciálható a-ban és f differenciálható $g(a)$-ban. Ekkor $f \circ g$ is differenciálható a-ban, és*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Bizonyítás. Először gondoljuk meg, hogy a feltételekből következik:

$$a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f \circ g) = \operatorname{int} \{x \in \mathcal{D}(g) : g(x) \in \mathcal{D}(f)\} .$$

Mivel $g(a) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$, ezért $\exists \varepsilon > 0$, hogy $K_\varepsilon(g(a)) \subset \mathcal{D}(f)$. Másrészt g differenciálható a-ban, ezért folytonos is a-ban, így $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy

$$x \in K_\delta(a) \cap \mathcal{D}(g) \Longrightarrow g(x) \in K_\varepsilon(g(a)) \subset \mathcal{D}(f). \tag{6.5}$$

Tudjuk, hogy $\exists \rho > 0 : K_\rho(a) \subset \mathcal{D}(g)$. Jelölje $r := \min\{\delta, \rho\}$. Ekkor (6.5) alapján

$$x \in K_r(a) \Longrightarrow x \in \mathcal{D}(g),\ g(x) \in \mathcal{D}(f) \Longrightarrow x \in \mathcal{D}(f \circ g),$$

így $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f \circ g)$ teljesül.
Mivel g differenciálható a-ban, ezért a 6.7 Főtétel miatt $\exists G_a$ az a-ban folytonos függvény, hogy $\forall x \in \mathcal{D}(g)$ esetén

$$g(x) - g(a) = G_a(x) \cdot (x - a).$$

Mivel f differenciálható $g(a)$-ban, ezért szintén a 6.7 Főtétel miatt $\exists F_{g(a)}$, a $g(a)$ pontban folytonos függvény, hogy $\forall y \in \mathcal{D}(f)$ esetén

$$f(y) - f(g(a)) = F_{g(a)}(y) \cdot (y - g(a)).$$

Legyen $x \in \mathcal{D}(f \circ g)$, ekkor az $y := g(x)$ jelöléssel a fenti két egyenlőségből következik:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a) = f(g(x)) - f(g(a)) &= F_{g(a)}(g(x)) \cdot (g(x) - g(a)) \\ &= F_{g(a)}(g(x)) \cdot G_a(x) \cdot (x - a) \\ &= \big((F_{g(a)} \circ g) \cdot G_a\big)(x) \cdot (x - a).\end{aligned} \tag{6.6}$$

Mivel g differenciálható a-ban, ezért g folytonos a-ban (ld. a 6.9 Tételt); $F_{g(a)}$ folytonos $g(a)$-ban, így a kompozíciófüggvény folytonosságára vonatkozó tétel szerint $F_{g(a)} \circ g$ folytonos a-ban. Mivel G_a folytonos a-ban, ezért a szorzatfüggvény folytonosságát felhasználva, az $\big(F_{g(a)} \circ g\big) \cdot G_a$ is folytonos az a pontban. Így a 6.7 Főtétel alapján (6.6) utolsó sora éppen azt jelenti, hogy $f \circ g$ differenciálható a-ban, sőt

$$(f \circ g)'(a) = \big((F_{g(a)} \circ g) \cdot G_a\big)(a) = F_{g(a)}(g(a)) \cdot G_a(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

$\square$

6.21. *Megjegyzés.* Az előző bizonyításban kénytelenek voltunk a 6.7 Tételre (Főtétel) támaszkodni, bár kézenfekvő volna a következő jóval egyszerűbbnek tűnő, ám hibás gondolatmenet. Alakítsuk át az $f \circ g$ függvény $g(a)$ pontbeli különbséghányadosát az alábbi módon:

$$\frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} = \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a}.$$

Az $x \to a$ határátmenetben a jobb oldal első tényezője $f'(g(a))$-hoz tart (mivel a g függvény a pontbeli folytonossága miatt $g(x) \to g(a)$), a második tényező pedig $g'(a)$-hoz tart. Ez az érvelés azért hibás, mert előfordulhat, hogy az a ponthoz tetszőlegesen közel van olyan x, melyre $g(x) = g(a)$ teljesül. Így az átalakítás nem feltétlenül végezhető el az a pont egy környezetében, 0-val ugyanis nem oszthatunk.

A következő tétel az inverzfüggvény differenciálhatóságáról szól. Fontos megjegyeznünk, hogy a tétel állításai közül a leglényegesebb maga a derivált létezése, mert a derivált képlete azonnal adódik a kompozíciófüggvény deriválási szabályából. Ugyanis, az

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$$

egyenlőség mindkét oldalát deriválva, a 6.20 Tétel alapján

$$f' \circ f^{-1} \cdot (f^{-1})' = 1 \Longrightarrow (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}},$$

ami éppen (6.7).

6.22. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ szigorúan monoton és folytonos függvény. Legyen $a \in I$, f differenciálható a-ban és $f'(a) \neq 0$. Ekkor f^{-1} differenciálható a $b := f(a)$ pontban, és*

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}, \tag{6.7}$$

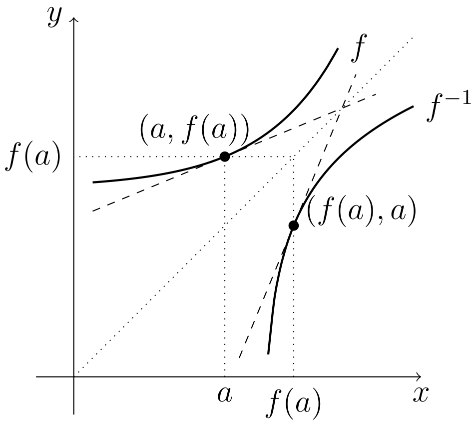
másképp

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Bizonyítás. A szigorú monotonitás miatt a folytonos f függvény injektív, így a folytonos függvény inverzéről szóló tétel miatt létezik az $f^{-1} : J \to I$ inverzfüggvény, ahol $\mathcal{D}(f^{-1}) = J$ is nyílt intervallum, tehát $b \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f^{-1})$. Az f^{-1} függvény b pontbeli differenciálhatóságához meg kell mutatni, hogy létezik a

$$\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}$$

határérték és ez valós szám.
Legyen $(y_n) \subset J$, $y_n \to b$, $y_n \neq b$ tetszőleges sorozat. Bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen



6.6. ábra. Inverzfüggvény deriváltja

$x_n := f^{-1}(y_n)$. Az $(x_n) \subset I$ sorozat konvergens, és $\lim x_n = a$, mert az inverzfüggvény folytonosságáról szóló tétel és az átviteli elv szerint

$$y_n \to b \Rightarrow f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(b), \text{ azaz } x_n \to a.$$

Továbbá $x_n \neq a$ is teljesül f^{-1} injektivitása miatt. Ezért

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n - a}} \to \frac{1}{f'(a)},$$

hiszen $f'(a) \neq 0$. Mivel bármely $(y_n) \subset J$, $y_n \to b$ esetén az $(\dfrac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b})$ sorozat konvergens, ezért a függvényhatárértékre vonatkozó átviteli elv szerint létezik a

$$\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}$$

határérték. Így f^{-1} differenciálható b-ben, és az is látható, hogy

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

□

6.23. *Megjegyzés.* A tétel állítását jól szemlélteti a 6.6. ábra: ha az érintőt tükrözzük az $y = x$ egyenesre, akkor a meredekség a reciprokára változik.

6.4. Elemi függvények deriváltja

Nézzünk egy további példát! Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t) := t^3,\ x \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t\to x} \frac{t^3-x^3}{t-x} = \lim_{t\to x} \frac{(t-x)(t^2+tx+x^2)}{t-x} = \lim_{t\to x}(t^2+tx+x^2) = 3x^2,$$

tehát f differenciálható x-ben, és $f'(x) = 3x^2$, vagy röviden

$$(\mathrm{id}^3)' = 3 \cdot \mathrm{id}^2 .$$

Az alábbiakban ezt 3 helyett általánosítjuk tetszőleges α kitevőre.

Nevezetes függvényderiváltak:

1. $(\mathrm{id}^\alpha)' = \alpha \cdot \mathrm{id}^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

   Bizonyítás. Mivel az id^α függvény csak a pozitív félegyenesen van értelmezve, ezért érvényes a következő átírás:
   $$x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\cdot\ln x},$$
   ebből a kompozíciófüggvény deriválási szabálya alapján
   $$(x^\alpha)' = \mathrm{e}^{\alpha\cdot\ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}.$$
   □

2. $\sin' = \cos$

   Bizonyítás.
   $$\sin'(x) = \lim_{t\to x} \frac{\sin t - \sin x}{t-x} = \lim_{t\to x} \frac{2\sin\frac{t-x}{2}\cos\frac{t+x}{2}}{t-x}$$
   $$= \lim_{t\to x}\left(\frac{\sin\frac{t-x}{2}}{\frac{t-x}{2}}\cos\frac{t+x}{2}\right) = 1\cdot\cos x = \cos x.$$
   Az átalakítás során a trigonometrikus függvények addíciós tételeinek egy következményét, valamint a cos függvény folytonosságát használtuk. Mivel $\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1$, ezért $t \to x$ esetén az $u := \frac{t-x}{2} \to 0$, így
   $$\lim_{t\to x}\frac{\sin\frac{t-x}{2}}{\frac{t-x}{2}} = 1.$$
   □

3. $\cos' = -\sin$

Bizonyítás. Ugyanúgy, mint fent, az olvasóra bízzuk. $\square$

4. $\mathrm{tg}' = \frac{1}{\cos^2}$

Bizonyítás. A hányadosfüggvény deriválási szabályából:

$$\mathrm{tg}' = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)' = \frac{\sin' \cdot \cos - \cos' \cdot \sin}{\cos^2} = \frac{\sin^2 + \cos^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}.$$

$\square$

5. $\mathrm{ctg}' = -\frac{1}{\sin^2}$

Bizonyítás. Ugyanúgy, mint fent, az olvasóra bízzuk. $\square$

6. $\exp_a' = \exp_a \cdot \ln a \quad (a > 0)$, speciálisan: $\exp' = \exp$

Bizonyítás. A 4.7. szakaszban igazoltuk az alábbi nevezetes határértéket:

$$\exp_a'(x) = \lim_{t \to x} \frac{a^t - a^x}{t - x} = a^x \cdot \ln a = \exp_a(x) \cdot \ln a, \quad (a > 0, a \neq 1).$$

$\square$

7. $\log_a' = \frac{1}{\mathrm{id} \cdot \ln a} \quad (a > 0,\ a \neq 1)$, speciálisan: $\ln' = \frac{1}{\mathrm{id}}$

Bizonyítás. A 4.7. szakaszban igazoltuk az alábbi nevezetes határértéket:

$$\log_a'(x) = \lim_{t \to x} \frac{\log_a t - \log_a x}{t - x} = \frac{1}{x \cdot \ln a} = \frac{1}{\mathrm{id}(x) \cdot \ln a}, \quad (a > 0, a \neq 1).$$

Vagy másképp: az inverzfüggvény deriválási szabálya alapján:

$$\log_a'(x) = \frac{1}{\exp_a'(\log_a x)} = \frac{1}{\exp_a(\log_a x) \cdot \ln a} = \frac{1}{x \cdot \ln a} = \frac{1}{\mathrm{id}(x) \cdot \ln a}.$$

$\square$

8. $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$

Bizonyítás.

$$\operatorname{sh}' x = \left(\frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)' = \frac{(\mathrm{e}^x)' - (\mathrm{e}^{-x})'}{2} = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x.$$

□

9. $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$

Bizonyítás. Ugyanúgy, mint fent, az olvasóra bízzuk. □

10. $\operatorname{th}' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2}$

Bizonyítás. A hányadosfüggvény deriválási szabályából:

$$\operatorname{th}' = \left(\frac{\operatorname{sh}}{\operatorname{ch}}\right)' = \frac{\operatorname{sh}' \cdot \operatorname{ch} - \operatorname{ch}' \cdot \operatorname{sh}}{\operatorname{ch}^2} = \frac{\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2}{\operatorname{ch}^2} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2}.$$

□

11. $\operatorname{cth}' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2}$

Bizonyítás. Ugyanúgy, mint fent, az olvasóra bízzuk. □

12. $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$

Bizonyítás. Az inverzfüggvény deriválási szabálya alapján:

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

mivel $\cos|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} > 0$. □

13. $\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$

Bizonyítás. Ugyanúgy, mint fent, az olvasóra bízzuk. □

14. $\operatorname{arctg}' \ x = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$

Bizonyítás. Az inverz függvény deriválási szabálya alapján:

$$\operatorname{arctg}' \ x = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} \ x)} = \cos^2(\operatorname{arctg} \ x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} \ x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Itt felhasználtuk, hogy $\cos^2 = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2}$, ami könnyen adódik a $\sin^2 + \cos^2 = 1$ azonosságból, ha mindkét oldalt osztjuk $\cos^2$-el. □

15. $\operatorname{arcctg}' x = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$

Bizonyítás. Ugyanúgy, mint fent, az olvasóra bízzuk. $\square$

16. $\operatorname{arsh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad x \in \mathbb{R}$

Bizonyítás. Az inverzfüggvény deriválási szabálya alapján:

$$\operatorname{arsh}' x = \frac{1}{\operatorname{sh}'(\operatorname{arsh} x)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{arsh} x)} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(\operatorname{arsh} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$\square$

17. $\operatorname{arch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1)$

Bizonyítás. Ugyanúgy, mint fent, az olvasóra bízzuk. $\square$

18. $\operatorname{arth}' x = \frac{1}{1-x^2}, \quad -1 < x < 1$

Bizonyítás. Az inverz függvény deriválási szabálya alapján:

$$\operatorname{arth}' x = \frac{1}{\operatorname{th}'(\operatorname{arth} x)} = \operatorname{ch}^2(\operatorname{arth} x) = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2(\operatorname{arth} x)} = \frac{1}{1-x^2}.$$

itt felhasználtuk, hogy $\operatorname{ch}^2 = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2}$, ami könnyen adódik a $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$ azonosságból, ha mindkét oldalt elosztjuk ch^2-el. $\square$

19. $\operatorname{arcth}' x = \frac{1}{1-x^2}, \quad |x| > 1$

Bizonyítás. Ugyanúgy, mint fent, az olvasóra bízzuk. $\square$

6.5. Lokális növekedés, fogyás és lokális szélsőérték

6.24. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Azt mondjuk, hogy f *lokálisan növő (fogyó) az a pontban*, ha $\exists K(a) \subset \mathcal{D}(f)$, hogy $\forall x_1 \in K(a),\ x_1 < a$ esetén $f(x_1) \le f(a)$ $(f(x_1) \ge f(a))$ és $\forall x_2 \in K(a),\ x_2 > a$ esetén $f(x_2) \ge f(a)$ $(f(x_2) \le f(a))$.

6.25. Tétel. *Ha f differenciálható a-ban, és f az a pontban lokálisan növő (fogyó), akkor $f'(a) \ge 0$ $(f'(a) \le 0)$.*

Bizonyítás. A bizonyítást lokálisan növő esetre végezzük – a lokálisan fogyó eset hasonlóan meggondolható. Mivel f lokálisan nő az a-ban, ezért $\exists K(a) \subset \mathcal{D}(f)$, hogy $\forall x \in K(a),\ x \ne a$ esetén

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \ge 0$$

(ha $x < a$, akkor $x - a < 0$ és $f(x) - f(a) \le 0$, míg $x > a$ esetén $x - a > 0$ és $f(x) - f(a) \ge 0$).
Az f differenciálható a-ban, ezért

$$\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \ge 0, \text{ azaz } f'(a) \ge 0.$$

□

6.26. Definíció. Az f függvény *szigorúan lokálisan növő (fogyó) a-ban*, ha $\exists K(a) \subset \mathcal{D}(f)$, hogy $\forall x_1, x_2 \in K(a),\ x_1 < a < x_2$ esetén $f(x_1) < f(a) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(a) > f(x_2))$.

Ha f differenciálható a-ban és szigorúan lokálisan nő az a-ban, akkor ugyan $\forall x \in K(a),\ x \ne a$ esetén

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0,$$

de a határértékre csak

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \ge 0$$

mondható, így $f'(a) \ge 0$. Például az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(t) := t^3$ függvény a 0-ban szigorúan lokálisan nő, de $f'(0) = (t^3)'|_{t=0} = 3t^2|_{t=0} = 0$.

6.27. Tétel. *Ha f differenciálható a-ban, és $f'(a) > 0$ $(f'(a) < 0)$, akkor f szigorúan lokálisan növő (fogyó) az a pontban.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $f'(a) > 0$. Ekkor

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0,$$

amiből a határérték definíciója alapján következik, hogy létezik a-nak olyan kipontozott $\dot{K}(a)$ környezete, melyre

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0, \quad x \in \dot{K}(a).$$

Így f szigorúan lokálisan növő a-ban (ha $x < a$, akkor $x - a < 0$ és $f(x) - f(a) < 0$, míg $x > a$ esetén $x - a > 0$ és $f(x) - f(a) > 0$). Az $f'(a) < 0$ eset hasonlóan meggondolható. □

6.28. *Megjegyzés.* A függvény lokális növekedésének illetve csökkenésének semmi köze az adott pont környezetében a függvény „menetéhez”. Például, az

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

függvény a 0-ban szigorúan lokálisan növő, de a 0 egyetlen környezetében sem monoton növő.

6.29. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban *lokális minimuma* van (vagy *a lokális minimumhelye f-nek*), ha $\exists K(a)$, hogy $\forall x \in K(a)$ esetén $f(x) \geq f(a)$.
Szigorú lokális minimum akkor van, ha $\forall x \in K(a),\ x \neq a$ esetén $f(x) > f(a)$.
Értelemszerű változtatással kapjuk a *lokális maximum* (vagy *lokális maximumhely*) és a *szigorú lokális maximum* fogalmát. A minimum és a maximum közös elnevezése a *szélsőérték.*

6.30. Tétel. *Ha f differenciálható a-ban, és az f függvénynek lokális szélsőértéke van az a pontban, akkor $f'(a) = 0$.*

Bizonyítás. Ha $f'(a) \neq 0$ lenne (például $f'(a) > 0$), akkor f az a-ban szigorúan lokálisan növekedne, így nem lehetne lokális szélsőértéke a-ban. □

Vigyázat! A fenti tétel csak szükséges feltételt ad lokális szélsőérték létezésére, és nem fordítható meg!

6.31. Példa. Tekintsük az $f(x) = x^3$ hozzárendeléssel adott függvényt. Mivel $f'(x) = 3x^2$, ezért $f'(0) = 0$, de f-nek nincs lokális szélsőértéke a 0-ban.

6.6. Középértéktételek

6.32. Definíció. Azt mondjuk, hogy f *differenciálható az $A \subset \mathcal{D}(f)$ halmazon* (jele $f \in D(A)$), ha $\forall a \in A$ esetén f differenciálható a-ban.

A fenti jelöléssel analóg módon jelentse $f \in C(A)$, hogy f folytonos a-ban minden $a \in A$ esetén.

6.33. Tétel (Rolle-tétel)**.** *Ha* $f \in C[a,b]$, $f \in D(a,b)$, *és* $f(a) = f(b)$, *akkor* $\exists c \in (a,b)$ *olyan, hogy* $f'(c) = 0$.

Bizonyítás. Ha $\forall x \in [a,b]$ esetén $f(x) = f(a) = f(b)$, azaz f konstansfüggvény, akkor bármely $c \in (a,b)$ megfelel.
Ha $\exists x_0 \in (a,b)$, hogy $f(x_0) \neq f(a)$, akkor az $f \in C[a,b]$ miatt a Weierstrass-tétel szerint van minimuma és van maximuma is az f-nek, és legalább az egyiket nem az $[a,b]$ intervallum végpontjában veszi fel, hanem az intervallum belsejében. Legyen ez a pont c. Ekkor c lokális szélsőértékhely, így a 6.30 Tétel szerint $f'(c) = 0$. □

6.34. Tétel (Lagrange-féle középértéktétel)**.** *Legyen* $f \in C[a,b]$, $f \in D(a,b)$. *Ekkor* $\exists c \in (a,b)$ *olyan, hogy*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Bizonyítás. Tekintsük a

$$h : [a,b] \to \mathbb{R},\ h(x) := f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a) \right)$$

függvényt! Könnyű ellenőrizni, hogy $h(a) = h(b) = 0$. Továbbá $h \in C[a,b]$ és $h \in D(a,b)$. Így a Rolle-tétel szerint $\exists c \in (a,b)$ olyan, hogy $h'(c) = 0$. Mivel $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ $(x \in (a,b))$, ezért

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

amiből

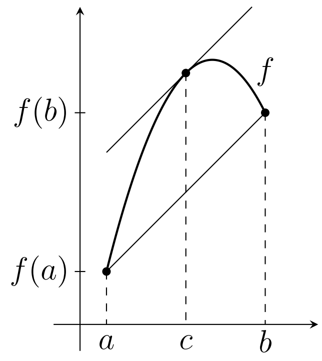
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

következik. □

6.35. *Megjegyzés.* A 6.7. ábra alapján jól látható a tétel szemléletes jelentése. Az $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ hányados az $(a, f(a)$ és $(b, f(b))$ pontokat összekötő húr meredeksége. A tétel azt mondja, hogy van olyan $c \in (a,b)$ pont, ahol a függvény grafikonjának az érintője párhuzamos a húr egyenesével. A bizonyításban szereplő h függvény éppen az f és a húr egyenesének egyenlete különbsége. Ahol ennek értéke a legnagyobb, ott h deriváltja 0, és éppen ez a keresett c pont.

A Lagrange-féle középértéktétel következménye az is, hogy intervallumon differenciálható függvény pontosan akkor konstans, ha deriválja 0.

6.36. Állítás. *Legyen* $I \subset \mathbb{R}$ *nyílt intervallum,* $f \in D(I)$. *Ekkor ekvivalenesek:*



6.7. ábra. Lagrange-féle középértéktétel

1. *Létezik* $c^* \in \mathbb{R}$ *olyan, hogy* $\forall x \in I$ *esetén* $f(x) = c^*$ *azaz* f *konstans az* I *intervallumon.*

2. *Minden* $x \in I$ *esetén* $f'(x) = 0$.

Bizonyítás. 1. $\Rightarrow$ 2. : Triviális. 2. $\Rightarrow$ 1. : Legyen $x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2$. A 6.34 Lagrange-féle középértéktétel szerint $\exists c \in (x_1, x_2)$ olyan, hogy

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c) = 0,$$

azaz $f(x_1) = f(x_2)$. □

6.37. *Megjegyzés.* A tétel intervallumon differenciálható függvényről szól. Például az $f : (0,1) \cup (2,3) \to \mathbb{R}$

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 2, & \text{ha } 2 < x < 3 \end{cases}$$

függvényre $\forall x \in (0,1) \cup (2,3)$ esetén $f'(x) = 0$, de a függvény mégsem konstansfüggvény.

6.38. *Megjegyzés.* Ha $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetszőleges differenciálható függvény, akkor a 6.34 Lagrange-féle középértéktétel alapján minden $x, y \in \mathcal{D}(f)$, $x < y$ esetén létezik olyan $c = c(x,y) \in [x,y]$, melyre

$$f(y) - f(x) = f'(c) \cdot (y - x).$$

Így

$$|f(y) - f(x)| \leq \sup |f'| \cdot |y - x|, \quad x, y \in \mathcal{D}(f),$$

amit szokás *Lagrange-egyenlőtlenség*nek is nevezni. Legyen most $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonosan differenciálható, $[a,b] \subset \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Ekkor az f' folytonossága (és a 4.56 Tétel) miatt ebből kapjuk, hogy $x, y \in [a,b]$ esetén

$$|f(y) - f(x)| \leq \max_{[a,b]} |f'| \cdot |y - x|,$$

vagyis $f\,|_{[a,b]}$ Lipschitz-tulajdonságú $L := \max_{[a,b]} |f'| \in \mathbb{R}$ konstanssal.

A következő tétel a Lagrange-féle középértéktétel általánosításának tekinthető, azonban nem rendelkezik hasonlóan szemléletes jelentéssel.

6.39. Tétel (Cauchy-féle középértéktétel)**.** *Legyen* $f, g \in C[a,b]$, $f, g \in D(a,b)$, *és tegyük fel, hogy* $\forall x \in (a,b)$ *esetén* $g'(x) \neq 0$. *Ekkor* $\exists c \in (a,b)$ *olyan, hogy*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Bizonyítás. Ha $g(b) = g(a)$ lenne, akkor Rolle tétele miatt g' az (a,b) intervallum valamelyik pontjában 0 lenne, de ezt kizártuk. Így beszélhetünk az $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ hányadosról. Tekintsük most a

$$h : [a,b] \to \mathbb{R},\ h(x) := f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(x)-g(a)) + f(a)\right)$$

függvényt! (Ez a Lagrange-féle középértéktétel bizonyításában szereplő h függvény általánosítása.) Könnyű ellenőrizni, hogy $h(a) = h(b) = 0$. Továbbá $h \in C[a,b]$ és $h \in D(a,b)$. Így a Rolle-tétel szerint $\exists c \in (a,b)$ olyan, hogy $h'(c) = 0$. Mivel $h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(x)$ $(x \in (a,b))$, ezért

$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(c),$$

amiből $g'(c) \neq 0$ miatt

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

következik. □

Az alábbi állítás arról szól, hogy egy intervallumon értelmezett függvény deriváltfüggvényének értékkészlete nem „hagy ki” intervallumot. Így például az $f(x) = [x]$ egészrész függvény nem deriváltfüggvény $\mathbb{R}$-en.

6.40. Tétel (Darboux-tétel)**.** *Legyen I nyílt intervallum,* $f \in D(I)$. *Ekkor az f' deriválfüggvény* Darboux-tulajdonságú*, vagyis bármely* $a, b \in I$, $a < b$ *esetén ha*

$$f'(a) < u < f'(b) \quad (\textit{vagy } f'(b) < u < f'(a)),$$

akkor létezik $c \in (a,b)$, *melyre* $f'(c) = u$.

Bizonyítás. Legyen $[a, b] \subset I$. Tegyük fel, hogy $f'(a) < u < f'(b)$. Tekintsük a

$$g : I \to \mathbb{R},\ g(x) = f(x) - u \cdot x$$

függvényt! Nyilván $g \in C[a, b]$, ezért a Weierstrass-tétel szerint a g-nek van minimuma és van maximuma is az $[a, b]$ intervallumon. Megmutatjuk, hogy g-nek sem az a-ban, sem b-ben nincs minimuma. Ugyanis $g'(x) = f'(x) - u$, és

$$g'(a) = f'(a) - u < 0, \text{ ezért } g \text{ szigorúan lokálisan fogyó } a\text{-ban},$$
$$g'(b) = f'(b) - u > 0, \text{ ezért } g \text{ szigorúan lokálisan nő } b\text{-ben}.$$

Ez azt jelenti, hogy g-nek az $[a, b]$ intervallum belsejében van a minimuma, azaz $\exists c \in (a, b)$, hogy g-nek c-ben lokális szélsőértéke van. Ekkor a 6.30 Tétel szerint $g'(c) = f'(c) - u = 0$, azaz $f'(c) = u$. □

6.7. A monotonitás szükséges és elégséges feltételei

A függvények monotonitása „globális" fogalom, ld. a 2.7 Definíciót. Ebben a szakaszban azt vizsgáljuk, hogy (nyílt) intervallumon értelmezett differenciálható függvények monotonitása hogyan függ össze a derivált tulajdonságaival.

6.41. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f \in D(I)$, és $\forall x \in I$ esetén $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$). Ekkor f szigorúan monoton növő (fogyó) az I intervallumon.*

Bizonyítás. Legyen $x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2$. A 6.34 Lagrange-féle középértéktétel szerint $\exists c \in (x_1, x_2)$ olyan, hogy

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c).$$

Ha $f'(c) > 0$, akkor $x_2 - x_1 > 0$ miatt $f(x_2) - f(x_1) > 0$, azaz $f(x_1) < f(x_2)$.
(Ha $f'(c) < 0$, akkor $x_2 - x_1 > 0$ miatt $f(x_2) - f(x_1) < 0$, azaz $f(x_1) > f(x_2)$.) □

A fenti tétel csak elégséges feltételt ad differenciálható függvény szigorú monotonitására.

6.42. Példa. Tekintsük ismét az $f(x) = x^3$ hozzárendeléssel adott függvényt! Világos, hogy f szigorúan monoton növő $\mathbb{R}$-en, mégis $f'(0) = 0$.

Függvény (nem feltétlenül szigorú) monotonitására az alábbi szükséges és elégséges feltétel adható.

6.43. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f \in D(I)$. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

1. f monoton növő (fogyó) I-n;

2. minden $x \in I$ esetén $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$).

Bizonyítás. 1. $\Rightarrow$ 2. : Ha f monoton növő I-n, akkor tetszőleges $t, x \in I$, $t \neq x$ esetén

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \geq 0.$$

Ezért bármely $x \in I$ pontra

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \geq 0.$$

A monoton fogyó eset hasonlóan látható.
2. $\Rightarrow$ 1. : Az előző tétel bizonyításával analóg módon igazolható a 6.34 Lagrange-féle középértéktétel segítségével. □

A 6.43 Tétel és a korábban bizonyított 6.36 Állítás alapján a függvény szigorú monotonitására is adható szükséges és elégséges feltétel.

6.44. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f \in D(I)$. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

1. f szigorúan monoton növő (fogyó) I-n;

2. minden $x \in I$ esetén $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) és nincs olyan részintervalluma I-nek, melyen $f' = 0$ lenne.

Bizonyítás. A 6.43 Tételből és a 6.36 Állításból következik, a részleteket az olvasóra bízzuk. □

6.45. Definíció. Legyen $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(g)$. Ha létezik $\delta > 0$, hogy $g(a) = 0$, $g|_{(a-\delta,a)} \geq 0$ és $g|_{(a,a+\delta)} \leq 0$ vagy fordítva, akkor azt mondjuk, hogy g *előjelet vált a-ban.* Ekvivalensen: g előjelet vált a-ban, ha $g(a) = 0$ és g lokálisan növő vagy fogyó a 0-ban.

6.46. Állítás. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f \in D(I)$ és $a \in I$. Ha f' előjelet vált a-ban, akkor f-nek lokális szélsőértéke van a-ban. Mégpedig, ha létezik $\delta > 0$, hogy $f'|_{(a-\delta,a)} \geq 0$ és $f'|_{(a,a+\delta)} \leq 0$, akkor az a pont lokális maximumhely, ha $f'|_{(a-\delta,a)} \leq 0$ és $f'|_{(a,a+\delta)} \geq 0$, akkor az a pont lokális minimumhely.*

Bizonyítás. A 6.43 Tételből adódik. □

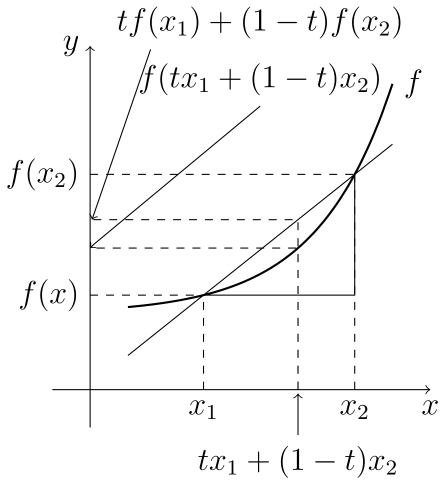
Az utóbbi állításhoz hasonló módon fogalmazható meg intervallumon differenciálható függvény szigorú lokális szélsőértékhelyére vonatkozó szükséges és elégséges feltétel – ezt az olvasóra bízzuk.

6.8. Konvex és konkáv függvények

6.47. Definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f *konvex függvény*, ha minden $x_1, x_2 \in I$ és minden $t \in [0,1]$ esetén

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq t \cdot f(x_1) + (1-t) \cdot f(x_2).$$

Vagyis f pontosan akkor konvex, ha grafikonjának bármely két pontját összekötő szakasz a grafikon felett helyezkedik el (ld. a 6.8 ábrát). Az f *konkáv függvény*, ha $(-f)$ konvex, azaz az egyenlőtlenségben $\geq$ áll.



6.8. ábra. Függvény konvexitása

6.48. *Megjegyzés.* Azt mondjuk, hogy f kielégíti a *Jensen-egyenlőtlenséget* I-n, ha

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \quad \forall x_1, x_2 \in I.$$

Igazolható (nem könnyű!), hogy ha f kielégíti a Jensen-egyenlőtlenséget és folytonos I-n, akkor konvex I-n!

6.49. Definíció. Tetszőleges $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(f)$ esetén jelölje

$$\ell_{x_1,x_2}(x) := f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.8}$$

Az ℓ_{x_1,x_2} függvény grafikonja éppen az $(x_1, f(x_1))$ és $(x_2, f(x_2))$ pontokon átmenő egyenes (az f egy *szelője*).

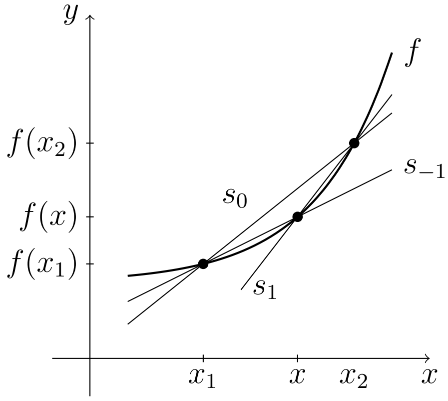
A (6.8) jelöléssel világos, hogy f konvexitása éppen azt jelenti, hogy tetszőleges $x_1, x_2 \in I$ esetén

$$f(x) \leq \ell_{x_1,x_2}(x), \quad \forall x \in [x_1, x_2] \ (x \in [x_2, x_1]). \tag{6.9}$$

6.50. Tétel. *Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f \in D(I)$. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:*

1. *f konvex (konkáv) I-n;*
2. *f' monoton növő (fogyó) I-n.*

Bizonyítás. 1. $\Rightarrow$ 2. : Legyen $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ tetszőleges. A megfelelő szelők me-



6.9. ábra. Konvex függvény szelői

redekségeiről könnyen látható (ld. a (6.9) egyenlőtlenség átrendezését, ill. a 6.9. ábrát), hogy

$$s_{-1} = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq s_0 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq s_1 = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \quad x \in (x_1, x_2).$$

Ebből $x \to x_1$, ill. $x \to x_2$ határátmenet után kapjuk, hogy

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2), \tag{6.10}$$

amiből $f'(x_1) \leq f'(x_2)$,tehát f' monoton növő.

2. $\Rightarrow$ 1. : Tegyük fel, hogy f' monoton növő, és rögzítsük az $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ pontokat! Legyen $x \in (x_1, x_2)$ tetszőleges. A 6.34 Lagrange-féle középértéktétel alapján létezik olyan $u \in (x_1, x)$ és $v \in (x, x_2)$, melyre

$$f'(u) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}, \quad f'(v) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Felhasználva f' monotonitását, kapjuk, hogy $f'(u) \leq f'(v)$, vagyis

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Ezt az összefüggést átrendezve, éppen a (6.9) egyenlőtlenséget kapjuk. Mivel x_1 és x_2 tetszőleges volt, ebből adódik f konvexitása. □

6.51. *Megjegyzés.* A (6.10) egyenlőtlenségek átrendezésével könnyen adódik az is, hogy a fenti feltételek bármelyike ekvivalens azzal, hogy az f függvény érintője minden pontban a függvény grafikonján vagy alatta helyezkedik el.

6.52. *Megjegyzés.* Meggondolható (nem könnyű), hogy ha f konvex az I *nyílt* intervallumon, akkor folytonos is I-n, továbbá a 4.39 Megjegyzés alapján megszámlálható sok pont kivételével differenciálható I-ben.

6.53. Definíció. Legyen I nyílt intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy f *kétszer differenciálható* az $a \in I$ pontban, ha f differenciálható az a egy környezetében és az ott létező f' deriváltfüggvény differenciálható a-ban – vagyis $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f')$ és f' differenciálható a-ban. Az f *kétszer differenciálható* az I intervallumon, ha $f \in D(I)$ és $f' \in D(I)$. Jele: $f \in D^2(I)$.

6.54. Tétel. *Legyen $f \in D^2(I)$. Ekkor ekvivalensek:*

1. *f konvex (konkáv) I-n;*

2. *$\forall x \in I$ esetén $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$).*

Bizonyítás. A 6.43 és a 6.50 Tételből következik. □

6.55. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Tegyük fel, hogy f differenciálható a-ban. Azt mondjuk, hogy az a pont az f függvénynek *inflexiós pontja* (vagy f-nek *inflexiója* van a-ban), ha létezik $\delta > 0$ olyan, hogy $f|_{(a-\delta,a]}$ konvex és $f|_{[a,a+\delta)}$ konkáv, vagy fordítva. Vagyis röviden, ha f differenciálható a-ban és f az a-ban *konvexitást vált.*

6.56. *Megjegyzés.* Sok tankönyvben a fenti definíció helyett az áll, hogy az a pont inflexiós pontja f-nek, ha f differenciálható a-ban, és a függvény grafikonja az a pont előtt és után a pontbeli érintő ellentétes oldalán helyezkedik el. Könnyen meggondolható, hogy az általunk kimondott definíció ennek egy speciális esete.

6.57. Tétel. *Legyen $f \in D(I)$ és f kétszer differenciálható az $a \in I$ pontban. Ha az a pont az f függvénynek inflexiós pontja, akkor $f''(a) = 0$.*

Bizonyítás. Az inflexiós pont definíciója és a 6.50 Tétel alapján létezik $\delta > 0$ olyan, hogy $f'|_{(a-\delta,a]}$ monoton növő és $f'|_{[a,a+\delta)}$ monoton fogyó, vagy fordítva. Így az f' függvénynek az a pontban lokális szélsőértéke van, a 6.30 Tétel miatt pedig ebből következik, hogy $f''(a) = 0$. □

6.58. Tétel. *Legyen $f \in D^2(I)$, $a \in I$. Ekkor ekvivalensek:*

1. *f-nek az a pont inflexiós pontja;*

2. *f'' előjelet vált a-ban.*

Bizonyítás. A definíciók, valamit a 6.57 és a 6.54 Tételek következménye. □

Megjegyezzük, hogy ha az f függvény egy I intervallumon elsőfokú polinom, azaz $\exists A, B \in \mathbb{R}$ olyan, hogy $\forall x \in I$ esetén $f(x) = Ax + B$, akkor f konvex és konkáv is az I bármely részintervallumán, ezért az I intervallum minden pontjában inflexiója van az f függvénynek.

A második derivált előjele a szélsőértékhely létezésére ad szükséges és elégséges feltételt.

6.59. Tétel. *Legyen $f \in D(I)$ és f kétszer differenciálható az $a \in I$ pontban. Tegyük fel, hogy $f'(a) = 0$. Ha $f''(a) > 0$ ($f''(a) < 0$), akkor f-nek lokális minimuma (maximuma) van a-ban.*

Bizonyítás. Legyen $f''(a) > 0$. A 6.27 Tétel szerint f' szigorúan lokálisan növő a-ban. Mivel $f'(a) = 0$, ezért

$$\exists \delta > 0, \text{ hogy } f'|_{(a-\delta,a)} < 0 \text{ és } f'|_{(a,a+\delta)} > 0.$$

Tehát a 6.41 Tétel miatt f az a ponttól balra szigorúan monoton fogyó, jobbra szigorúan monoton növő, így lokális minimuma van a-ban. Az $f''(a) < 0$ eset hasonlóan meggondolható. □

Hogyan használhatjuk az eddigi eredményeket differenciálható függvények menetének vizsgálatához? Érdemes a gyakorlatokon konkrét feladatok megoldásában végigkövetni az alábbi lépéseket!

1. Kiszámítjuk az f' deriváltfüggvényt.

2. Megkeressük az f' zérushelyeit (illetve azokat a pontokat, ahol f' előjelet válthat).

3. Kiszámítjuk az f'' második deriváltat.

4. Megkeressük az f'' zérushelyeit (illetve azokat a pontokat, ahol f'' előjelet válthat).

5. A függvény értelmezési tartományát az f' és az f'' zérushelyei (illetve lehetséges előjelváltási helyei) nyílt intervallumokra szabdalják. Ezeken az intervallumokon megállapítjuk a deriváltak előjelét, amiből a monotonitási és alaki viszonyokra következtetünk (kétszer folytonosan differenciálható függvény esetén). Áttekinthetővé válik a vizsgálat egy táblázat elkészítésével.

6. A függvény értékét néhány pontban kiszámoljuk. Ha vannak, kiszámoljuk a lokális maximum és minimum értékeit, a függvény határértékét (esetleg jobb oldali és bal oldali határértékét) minden olyan pontban, amely az értelmezési tartomány olyan torlódási pontja, amelyben nincs értelmezve a függvény.

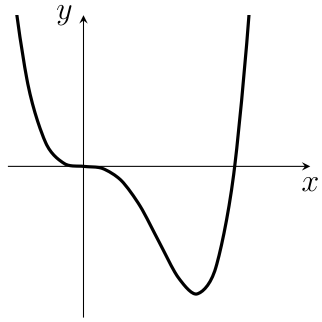
7. Vázoljuk a függvény menetét.

6.60. Példa. Végezzük el az

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=x^4-2x^3$$

függvény teljes vizsgálatát, majd készítsük el vázlatos grafikonját!

$\mathcal{D}(f)=$	$\mathbb{R}$
$\mathcal{R}(f)=$	$[-1,6875,\infty)$
$f'(x)=$	$4x^3-6x^2$
$f''(x)=$	$12x^2-12x$
határértékek:	$\lim_{+\infty} f=\lim_{-\infty} f=+\infty$
monoton nő:	$\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$
monoton fogy:	$\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)$
szélsőérték:	$x=\frac{3}{2}$ abszolút minimum
konvex:	$(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$
konkáv:	$(0,1)$
inflexiós pontok:	$x=0$, $x=1$



6.10. ábra. Az $f(x)=x^4-2x^3$ függvény grafikonja

6.9. Taylor-polinom, Taylor-formula

6.9.1. Motiváció

Láttuk egy függvény első és második deriváltjának szerepét. Ezek általánosításaként vezessük be a magasabb rendű deriváltakat.

6.61. Definíció. Ha f' differenciálható a-ban, akkor $f''(a) := (f')'(a)$.
Ha f'' differenciálható a-ban, akkor $f''' := (f'')'(a)$.
$\vdots$
Ha $f^{(k)}$ differenciálható a-ban, akkor $f^{(k+1)}(a) := (f^{(k)})'(a)$, $k = 1, 2, \ldots$. Ily módon definiálhatók a megfelelő $f^{(k)}$ deriváltfüggvények is, $k = 1, 2, \ldots$
Megjegyezzük, hogy vesszőkkel csak az első három deriváltat szokás jelölni, tehát $f^{(1)} := f'$, $f^{(2)} := f''$, $f^{(3)} := f'''$. Néha az $f^{(0)} := f$ megállapodás is hasznos.
Azt mondjuk, hogy f *akárhányszor differenciálható a-ban* (vagy *végtelen sokszor differenciálható a-ban*), ha minden $k \in \mathbb{N}$ esetén létezik $f^{(k)}(a)$.

Az „elég sima" függvényeket jól közelíthetjük polinomokkal. Azt már láttuk, hogy ha f differenciálható a-ban, akkor a (6.2) egyenletű

$$e_a(x) := f(a) + f'(a) \cdot (x - a) \quad (x \in \mathbb{R})$$

érintőre

$$e_a(a) = f(a),$$

továbbá $e_a'(x) = f'(a)$, így $e_a'(a) = f'(a)$, azaz az e_a-nak és az f-nek az a-beli deriváltja is megegyezik.
Láttuk azt is a (6.4) összefüggésben (Weierstrass differenciálhatóság-fogalma), hogy

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - e_a(x)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - (f(a) + f'(a) \cdot (x - a))}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) = 0,$$

ami azt fejezi ki, hogy az e_a érintőfüggvény olyan közelítése az f függvénynek, hogy ha az $f(x) - e_a(x)$ különbséget $(x - a)$-val elosztjuk, még ez a hányados is 0-hoz közeli, ha x közel van az a-hoz.

Az e_a érintőfüggvény csak egy legfeljebb elsőfokú polinom (egyenes egyenlete). Milyen legyen az a magasabb fokú polinom, amely a még pontosabb közelítést lehetővé teszi?

Legyen $P(x) := 3 - 2x + 4x^2 - 5x^3$. Ekkor $P(0) = 3$.

$$\begin{aligned} P'(x) &= -2 + 8x - 15x^2, & P'(0) &= -2, \\ P''(x) &= 8 - 30x, & P''(0) &= 8, \\ P'''(x) &= -30, & P'''(0) &= -30. \end{aligned}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$P(x) = P(0) + P'(0)x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \frac{P'''(0)}{3!}x^3,$$

azaz egy polinomot igen jól közelítettünk (ebben az esetben pontosan előállítottunk) egy olyan polinommal, amelynek együtthatói a függvény magasabbrendű deriváltjai egy pontban (most ez a pont a 0 volt), elosztva a derivált rendjének faktoriálisaival. Az előállítás tetszőleges polinomra elvégezhető.

6.62. Állítás (Maclaurin-formula)**.** *Legyen p tetszőleges n-edfokú polinom. Ekkor*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(0)}{k!} x^k = p(0) + p'(0)x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Bizonyítás. Legyen $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$. Ekkor p-nek a k-adik deriváltjára

$$p^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^{n} a_j j(j-1)\cdots(j-k+1)x^{j-k},$$

tehát

$$p^{(k)}(0) = a_k \cdot k!,$$

amiből az állítás adódik. □

6.63. Következmény (Taylor-formula)**.** *Legyen p egy n-edfokú polinom, $a \in \mathbb{R}$ tetsző-leges. Ekkor*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = p(a) + p'(a)(x-a) + \frac{p''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Bizonyítás. Az előző bizonyításhoz analóg módon végezhető, az olvasóra bízzuk. □

6.9.2. Taylor-polinom és Taylor-formula

6.64. Definíció. Legyen f az a pontban n-szer differenciálható függvény. Definiálja $T_{n,a} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$T^f_{n,a}(x) = T_{n,a}(x) := f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (6.11)$$

az *f függvény a ponthoz tartozó n-edik (n-edrendű) Taylor-polinomjá*t. A 6.63 Következmény alapján

$$T_{n,a}(a) = f(a),\ T'_{n,a}(a) = f'(a),\ T''_{n,a}(a) = f''(a), \ldots, T^{(n)}_{n,a}(a) = f^{(n)}(a). \quad (6.12)$$

Továbbá, $T_{0,a} = f(a)$ és $T_{1,a} = e_a$.

6.65. *Megjegyzés.* A 6.63 Következményből adódik az is, hogy ha egy legfeljebb n-edfokú p polinomra

$$p(a) = f(a),\ p'(a) = f'(a),\ p''(a) = f''(a), \ldots, p^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

teljesül, akkor $p = T_{n,a}$.

A következő tétel segítségével meg lehet becsülni, hogy az n-ed fokú Taylor-polinom mennyire jól közelíti a függvényt.

6.66. Tétel (Taylor-formula Lagrange-féle maradéktaggal)**.** *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}(f)$. Tegyük fel, hogy $\exists K(a) \subset \mathcal{D}(f)$, hogy az f függvény $n+1$-szer differenciálható $K(a)$-ban. Legyen $x \in K(a)$ tetszőleges. Ekkor létezik olyan $c = c(x)$ az a és az x között, hogy*

$$f(x) = T_{n,a}(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{6.13}$$

Bizonyítás. [4]Legyenek $r, p : K(a) \to \mathbb{R}$ az alábbi módon definiálva:

$$\begin{aligned} r(t) &:= f(t) - T_{n,a}(t), \\ p(t) &:= (t-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

A (6.12) összefüggésből, valamint egyszerű számolással következik, hogy

$$\begin{aligned} r(a) = r'(a) = r''(a) = \cdots = r^{(n)}(a) = 0, \\ p(a) = p'(a) = p''(a) = \cdots = p^{(n)}(a) = 0. \end{aligned}$$

Másrészt $t \neq a$ esetén $p(t) \neq 0$,

$$\begin{aligned} p'(t) &= (n+1) \cdot (t-a)^n \neq 0, \\ p''(t) &= (n+1) \cdot n \cdot (t-a)^{n-1} \neq 0, \\ &\vdots \\ p^{(n)}(t) &= (n+1)! \cdot (t-a) \neq 0, \\ p^{(n+1)}(t) &= (n+1)!. \end{aligned}$$

Legyen $x \in K(a)$ tetszőleges. Tegyük fel, hogy $x > a$. Alkalmazzuk a 6.39 Cauchy-féle középértéktételt az $[a, x]$ intervallumon az r és p függvényekre! Mivel $t \in (a, x)$ esetén $p'(t) \neq 0$, azért $\exists c_1 \in (a, x)$ olyan, hogy

$$\frac{r(x)}{p(x)} = \frac{r(x) - r(a)}{p(x) - p(a)} = \frac{r'(c_1)}{p'(c_1)}. \tag{6.14}$$

Ismét a 6.39 Cauchy-féle középértéktételt alkalmazva az $[a, c_1]$ intervallumon az r' és p' függvényekre azt kapjuk, hogy $\exists c_2 \in (a, c_1)$ olyan, hogy

$$\frac{r'(c_1)}{p'(c_1)} = \frac{r'(c_1) - r'(a)}{p'(c_1) - p'(a)} = \frac{r''(c_2)}{p''(c_2)}. \tag{6.15}$$

[4]Ez a bizonyítás A. L. Cauchy francia matematikustól származik (1821).

Ezt a lépést még $(n-1)$-szer alkalmazva, az utolsó esetben $\exists c_{n+1} \in (a, c_n)$ olyan, hogy

$$\frac{r^{(n)}(c_n)}{p^{(n)}(c_n)} = \frac{r^{(n)}(c_n) - r^{(n)}(a)}{p^{(n)}(c_n) - p^{(n)}(a)} = \frac{r^{(n+1)}(c_{n+1})}{p^{(n+1)}(c_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}. \tag{6.16}$$

(Nyilván $T_{n,a}$ legfeljebb n-edfokú polinom, ezért $T_{n,a}^{(n+1)}$ már azonosan 0.)
Összefoglalva a (6.14)–(6.16) lépéseket:

$$\frac{f(x) - T_{n,a}(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{r(x)}{p(x)} = \frac{r'(c_1)}{p'(c_1)} = \ldots = \frac{r^{(n+1)}(c_{n+1})}{p^{(n+1)}(c_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!},$$

ezért a $c := c_{n+1} \in (a, x)$ választással

$$f(x) - T_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

ami éppen (6.13). □

6.67. Következmény. *Ha a 6.66 Tétel feltételei mellett még azt is feltesszük, hogy $f^{(n+1)}$ korlátos $K(a)$-n, akkor*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Ezt a tényt szokás úgy jelölni, hogy

$$f(x) - T_{n,a}(x) = o((x-a)^n) \text{ „kisordo”.}$$

Bizonyítás. A tétel szerint létezik $c = c(x)$, hogy

$$\frac{f(x) - T_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a) \to 0, \text{ha } x \to a,$$

felhasználva $f^{(n+1)}$ korlátosságát. □

6.68. *Megjegyzés.* Az előbbi következmény akkor is igaz, ha f-ről csak annyit teszünk fel, hogy n-szer differenciálható a-ban.

6.69. Következmény (Taylor-sorok kifejtési tétele)**.** *Legyen $\mathcal{D}(f) = I$ intervallum, f akárhányszor differenciálható az I intervallum belsejében, valamint legyen $a, x \in \operatorname{int} I$ rögzítve. Ha található $K(x) \geq 0$, hogy minden y számra a és x között*

$$\left|f^{(n)}(y)\right| \leq K(x), \qquad n \in \mathbb{N},$$

akkor

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} T_{n,a}(x) = \lim_{n \to \infty} \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Bizonyítás. A feltétel szerint a (6.13) Taylor-formula maradéktagjára minden rögzített x esetén

$$|f(x) - T_{n,a}(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right| \le \frac{K(x)}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \to 0,\ n \to \infty$$

teljesül, felhasználva, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b^n}{n!} = 0$ tetszőleges $b \in \mathbb{R}$ esetén. Ebből az állítás adódik. □

6.70. Definíció. A fenti tételben kapott

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{6.17}$$

végtelen sort az adott f függvény *a pont körüli Taylor-sor*ának nevezzük.

Az előző tételt szavakkal úgy is fogalmazhatjuk, hogy ha f deriváltjai nem nőnek túl gyorsan, akkor f Taylor-sora konvergens és előállítja f-et.
A következőkben megadjuk a legfontosabb elemi függvények Taylor-sorát.

6.71. Tétel. *A következő sorfejtések érvényesek az $a = 0$ pont körül:*

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad -1 < x < 1,$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\mathrm{sh}\ x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x \in \mathbb{R},$$

$$\mathrm{ch}\ x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítás. Az $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ egyenlőség $|x| < 1$ esetén a tanult mértani sorösszegből következik. Másrészt könnyen látható, hogy

$$\left(\frac{1}{1-\mathrm{id}}\right)^{(n)}=\frac{n!}{(1-\mathrm{id})^{n+1}}\Rightarrow\left(\frac{1}{1-\mathrm{id}}\right)^{(n)}(0)=n!,$$

tehát a sor valóban egy (6.17) alakú Taylor-sor.

Ellenőrizzük most az együtthatók helyességét a többi függvény esetén!

$$\begin{aligned}
\exp^{(n)}(0)&=\mathrm{e}^0=1,\\
\sin^{(n)}(0)&=\begin{cases}\sin 0 &=0, \quad n=4k;\\ \cos 0 &=1, \quad n=4k+1;\\ -\sin 0 &=0, \quad n=4k+2;\\ -\cos 0 &=-1, \quad n=4k+3,\end{cases}\\
\cos^{(n)}(0)&=\begin{cases}\cos 0 &=1, \quad n=4k;\\ -\sin 0 &=0, \quad n=4k+1;\\ -\cos 0 &=-1, \quad n=4k+2;\\ \sin 0 &=0, \quad n=4k+3,\end{cases}\\
\mathrm{sh}^{(n)}(0)&=\begin{cases}\mathrm{sh}\ 0=0, & n=2k;\\ \mathrm{ch}\ 0=1, & n=2k+1,\end{cases}\\
\mathrm{ch}^{(n)}(0)&=\begin{cases}\mathrm{ch}\ 0=1, & n=2k;\\ \mathrm{sh}\ 0=0, & n=2k+1.\end{cases}
\end{aligned}$$

Ebből a Taylor-sorok alakja adódik – csak a konvergencia maradt kérdéses. Ennek igazolására a 6.69 Következmény teljesülését fogjuk megmutatni a fenti függvényekre. Legyen $a=0$ és x rögzítve az adott függvények értelmezési tartományából. Ekkor a 0 és x közé eső minden y esetén

$$\begin{aligned}
|\exp^{(n)}(y)|&=\mathrm{e}^y\le\mathrm{e}^{|x|}=:K,\\
|\sin^{(n)}(y)|&\le 1=:K,\\
|\cos^{(n)}(y)|&\le 1=:K,\\
|\mathrm{sh}^{(n)}(y)|&\le\mathrm{ch}(x)=:K,\\
|\mathrm{ch}^{(n)}(y)|&\le\mathrm{ch}(x)=:K.
\end{aligned}$$

□

6.72. *Megjegyzés.* Bizonyítás nélkül megemlítünk néhány további nevezetes Taylor-sorelőállítást.

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \qquad && x\in(-1,1],\\
\operatorname{arctg} x &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad && x\in[-1,1],\\
(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots, && \text{binomiális sor}\\
\binom{\alpha}{k} &:= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.
\end{aligned}$$

Az első két függvényre vonatkozó bizonyítást látni fogjuk a 8.2.1. alszakaszban, a binomiális sor előállítása bonyolultabb technikát kíván.

6.10. L'Hospital-szabály

A L'Hospital-szabály a „$\frac{0}{0}$" és a „$\frac{\infty}{\infty}$" alakú függvényhatárértékek kiszámításához ad segítséget.

6.73. Tétel (L'Hospital-szabály)**.** *Legyen $f,g\in D(\alpha,\beta)$ (ahol $\alpha,\beta=\pm\infty$ is lehet). Legyen $a\in[\alpha,\beta]$. Tegyük fel, hogy*

$$\lim_a f=\lim_a g=0$$

vagy

$$\lim_a g=+\infty \text{ vagy } -\infty,$$

továbbá $g'\neq 0$ az a pont egy kipontozott környezetében.

Ekkor ha létezik $\lim_a \frac{f'}{g'}$, akkor létezik $\lim_a \frac{f}{g}$ is, és

$$\lim_a\frac{f}{g}=\lim_a\frac{f'}{g'}.$$

Bizonyítás. Abban a speciális esetben végezzük el a bizonyítást, amikor $a\in(\alpha,\beta)$, $f(a)=g(a)=0$. Jelölje

$$\lim_a\frac{f'}{g'}=:L\in\overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor a határérték definíciója szerint $\forall\varepsilon>0$ számhoz $\exists\delta>0$, hogy $\forall x\in K_\delta(a)\subset(\alpha,\beta)$, $x\neq a$ esetén

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}\in K_\varepsilon(L).$$

Legyen $x \in K_\delta(a)$ tetszőleges, $x \neq a$. Az f és g függvényekre a 6.39 Cauchy-féle középértéktételt alkalmazva $[a, x]$-en (vagy $[x, a]$-n) kapjuk, hogy $\exists c \in K_\delta(a)$ az a és x között, hogy

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Így

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \in K_\varepsilon(L)$$

is teljesül, amiből a határérték definíciója alapján következik, hogy

$$\lim_a \frac{f}{g} = L.$$

□

6.74. *Megjegyzés.* A L'Hospital-szabály bizonyítása lényeges különbözik a fentitől a $\lim_a g = \pm\infty$ esetben.

6.75. Feladat. A L'Hospital-szabállyal számítsuk ki a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$$

határértéket! Mind a számláló, mind a nevező 0-ban 0, ezért a deriváltak hányadosának a határértékét elég kiszámítani:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{(\cos x - \cos 3x)'}{(x^2)'} &= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + 3\sin 3x}{2x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} + \frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} \\ &= -\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{9}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} = -\frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 4.\end{aligned}$$

Így

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = 4.$$

A deriváltak hányadosának határértékét szintén számolhattuk volna a L'Hospital-szabállyal:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\sin x + 3\sin 3x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + 9\cos 3x}{2} = \frac{-1+9}{2} = 4.$$

Ez az okoskodás azonban „farkába harapó kígyó" jellegű, hiszen a sin deriváltjának meghatározásakor (ld. a 6.4. szakaszt) éppen a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ nevezetes határértéket használtuk fel (amit a 4.7. szakaszban igazoltunk)...

Sajnos, még a L'Hospital szabályok sem tudnak minden „kritikus" határérték-feladatra könnyű választ adni.

6.76. Feladat. Mennyi a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sh}(x+2)}{\operatorname{sh}(x-2)}$$

határérték? Könnyen láthatóan

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{sh}(x+2) = \lim_{x\to\infty} \operatorname{sh}(x-2) = +\infty.$$

Ha a deriváltakat nézzük, akkor

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{ch}(x+2) = \lim_{x\to\infty} \operatorname{ch}(x-2) = +\infty,$$

ha ezek deriváltjait vizsgáljuk, akkor

$$\lim_{x\to\infty} \operatorname{sh}(x+2) = \lim_{x\to\infty} \operatorname{sh}(x-2) = +\infty,$$

és így tovább. Tehát nem kapjuk meg a határértéket a L'Hospital szabály alkalmazásával. Megjegyezzük, hogy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sh}(x+2)}{\operatorname{sh}(x-2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{x+2} - \mathrm{e}^{-(x+2)}}{\mathrm{e}^{x-2} - \mathrm{e}^{-(x-2)}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{2} - \frac{\mathrm{e}^{-2}}{\mathrm{e}^{2x}}}{\mathrm{e}^{-2} - \frac{\mathrm{e}^{2}}{\mathrm{e}^{2x}}} = \mathrm{e}^4,$$

amit akár a deriváltak hányadosainak határértékéből is kiszámíthattuk volna...

7. fejezet

Integrálszámítás

7.1. Riemann-integrál

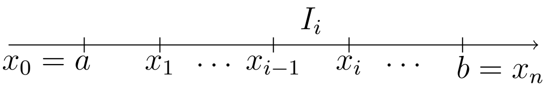
7.1.1. A Riemann-integrál definíciója

A Riemann-integrál lényege: „a függvény grafikonja és a vízszintes tengely által határolt síkidom területe”. Szemléltethetjük egy, a fizikából vett példán is. Legyen egy autó sebességfüggvénye $v(\cdot)$! Kérdés, hogy mekkora utat tesz meg a $t = a$ és $t = b$ időpontok között. A megtett utat közelíthetjük oly módon, hogy az $[a, b]$ időintervallumot részintervallumokra osztjuk fel és feltételezzük, hogy ezeken a kis időintervallumokon egyenletes a mozgás, majd a felosztást minden határon túl finomítjuk. Nézzük most mindezt precízen!

7.1. Definíció. Legyen $[a, b]$ korlátos és zárt intervallum, és válasszunk valamely $n \in \mathbb{N}$ esetén x_i, $i = 0, \ldots, n$ *osztópontok*at az alábbi módon:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_n = b.$$

Az $[a, b]$ intervallum egy *felosztása* a $\Phi = \{I_1, \ldots, I_n\}$ véges intervallumrendszer, ahol $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Az $[a, b]$ intervallum felosztásainak halmazát jelölje $\mathcal{F}[a, b]$.



7.1. ábra. Az $[a, b]$ intervallum egy felosztása

7.2. Definíció. Legyen a $\Phi \in \mathcal{F}[a, b]$ és $\Psi \in \mathcal{F}[a, b]$ felosztások *egyesítése* (vagy *közös finomítása*) az a $\Phi \vee \Psi$-vel jelölt felosztás, melyet úgy kapunk, hogy Φ osztópontjaihoz hozzávesszük a Ψ osztópontjait (vagy fordítva), és az így kapott új osztóponthalmazhoz tartozó intervallumrendszert tekintjük.

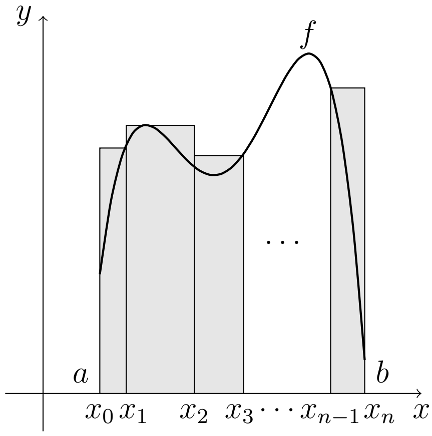
7.3. Definíció. Adott $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és $\Phi = \{I_1, \ldots, I_n\} \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztás esetén definiálja a Φ felosztáshoz tartozó *alsó közelítőösszeget*

$$s_f(\Phi) := \sum_{i=1}^{n} \left(\inf_{I_i} f \right) \cdot |I_i|,$$

felső közelítőösszeget

$$S_f(\Phi) := \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{I_i} f \right) \cdot |I_i|,$$

ahol $|I_i| := x_i - x_{i-1}$ az I_i intervallum hossza.



7.2. ábra. Felső közelítőösszeg

7.4. Állítás. *Tetszőleges* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *korlátos függvény és* $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ *esetén*

$$S_f(\Phi) = -s_{-f}(\Phi).$$

Bizonyítás. $\sup_{I_i} f = -\inf_{I_i}(-f)$. $\square$

7.5. *Megjegyzés.* Világos, hogy tetszőleges $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény és $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ esetén

$$s_f(\Phi) \le S_f(\Phi),$$

hiszen minden i esetén $\inf_{I_i} f \le \sup_{I_i} f$.

7.6. Tétel. *Legyen* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *korlátos függvény. Ekkor bármely* $\Phi, \Psi \in \mathcal{F}[a,b]$ *felosztások esetén*

$$s_f(\Phi) \le S_f(\Psi). \tag{7.1}$$

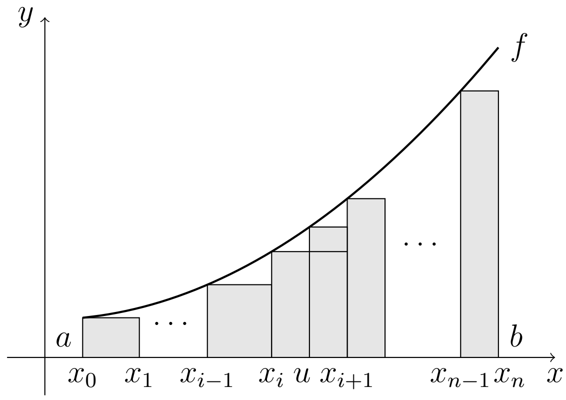
Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy bármely $\Phi, \Psi \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztások esetén

$$s_f(\Phi) \leq s_f(\Phi \vee \Psi) \leq S_f(\Phi \vee \Psi) \leq S_f(\Psi), \tag{7.2}$$

amiből (7.1) nyilván következik. A második egyenlőtlenség a 7.5 Megjegyzés alapján nyilvánvaló. A következőkben azt bizonyítjuk, hogy ha $\Theta \in \mathcal{F}[a,b]$ olyan felosztás, melyet Φ-ből úgy nyerünk, hogy *egy* új osztópontot hozzáveszünk, akkor

$$s_f(\Phi) \leq s_f(\Theta). \tag{7.3}$$

Ebből az osztópontok számára vonatkozó teljes indukcióval következik az első egyenlőt-



7.3. ábra. Új osztópont hozzávétele

lenség a (7.2) sorozatban. A harmadik egyenlőtlenség bizonyításához pedig alkalmazzuk ezt f helyett a $(-f)$ függvényre, és használjuk fel a 7.4 Állítást, amiből

$$S_f(\Phi \vee \Psi) \leq S_f(\Psi) \iff s_{-f}(\Phi \vee \Psi) \geq s_{-f}(\Psi).$$

Legyen tehát $\Theta \in \mathcal{F}[a,b]$ olyan felosztás, melyet Φ-ből úgy nyerünk, hogy annak x_i és x_{i+1} osztópontjai közé felveszünk még egy u osztópontot, vagyis Θ osztópontjai

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < u < x_{i+1} < \cdots < x_n = b.$$

A (7.3) egyenlőtlenség két oldaláról az azonos tagokat elhagyva azt kell belátnunk, hogy

$$\left(\inf_{[x_i,x_{i+1}]} f\right) \cdot (x_{i+1} - x_i) \leq \left(\inf_{[x_i,u]} f\right) \cdot (u - x_i) + \left(\inf_{[u,x_{i+1}]} f\right) \cdot (x_{i+1} - u).$$

Mivel $\inf_{[x_i,x_{i+1}]} f \leq \inf_{[x_i,u]} f$ és $\inf_{[x_i,x_{i+1}]} f \leq \inf_{[u,x_{i+1}]} f$ (szűkebb halmazon vett infimum nagyobb vagy egyenlő, mint a bővebb halmazon vett), ezért

$$\left(\inf_{[x_i,u]} f\right)\cdot(u-x_i)+\left(\inf_{[u,x_{i+1}]} f\right)\cdot(x_{i+1}-u)\geq\left(\inf_{[x_i,x_{i+1}]} f\right)\cdot((u-x_i)+(x_{i+1}-u))$$
$$=\left(\inf_{[x_i,x_{i+1}]} f\right)\cdot(x_{i+1}-x_i),$$

így az állítást beláttuk. □

7.7. Következmény. *Az*

$$\{s_f(\Phi):\Phi\in\mathcal{F}[a,b]\}\ \text{ és }\ \{S_f(\Phi):\Phi\in\mathcal{F}[a,b]\}$$

halmazok közül a bal oldali halmaz minden eleme *kisebb vagy egyenlő a jobb oldali halmaz* minden eleménél. *Ebből az is következik, hogy az első halmaz felülről, a második alulról korlátos. Természetesen, az első halmaz alulról, a második pedig felülről is korlátos (tehát mindkettő korlátos), hiszen*

$$(\inf_{[a,b]} f)\cdot(b-a)f\leq s_f(\Phi)\leq S_f(\Phi)\leq(\sup_{[a,b]} f)\cdot(b-a)$$

minden $\Phi\in\mathcal{F}[a,b]$ esetén.

7.8. Definíció. Definiálja az $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ korlátos függvény *alsó Riemann-integrálját*

$$\underline{\int_a^b} f:=\sup\left\{s_f(\Phi):\Phi\in\mathcal{F}[a,b]\right\}, \tag{7.4}$$

és *felső Riemann-integrálját*

$$\overline{\int_a^b} f:=\inf\left\{S_f(\Phi):\Phi\in\mathcal{F}[a,b]\right\}. \tag{7.5}$$

A 7.7 Következmény alapján

$$\underline{\int_a^b} f\leq\overline{\int_a^b} f. \tag{7.6}$$

7.9. Definíció. Egy korlátos $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ függvényt *Riemann-integrálható*nak mondunk, ha

$$\underline{\int_a^b} f=\overline{\int_a^b} f.$$

Ha f Riemann-integrálható, akkor az alsó és felső Riemann-integrálok közös értékét f *Riemann-integráljának* nevezzük, és az alábbi módon jelöljük:

$$\int_a^b f \ \text{vagy}\ \int_a^b f(x)\,dx.$$

7.10. Feladat. Igazoljuk, hogy a Dirichlet-függvény nem Riemann-integrálható $[0, 1]$-en!

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy bármely $\Phi \in \mathcal{F}[0, 1]$ esetén

$$s_D(\Phi) = 0 \text{ és } S_D(\Phi) = 1,$$

tehát

$$\underline{\int_0^1} D < \overline{\int_0^1} D = 1.$$

□

7.11. Feladat. Igazoljuk, hogy az $f(x) = x^2$ függvény Riemann-integrálható $[0, 1]$-en és

$$\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}.$$

Bizonyítás. Rögzített $n \in \mathbb{N}$ esetén legyen a Φ_n felosztás az az intervallumrendszer, amit a

$$\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$$

osztópontok határoznak meg. Ekkor

$$s_f(\Phi_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6n^3},$$

$$S_f(\Phi_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6n^3},$$

tehát $s_f(\Phi_n) \to \frac{1}{3}$ és $S_f(\Phi_n) \to \frac{1}{3}$, ha $n \to \infty$. Ebből könnyen látható, hogy

$$\frac{1}{3} \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq \frac{1}{3}.$$

Tehát $\frac{1}{3} = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$, így f Riemann-integrálható $[0, 1]$-en és Riemann-integrálja $\frac{1}{3}$. □

7.12. Feladat. Igazoljuk, hogy a c-vel jelölt konstans c függvény Riemann-integrálható tetszőleges $[a, b]$-n, és

$$\int_a^b c = c \cdot (b - a).$$

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy tetszőleges $\Phi \in \mathcal{F}[a, b]$ esetén $s_c(\Phi) = S_c(\Phi) = c \cdot (b - a)$, amiből az állítás adódik. □

Világos, hogy kevés, csak nagyon speciális függvénynek tudjuk a fenti módon kiszámítani a Riemann-integrálját. Ezért szükségünk lesz a Riemann-integrálhatóság egy jól használható kritériumára.

A továbbiakban jelölje

$$R[a,b] := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ Riemann-integrálható}\}.$$

A kritérium megfogalmazásához vezessük be egy függvény adott felosztáshoz tartozó oszcillációs összegének fogalmát!

7.13. Definíció. Ha $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$, akkor az

$$\begin{aligned}\Omega_f(\Phi) := S_f(\Phi) - s_f(\Phi) &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f\right)\cdot |I_i| \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sup\{|f(x)-f(y)| : x,y \in I_i\}\right)\cdot |I_i| = \sum_{i=1}^{n}\omega_f(I_i)\cdot |I_i|\end{aligned}$$

számot az f függvény Φ felosztáshoz tartozó *oszcillációs összegé*nek nevezzük, ahol

$$\omega_f(I_i) = \sup_{I_i} f - \inf_{I_i} f = \sup\{f(x)-f(y) : x,y \in I_i\}$$

az f függvény *oszcillációja* az I_i intervallumon.

7.14. Feladat. Az előző definícióban felhasználtuk, hogy tetszőleges f függvény és $A \subset \mathcal{D}(f)$ halmaz esetén

$$\sup_A f - \inf_A f = \sup\{|f(x)-f(y)| : x,y \in A\}.$$

Ennek meggondolását az olvasóra bízzuk.

7.15. Állítás. *Ha $\Phi, \Psi \in \mathcal{F}[a,b]$ tetszőleges felosztások, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor*

$$\Omega_f(\Phi \vee \Psi) \le \Omega_f(\Phi).$$

Bizonyítás. A (7.2) egyelőtlenségből következik. □

7.16. Tétel (Leghasznosabb kritérium Riemann-integrálhatóságra)**.** *Egy korlátos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény pontosan akkor Riemann-integrálható, vagyis $f \in R[a,b]$ pontosan akkor, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\Phi = \Phi(\varepsilon) \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztás, melyre $\Omega_f(\Phi) < \varepsilon$.*

Bizonyítás. 1. irány: Tegyük fel, hogy f Riemann-integrálható, és legyen $\varepsilon > 0$ rögzítve. A 7.9 Definíció szerint tudjuk, hogy

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f.$$

A 7.8 Definíció alapján létezik olyan $\Phi_1 \in \mathcal{F}[a,b]$, hogy

$$s_f(\Phi_1) > \underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2},$$

és létezik $\Phi_2 \in \mathcal{F}[a,b]$, hogy

$$S_f(\Phi_2) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ezekből, a (7.2) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} = \underline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2} < s_f(\Phi_1) \le s_f(\Phi_1 \vee \Phi_2) \le S_f(\Phi_1 \vee \Phi_2) \\ \le S_f(\Phi_2) < \overline{\int_a^b} f + \frac{\varepsilon}{2} = \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

amiből $\Phi := \Phi_1 \vee \Phi_2$ választással

$$\Omega_f(\Phi) = S_f(\Phi) - s_f(\Phi) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} - (\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon.$$

2. irány: Tegyük fel indirekt, hogy a tétel állításában szereplő feltétel teljesül minden pozitív ε-ra, de

$$\underline{\int_a^b} f < \overline{\int_a^b} f.$$

Legyen

$$\varepsilon := \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f > 0,$$

és válasszunk ε-hoz $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztást úgy, hogy $\Omega_f(\Phi) < \varepsilon$. Ekkor

$$s_f(\Phi) \le \underline{\int_a^b} f < \overline{\int_a^b} f \le S_f(\Phi) = s_f(\Phi) + \Omega_f(\Phi) < s_f(\Phi) + \varepsilon.$$

Ebből viszont

$$\varepsilon = s_f(\Phi) + \varepsilon - s_f(\Phi) > \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f,$$

ami ellentmondás. $\square$

Most nézzük meg, mi volt Riemann eredeti definíciója a fenti integrálfogalomra! A definíció bizonyos értelemben hasonlítani fog a fenti „leghasznosabb kritériumhoz”.

Az integrálhatóság Riemann-féle eredeti definíciója

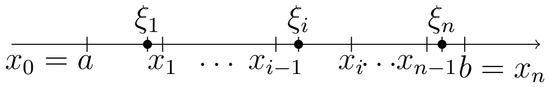
7.17. Definíció. Ha $\Phi = \{I_1, \ldots, I_n\} \in \mathcal{F}[a,b]$ egy felosztás, akkor definiálja Φ *finomságát*

$$|\Phi| := \max\{|I_i| : i = 1, \ldots, n\}.$$

7.18. Definíció. Legyen $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$, $\Phi = \{I_1, \ldots, I_n\}$ felosztás, és $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ tetszőleges, a Φ *felosztásra illeszkedő vektor*, vagyis

$$\xi_i \in I_i,\ i = 1, \ldots, n,$$

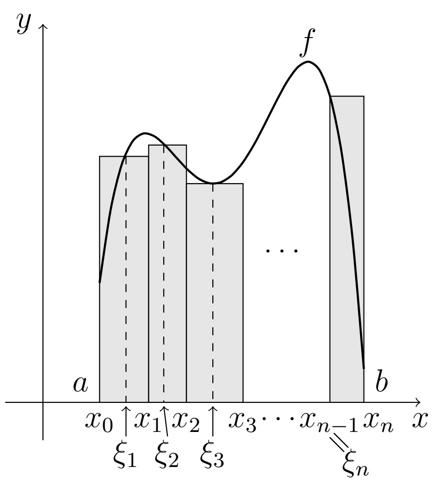
jelölésben: $\xi \propto \Phi$. Ekkor a



7.4. ábra. Felosztásra illeszkedő vektor

$$\sigma_f(\Phi, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot |I_i|$$

számot az f függvény (Φ, ξ) párhoz tartozó *Riemann-összegé*nek nevezzük.



7.5. ábra. Riemann-összeg

7.19. *Megjegyzés.* Tetszőleges $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ és $\xi \propto \Phi$ vektor esetén

$$s_f(\Phi) \le \sigma_f(\Phi,\xi) \le S_f(\Phi).$$

7.20. Definíció (Az integrálhatóság Riemann-féle kritériuma)**.** Legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Ekkor azt mondjuk, hogy f *Riemann-integrálható* $[a,b]$*-n* és $\int_a^b f = A$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$, $|\Phi| < \delta$ felosztás, és minden $\xi \propto \Phi$ esetén

$$|\sigma_f(\Phi,\xi) - A| < \varepsilon.$$

7.21. *Megjegyzés.* A definícióból következik f korlátossága. $[a,b]$-n.

Gondoljuk meg a következőkben, hogy a mi (eredetileg Darboux-tól származó) integrál-definíciónk ekvivalens a Riemann-félével!

Legyen $f \in R[a,b]$ a mi definíciónk alapján és $\int_a^b f = A$. Ekkor definíció szerint

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = A.$$

Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot. A 7.16 Tétel alapján létezik olyan $\Psi = \Psi(\varepsilon) \in \mathcal{F}[a,b]$, melyre

$$\Omega_f(\Psi) = S_f(\Psi) - s_f(\Psi) < \varepsilon.$$

Megmutatjuk, hogy a $\delta := |\Psi|$ jó választás. Legyen $\Phi = \{I_1,\dots,I_n\} \in \mathcal{F}[a,b]$, $|\Phi| < \delta$ és $\xi \propto \Phi$ tetszőleges. A 7.15 Állítás alapján

$$\Omega_f(\Phi) = S_f(\Phi) - s_f(\Phi) < \Omega_f(\Psi) < \varepsilon.$$

Ezért

$$\begin{aligned} A - \varepsilon = \overline{\int_a^b} f - \varepsilon \le S_f(\Phi) - \varepsilon < s_f(\Phi) = \sum_{i=1}^n \inf_{I_i} f \cdot |I_i| \\ \le \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot |I_i| \le \sum_{i=1}^n \sup_{I_i} f \cdot |I_i| = S_f(\Phi) < s_f(\Phi) + \varepsilon \le \underline{\int_a^b} f + \varepsilon = A + \varepsilon. \end{aligned}$$

Ebből

$$A - \varepsilon < \sigma_f(\Phi,\xi) < A + \varepsilon,$$

tehát $|\sigma_f(\Phi,\xi) - A| < \varepsilon$, amit be akartunk látni.

Tegyük fel, hogy a 7.20 Definíció teljesül egy f függvényre és egy $A \in \mathbb{R}$ számra. Megmutatjuk, hogy ekkor

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = A.$$

A bizonyítás úgy fog történni, hogy belátjuk: tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén

$$A - \varepsilon < \underline{\int_a^b} f \text{ és } \overline{\int_a^b} f < A + \varepsilon.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ rögzítve. Válasszunk $\varepsilon/2$-höz $\delta > 0$ számot a Riemann-féle definíció alapján, és legyen $\Phi = \{I_1, \ldots, I_n\}$, $|\Phi| < \delta$ tetszőleges felosztás. Válasszunk $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \propto \Phi$ vektort úgy, hogy

$$f(\xi_i) > \sup_{I_i} f - \frac{\varepsilon}{2(b-a)},\ i = 1, \ldots, n$$

– ilyen $\xi_i \in I_i$ a szuprémum definíciója miatt létezik minden i-re. Ekkor δ választása alapján

$$|\sigma_f(\Phi, \xi) - A| < \frac{\varepsilon}{2},$$

amiből

$$A + \frac{\varepsilon}{2} > \sigma_f(\Phi, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot |I_i| > \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{I_i} f - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right) \cdot |I_i|$$
$$= S_f(\Phi) - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot \sum_{i=1}^{n} |I_i| = S_f(\Phi) - \frac{\varepsilon}{2} \geq \overline{\int_a^b} f - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\overline{\int_a^b} f < A + \varepsilon.$$

Az $A - \varepsilon < \underline{\int_a^b} f$ egyenlőtlenség analóg módon bizonyítható.

7.22. *Megjegyzés.* Néhány további, ekvivalens integrálhatósági kritérium:

1. Minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy minden $\Phi \in \mathcal{F}[a, b]$, $|\Phi| < \delta$ felosztás esetén $\Omega_f(\Phi) < \varepsilon$.

2. Minden $(\Phi_n) \subset \mathcal{F}[a, b]$, $|\Phi_n| \to 0$ felosztássorozatra $\Omega_f(\Phi_n) \to 0$.

3. Létezik olyan $(\Phi_n) \subset \mathcal{F}[a, b]$ felosztássorozat, melyre $\Omega_f(\Phi_n) \to 0$.

A Heine-tétel felhasználásával látható be, hogy minden folytonos függvény Riemann-integrálható.

7.23. Tétel. *$C[a, b] \subset R[a, b]$, vagyis minden, az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvény Riemann-integrálható $[a, b]$-n.*

Bizonyítás. Legyen $f \in C[a,b]$. A 7.16 Tétel integrálhatósági feltételét fogjuk használni, tehát legyen $\varepsilon > 0$ rögzített, és keresünk hozzá olyan $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztást, melyre $\Omega_f(\Phi) < \varepsilon$. A 4.66 Heine-tétel alapján f egyenletesen is folytonos $[a,b]$-n, tehát az $\varepsilon/(b-a)$ pozitív számhoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $t, s \in [a,b]$, $|t-s| < \delta$, akkor $|f(t) - f(s)| < \varepsilon/(2(b-a))$. Válasszunk egy olyan Φ felosztást, melynek finomsága kisebb, mint δ, vagyis $|\Phi| < \delta$. Például, legyen $n \in \mathbb{N}$ olyan, hogy $\frac{b-a}{n} < \delta$ és a Φ felosztás osztópontjait definiálja

$$x_i := a + i \cdot \frac{b-a}{n}, \; i = 0, \dots, n.$$

Ekkor az $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ intervallumban bármely két szám különbsége legfeljebb $\frac{b-a}{n} < \delta$, így itt a függvény oszcillációja

$$\omega_f(I_i) = \sup\{|f(t) - f(s)| : t, s \in I_i\} \leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot (b-a)}.$$

Erre a felosztásra tehát

$$\Omega_f(\Phi) = \sum_{i=1}^{n} \omega_f(I_i) \cdot |I_i| \leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot (b-a)} \cdot \sum_{i=1}^{n} |I_i| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

amivel az állítást beláttuk. □

7.24. *Megjegyzés.* A fenti tétel megfordítása nem igaz! Tehát nem minden Riemann-integrálható függvény folytonos. Könnyen meggondolható, hogy ha egy $[a,b]$-n folytonos függvényt egy pontban „elrontunk” úgy, hogy ott ne legyen folytonos, akkor Riemann-integrálható marad (pl.a 7.16 Leghasznosabb kritérium segítségével meggondolható). Hasonlóan, ha véges sok pontban szakad egy függvény, akkor is Riemann-integrálható.

7.25. Feladat. Igazoljuk, hogy ha $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ olyan korlátos függvény, mely megszámlálhatóan végtelen sok pont kivételével folytonos, akkor f Riemann-integrálható $[a,b]$-n!

7.26. Következmény. *Ha f az $[a,b]$ intervallumon monoton függvény, akkor $f \in R[a,b]$.*

Bizonyítás. A 4.39 Megjegyzésből következik. □

7.27. Tétel. *Ha $f \in R[a,b]$, akkor $|f| \in R[a,b]$.*

Bizonyítás. Legyen $f \in R[a,b]$ és $\varepsilon > 0$ rögzítve. A 7.16 Tétel alapján ε-hoz létezik olyan $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztás, melyre $\Omega_f(\Phi) < \varepsilon$. Megmutatjuk, hogy ekkor $\Omega_{|f|}(\Phi) \leq \Omega_f(\Phi) < \varepsilon$ is teljesül. Mivel adott Φ felosztás esetén

$$\Omega_f(\Phi) = \sum_{i=1}^{n} \omega_f(I_i) \cdot |I_i|,$$

ezért elég belátni, hogy minden i-re

$$\omega_{|f|}(I_i) \leq \omega_f(I_i).$$

A háromszög-egyenlőtlenség miatt tetszőleges $x, y \in I_i$ esetén

$$|f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)| \leq \omega_f(I_i),$$

amiből

$$\omega_{|f|}(I_i) = \sup\{|f(x)| - |f(y)| : x, y \in I_i\} \leq \omega_f(I_i).$$

□

7.28. Állítás. *Legyen $f \in R[a,b]$, $a \leq \alpha < \beta \leq b$. Ekkor $f|_{[\alpha,\beta]} \in R[\alpha,\beta]$.*

Bizonyítás. A 7.16 Tétel szerint minden $\varepsilon > 0$-hoz van olyan $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$, melyre $\Omega_f(\Phi) < \varepsilon$. Vegyük ezen felosztás $[\alpha,\beta]$ intervallumba eső osztópontjait és az így kapott $\Psi \in \mathcal{F}[\alpha,\beta]$ felosztást, ekkor kapjuk, hogy

$$\Omega_{f|_{[\alpha,\beta]}}(\Psi) \leq \Omega_f(\Phi) < \varepsilon.$$

□

7.29. Tétel. *Ha $f, g \in R[a,b]$, akkor $f \cdot g \in R[a,b]$.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzítve, és a 7.16 Tétel alapján keresünk hozzá $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztást. Definiáljuk

$$K := \max\{\sup_{[a,b]} |f|, \sup_{[a,b]} |g|\},$$

és válasszunk $\frac{\varepsilon}{2K}$-hoz $\Phi_f, \Phi_g \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztásokat, melyekre

$$\Omega_f(\Phi_f) < \frac{\varepsilon}{2K} \text{ és } \Omega_g(\Phi_g) < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

(Ha $K = 0$, az érdektelen eset.) Tekintsük ezen felosztások egyesítését:

$$\Phi := \Phi_f \vee \Phi_g.$$

Ekkor a 7.15 Állítás alapján

$$\Omega_f(\Phi) < \frac{\varepsilon}{2K} \text{ és } \Omega_g(\Phi) < \frac{\varepsilon}{2K}$$

is teljesül. Legyen $I_i \in \Phi$, ekkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján minden $x, y \in I_i$ esetén

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &\leq |f(x)||g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)||g(y)| \\ &\leq K \cdot \omega_g(I_i) + \omega_f(I_i) \cdot K = K \cdot (\omega_g(I_i) + \omega_f(I_i)). \end{aligned}$$

Ebből

$$\omega_{f\cdot g}(I_i) = \sup\{|f(x)g(x) - f(y)g(y)| : x, y \in I_i\} \leq K \cdot (\omega_g(I_i) + \omega_f(I_i)) .$$

Összegezve $i = 1, \ldots, n$-re kapjuk

$$\begin{aligned}\Omega_{f\cdot g}(\Phi) &= \sum_{i=1}^{n} \omega_{f\cdot g}(I_i) \cdot |I_i| \leq \sum_{i=1}^{n} K \cdot (\omega_g(I_i) + \omega_f(I_i)) \cdot |I_i| \\ &= K \cdot \Omega_g(\Phi) + K \cdot \Omega_f(\Phi) < K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

7.1.2. A Riemann-integrál tulajdonságai

7.30. Állítás. *$R[a,b]$ vektortér $\mathbb{R}$ felett a szokásos függvényműveletekre nézve. Vagyis ha $f, g \in R[a,b]$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor $f + g, c \cdot f \in R[a,b]$, továbbá*

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g \tag{7.7}$$

és

$$\int_a^b (c \cdot f) = c \int_a^b f. \tag{7.8}$$

Bizonyítás. Legyen $f, g \in R[a,b]$. Megmutatjuk, hogy ekkor $(f + g) \in R[a,b]$, és

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Mivel bármely $I_i \subset [a,b]$ esetén

$$\inf_{I_i} f + \inf_{I_i} g \leq \inf_{I_i}(f + g) \text{ és } \sup_{I_i}(f + g) \leq \sup_{I_i} f + \sup_{I_i} g,$$

ezért tetszőleges $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztásra

$$s_f(\Phi) + s_g(\Phi) \leq s_{f+g}(\Phi) \text{ és } S_{f+g}(\Phi) \leq S_f(\Phi) + S_g(\Phi).$$

Legyenek most $\Phi, \Psi \in \mathcal{F}[a,b]$ tetszőleges felosztások. A fentiekből és a (7.2) egyenlőtlenségekből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}s_f(\Phi) + s_g(\Psi) &\leq s_f(\Phi \vee \Psi) + s_g(\Phi \vee \Psi) \leq s_{f+g}(\Phi \vee \Psi) \leq \\ &\leq S_{f+g}(\Phi \vee \Psi) \leq S_f(\Phi \vee \Psi) + S_g(\Phi \vee \Psi) \leq S_f(\Phi) + S_g(\Psi).\end{aligned}$$

A bal oldalon véve először Φ-ben, majd Ψ-ben supremumot, a jobb oldalon pedig infimumot, kapjuk, hogy

$$\underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g \leq \underline{\int_a^b} (f+g) \leq \overline{\int_a^b} (f+g) \leq \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g.$$

Mivel az egyenlőtlenségsorozat két vége megegyezik, ezért következik, hogy $(f+g) \in R[a,b]$ és (7.7) teljesül.

Legyen most $f \in R[a,b]$ és $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Megmutatjuk, hogy ekkor $(c \cdot f) \in R[a,b]$, és

$$\int_a^b (c \cdot f) = c \int_a^b f.$$

Könnyen látható, hogy tetszőleges $c > 0$, $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ esetén

$$s_{c \cdot f}(\Phi) = c \cdot s_f(\Phi) \text{ és } S_{c \cdot f}(\Phi) = c \cdot S_f(\Phi),$$

amiből az állítás mindkét része adódik. Negatív c esetén

$$s_{c \cdot f}(\Phi) = c \cdot S_f(\Phi) \text{ és } S_{c \cdot f}(\Phi) = c \cdot s_f(\Phi),$$

amiből

$$\begin{aligned} \underline{\int_a^b} (c \cdot f) &= \sup \{ s_{c \cdot f}(\Phi) : \Phi \in \mathcal{F}[a,b] \} = \sup \{ c \cdot S_f(\Phi) : \Phi \in \mathcal{F}[a,b] \} \\ &= c \cdot \inf \{ S_f(\Phi) : \Phi \in \mathcal{F}[a,b] \} = c \cdot \int_a^b f, \end{aligned}$$

és ugyanígy

$$\overline{\int_a^b} (c \cdot f) = c \cdot \int_a^b f.$$

Tehát az állítás ekkor is következik. $\square$

7.31. Állítás (Intervallum szerinti additivitás)**.** *Legyen* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *függvény,* $a < c < b$*. Tegyük fel, hogy* $f|_{[a,c]} \in R[a,c]$ *és* $f|_{[c,b]} \in R[c,b]$*. Ekkor* $f \in R[a,b]$*, és*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \tag{7.9}$$

Bizonyítás. Mivel f korlátos $[a,c]$-n és $[c,b]$-n, ezért korlátos $[a,b]$-n is. Tetszőleges $\Phi_1 \in \mathcal{F}[a,c]$ és $\Phi_2 \in \mathcal{F}[c,b]$ felosztásokat véve, az ezekhez tartozó részintervallumok rendszereinek egyesítéséből kapunk egy $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ felosztást. Könnyen látható, hogy

$$s_{f|_{[a,c]}}(\Phi_1) + s_{f|_{[c,b]}}(\Phi_2) = s_f(\Phi) \leq \underline{\int_a^b} f \text{ és } \overline{\int_a^b} f \leq S_f(\Phi) = S_{f|_{[a,c]}}(\Phi_1) + S_{f|_{[c,b]}}(\Phi_2).$$

Az összes $\Phi_1 \in \mathcal{F}[a,c]$ ill. $\Phi_2 \in \mathcal{F}[c,b]$ felosztásra vett supremumra ill. infimumra kapjuk, hogy

$$\underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f.$$

A feltétel szerint az egyenlőtlenségsorozat két vége megegyezik, amiből $f \in R[a,b]$ és (7.9) adódik. □

7.32. Állítás (Integrandus szerinti monotonitás)**.** *Legyenek $f, g \in R[a,b]$ függvények, és tegyük fel, hogy minden $x \in [a,b]$ esetén $f(x) \leq g(x)$. Ekkor*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy minden $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ esetén

$$s_f(\Phi) \leq s_g(\Phi),$$

amiből

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f \leq \underline{\int_a^b} g = \int_a^b g.$$

□

7.33. Következmény. *Bármely $f \in R[a,b]$ függvényre fennáll, hogy*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Bizonyítás. Minden $x \in [a,b]$ esetén

$$(-|f|)(x) = -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| = |f|(x),$$

amiből az állítás a 7.27 Tétel és a 7.32 Állítás szerint következik. □

7.34. Állítás (Integrál triviális becslése)**.** *Legyen $f \in R[a,b]$. Ekkor*

$$(\inf_{[a,b]} f) \cdot (b-a) \leq \int_a^b f \leq (\sup_{[a,b]} f) \cdot (b-a).$$

Bizonyítás. A bizonyítás azonnal adódik a 7.32 Állításnak az $\inf f$ konstans függvény és f ill. f és a $\sup f$ konstans függvényre való alkalmazásából. Másképp meggondolva: a $\Phi = \{I_1\}$ felosztásra, ahol $I_1 = [a,b]$

$$(\inf_{[a,b]} f) \cdot (b-a) = s_f(\Phi), \quad (\sup_{[a,b]} f) \cdot (b-a) = S_f(\Phi)$$

– az állítás ebből is következik. □

7.35. Következmény. *Legyen* $f \in R[a,b]$. *Ekkor*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq (\sup_{[a,b]} |f|) \cdot (b-a).$$

Bizonyítás. Könnyen látható a 7.33 Következmény és a 7.34 Állítás alapján. □

Ezen becslések segítségével (folytonos függvényekre) bizonyítható a differenciálszámításban megismert középértéktétellel analóg állítás Riemann-integrálra.

7.36. Tétel (Integrálszámítás első középértéktétele)**.** *Legyen* $f \in C[a,b]$. *Ekkor létezik olyan* $c \in [a,b]$, *melyre*

$$\int_a^b f = f(c) \cdot (b-a).$$

Bizonyítás. A 7.34 Állítás alapján és a Weierstrass-tételből kapjuk

$$\min_{[a,b]} f = \inf_{[a,b]} f \leq \frac{\int_a^b f}{b-a} \leq \sup_{[a,b]} f = \max_{[a,b]} f.$$

A Bolzano-tétel miatt van olyan $c \in [a,b]$, melyre

$$f(c) = \frac{\int_a^b f}{b-a},$$

amivel az állítást beláttuk. □

7.2. Primitív függvény

Ebben a szakaszban legyen I nyílt intervallum. Jelölje $C(I)$ az I intervallumon értelmezett folytonos függvények halmazát és $D(I)$ az I intervallumon differenciálható függvények halmazát. Ezek $\mathbb{R}$ felett vektorteret alkotnak. Jelölje $D'(I)$ a $D(I)$-beli függvények deriváltjainak halmazát:

$$D'(I) := \{F' : F \in D(I)\}.$$

7.37. Állítás. $D'(I)$ *vektortér.*

Bizonyítás. Triviálisan következik a 6.14 és a 6.15 Tételekből. □

7.38. *Megjegyzés.* $C(I)$ és $D(I)$ nem csak vektortér, hanem gyűrű, sőt algebra is (a szokásos műveletekkel). $D'(I)$ nem alkot sem gyűrűt sem algebrát (már az sem igaz, hogy ha $f \in D'(I)$, akkor $f^2 \in D'(I)$).

7.39. Definíció. Legyen $f \in D'(I)$ adott függvény, azaz létezik olyan $F \in D(I)$, hogy $F' = f$. Ekkor minden ilyen $F \in D(I)$ függvényt az f függvény *primitív* (elsődleges vagy eredeti) *függvényé*nek vagy *határozatlan integráljá*nak nevezünk. Szokásos szóhasználat még az *antiderivált* is.

7.40. Állítás. *Ha $f \in D'(I)$ és $F \in D(I)$ egy primitív függvénye, akkor bármely c konstansfüggvény esetén*

$$(F + c)' = f,$$

így f-nek végtelen sok primitív függvénye van.

Bizonyítás. Triviális. □

7.41. Állítás. *Ha F az f egy primitív függvénye, akkor f-nek minden más G primitív függvénye előáll $G = F + c$ alakban valamely c konstansfüggvényre.*

Bizonyítás. Az állítás feltételeiből következik, hogy

$$(F - G)' = F' - G' = f - f = 0,$$

vagyis $(F - G)' = 0$ az egész I intervallumon. Ekkor a 6.36 Állítás alapján $F - G$ konstansfüggvény, és ezt akartuk belátni. □

7.42. Definíció. Adott f függvény esetén jelölje

$$\int f$$

(„integrál” f) az f függvény primitív függvényeinek halmazát I-n. Ha $f \notin D'(I)$, akkor $\int f = \emptyset$. Ha $f \in D'(I)$, akkor láttuk, hogy $\int f = \{F+c : c \in \mathbb{R}\}$. Ha nem okoz félreértést, akkor $\int f$ minden elemét is az egyszerűség kedvéért $\int f$-fel jelöljük, tehát

$$\left(\int f\right)' = f.$$

Szokásosak még az $\int f(x)$ és $\int f(x)\,dx$ jelölések is a primitív függvény x pontbeli helyettesítési értékére.

7.43. Példa. Legyen $I = \mathbb{R}$. Ekkor $\int \cos x\,dx = \{\sin x + c :\ c \in \mathbb{R}\}$, amit a megállapodás alapján úgy is írhatunk, hogy $\int \cos = \sin$.

Ha külön nem rögzítjük le az I intervallumot, akkor $\int f$ mindig egy lehető legbővebb intervallumon értendő, ahol f értelmezve van és létezik primitív függvénye (a primitív függvény(ek) megadásánál ez(eke)t az intervallumo(ka)t természetesen specifikálni kell).

*Alapintegrálok*nak nevezzük az elemi függvények deriváltjainak primitív függvényeit. Ezeket az alábbi táblázatban foglaljuk össze. Itt használni fogunk egy kissé pontatlan, de elterjedt jelölést, mely a következőt jelenti. Tekintsük például az $1/\operatorname{id}$ függvényt! Ennek értelmezési tartománya ugyan nem intervallum, de felbomlik két intervallum, az $I_1 = (-\infty, 0)$ és az $I_2 = (0, \infty)$ diszjunkt uniójára. A függvénynek mindkét intervallumon van primitív függvénye:

$$\int \frac{1}{\operatorname{id}} |_{I_1} = \ln(-\operatorname{id}), \quad \int \frac{1}{\operatorname{id}} |_{I_2} = \ln \operatorname{id}.$$

Ezt az egyszerűség kedvéért egy képletben fogjuk jelölni mint

$$\int \frac{1}{\operatorname{id}} = \ln |\operatorname{id}|.$$

Hangsúlyozzuk, hogy a 7.39 Definíció értelmében az $f = \frac{1}{\operatorname{id}}$ függvénynek az *egész* értelmezési tartományán nem értelmezhető primitív függvénye, hiszen $\mathcal{D}(f)$ nem intervallum. Ezért ez az egyenlőség ilyen értelemben megtévesztő. Azonban, az $\frac{1}{\operatorname{id}} |_{I_1}$ és az $\frac{1}{\operatorname{id}} |_{I_2}$ függvényeknek (vagy az $1/\operatorname{id}$ bármely, I_1-nél vagy I_2-nél szűkebb intervallumra való megszorításának) van primitív függvénye, és ezt hivatott kifejezni a fenti képlet. Hasonlóan értelmezendők az $1/(1-\operatorname{id}^2)$ és az $1/\sqrt{\operatorname{id}^2 - 1}$ függvények primitív függvényei.

$$\int \operatorname{id}^\alpha = \frac{\operatorname{id}^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \ (\alpha \neq -1) \qquad \int \frac{1}{\operatorname{id}} = \ln |\operatorname{id}| \qquad \int \exp = \exp$$

$$\int \exp_a = \frac{\exp_a}{\ln a}, \ (1 \neq a \in \mathbb{R}^+) \qquad \int \sin = -\cos \qquad \int \cos = \sin$$

$$\int \frac{1}{\cos^2} = \operatorname{tg} \qquad \int \frac{1}{\sin^2} = -\operatorname{ctg} \qquad \int \operatorname{sh} = \operatorname{ch}$$

$$\int \operatorname{ch} = \operatorname{sh} \qquad \int \frac{1}{\operatorname{sh}^2} = -\operatorname{cth} \qquad \int \frac{1}{\operatorname{ch}^2} = \operatorname{th}$$

$$\int \frac{1}{1-\operatorname{id}^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\operatorname{id}+1}{\operatorname{id}-1} \right| \qquad \int \frac{1}{1+\operatorname{id}^2} = \operatorname{arctg} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{id}^2}} = \arcsin$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{\operatorname{id}^2 - 1}} = \ln \left| \operatorname{id} + \sqrt{\operatorname{id}^2 - 1} \right| \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{id}^2}} = \operatorname{arsh}$$

Probléma. Hogyan lehet felismerni egy $f : I \to \mathbb{R}$ függvényről, hogy van-e primitív függvénye I-ben, vagyis $f \in D'(I)$?
Válasz. Sehogy! De adható szükséges és adható elégséges feltétel.

7.44. Tétel (Szükséges feltétel primitív függvény létezésére)**.** *Ha $f \in D'(I)$, akkor f Darboux-tulajdonságú.*

Bizonyítás. Ld. a 6.40 Tételt: egy függvény deriváltfüggvénye Darboux-tulajdonságú. □

7.45. Tétel (Elegendő feltétel primitív függvény létezésére)**.** *$C(I) \subset D'(I)$, azaz ha f folytonos I-n, akkor f-nek létezik I-ben primitív függvénye.*

Bizonyítás. Később. □

7.46. Példa. Belátható, hogy az alábbi függvényeknek nincs elemi primitív függvénye: $\frac{1}{\ln x}$ és $\frac{\sin x}{x}$ az $I = (1, +\infty)$-en, e^{-x^2} az $I = \mathbb{R}$-en.

A primitívfüggvény-keresés vagy határozatlan integrálás tulajdonképpen egy számolási technika (kalkulusnak is hívják), lényegében a differenciálás műveletének megfordítása (de annál sokkal nehezebb).

7.47. Állítás (Vektortér-tulajdonság)**.**

1. *Ha $f, g \in D'(I)$, akkor $f + g \in D'(I)$, emellett*
$$\int (f+g) = \int f + \int g.$$

2. *Ha $f \in D'(I)$, $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges állandó, akkor $c \cdot f \in D'(I)$ (vektortér-tulajdonság), emellett*
$$\int (c \cdot f) = c \cdot \int f.$$

Bizonyítás. Triviálisan következik a definícióból. □

7.48. Tétel (Parciális integrálás elve)**.** *Legyenek f és g differenciálhatók az I intervallumban, azaz $f, g \in D(I)$, és tegyük fel, hogy $f \cdot g' \in D'(I)$. Ekkor $f' \cdot g \in D'(I)$, és ez utóbbi (egy) primitív függvénye:*
$$\int f' \cdot g = f \cdot g - \int f \cdot g'.$$

Bizonyítás. Kell: $(f \cdot g - \int f \cdot g') \in D(I)$ – ez triviális, és $(f \cdot g - \int f \cdot g')' = f' \cdot g$, mivel
$$\left(f \cdot g - \int f \cdot g'\right)' = f' \cdot g + f \cdot g' - f \cdot g' = f' \cdot g.$$
□

7.49. Feladat. Adjuk meg az ln függvény egy primitív függvényét a parciális integrálás elve segítségével!
$$\int \ln x \, dx = \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{g(x)} \, dx = \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\ln x}_{g(x)} - \int \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)} \, dx = x \cdot \ln x - \int 1 \, dx = x \cdot \ln x - x.$$

7.50. Tétel (Helyettesítéses integrálás elve)**.** *Legyenek I és I^* tetszőleges (nyílt) intervallumok, $f \in D'(I)$, $g \in D(I^*)$ adott függvény, úgy, hogy $\mathcal{R}(g) \subset I$. Ekkor $(f \circ g) \cdot g' \in D'(I^*)$, és*

$$\int (f \circ g) \cdot g' = \left(\int f \right) \circ g.$$

Bizonyítás. Legyen $F := \int f$, tehát $F \in D(I)$ és $F' = f$. Ismeretes, hogy ekkor $F \circ g$ is differenciálható I^*-ban, és

$$(F \circ g)' = (F' \circ g) \cdot g' = (f \circ g) \cdot g'.$$

Így $F \circ g = \left(\int f\right) \circ g = \int (f \circ g) \cdot g'$. □

7.51. *Megjegyzés.* A gyakorlatban $g : I^* \to I$ bijektív függvényt érdemes választani, mert ekkor

$$\int f = \left(\int (f \circ g) \cdot g' \right) \circ g^{-1},$$

vagyis az eredeti primitív függvény meghatározható.

Klasszikus formalizmus.

$$\int f(x)\,dx \,|_{x=g(t)} = \int f\left(g(t)\right) \cdot g'(t)\,dt, \qquad \frac{dx}{dt} = g'(t)$$

7.52. Feladat. Határozzuk meg az $\sqrt{1-x^2}$ függvény (egy) primitív függvényét az $I = (-1, 1)$ intervallumon a helyettesítéses integrálás elve segítségével!

Helyettesítsünk $x := \sin t$-t, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) =: I^*$. Ekkor $\frac{dx}{dt} = \sin' t = \cos t$. Így

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,dx \,|_{x=\sin t} &= \int \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{f(g(t))=\sqrt{\cos^2 t}} \cdot \underbrace{\cos t}_{g'(t)}\,dt = \int |\cos t| \cdot \cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt \\
&= \int \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2t\right)\,dt = \frac{1}{2}\int 1\,dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t\,dt \\
&= \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t = \frac{1}{2}\left(t + \sin t \cdot \cos t\right).
\end{aligned}$$

Ebből

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\left(t + \sin t \cdot \cos t\right)|_{t=\arcsin x} = \frac{1}{2}\left(t + \sin t \cdot \sqrt{1-\sin^2 t}\right)|_{t=\arcsin x} \\
&= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x \cdot \sqrt{1-x^2}\right).
\end{aligned}$$

7.3. Primitív függvény és Riemann-integrál kapcsolata

7.3.1. A Newton–Leibniz-tétel

A következőkben kiderül, hogy mi a primitív függvény és a Riemann-integrál kapcsolata. Ez a XVII-XVIII. században élt Newton és Leibniz munkásságának, egyben a differenciál- és integrálszámításnak legfontosabb eredménye.

7.53. Tétel (Newton–Leibniz-tétel)**.** *Legyen $[a,b] \subset \mathbb{R}$ tetszőleges zárt intervallum, $f \in R[a,b]$. Tegyük fel, hogy létezik olyan $F \in C[a,b],\ F \in D(a,b)$ függvény, melyre $F' = f$ az (a,b)-n (vagyis, F primitív függvénye f-nek (a,b)-n). Ekkor*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) =: [F]_a^b = F|_a^b.$$

Bizonyítás. Legyen $\Phi \in \mathcal{F}[a,b]$ tetszőleges. Ha Φ osztópontjainak halmaza $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, akkor $F|_{[x_{i-1},x_i]}$-re alkalmazva a 6.34 Lagrange-középértéktételt létezik olyan $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, melyre

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Összegezve $i = 1, \ldots, n$-re a következő teleszkopikus összeget kapjuk

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})) &= F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + \cdots + F(x_n) - F(x_{n-1}) \\ &= F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a).\end{aligned}$$

Nyilvánvalóan

$$s_f(\Phi) \le \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(b) - F(a) \le S_f(\Phi),$$

(ahol középen egy Riemann-összeg áll, ld. a 7.18 Definíciót). Mivel $f \in R[a,b]$, ezért a fentiekből kapjuk, hogy

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f \le F(b) - F(a) \le \overline{\int_a^b} f = \int_a^b f,$$

amiből

$$\int_a^b f = F(b) - F(a),$$

és ezt akartuk belátni. □

7.54. *Megjegyzés.* A 7.53 Newton–Leibniz-tétel feltételei közül az $f \in R[a,b]$ nem hagyható el, még korlátos f esetén sem!

A Newton–Leibniz-tétel feltételeit teljesítő függvényekre bizonyíthatók a primitív függvényeknél megismert parciális és helyetettesítéses integrálás szabályai.

7.55. Tétel (Parciális integrálás Riemann-integrálra)**.** *Tegyük fel, hogy az f és g függvények kielégítik a Newton–Leibniz-tétel feltételeit $[a,b]$-n, és legyen (egy) primitív függvényük F, ill. G. Ekkor $f \cdot G$, $F \cdot g \in R[a,b]$, és*

$$\int_a^b f \cdot G = [F \cdot G]_a^b - \int_a^b F \cdot g.$$

Bizonyítás. Mivel F és G differenciálhatók, így folytonosak, tehát Riemann-integrálhatók is $[a,b]$-n, ld. a 7.23 Tételt. A 7.29 Tétel alapján pedig a szorzatok Riemann-integráljai is léteznek. Mivel

$$(F \cdot G)' = f \cdot G + F \cdot g,$$

ezért a 7.53 Newton–Leibniz-tétel alapján

$$\int_a^b (f \cdot G + F \cdot g) = [F \cdot G]_a^b.$$

A 7.30 Állítás szerint a fenti egyenlőség bal oldalára

$$\int_a^b (f \cdot G + F \cdot g) = \int_a^b f \cdot G + \int_a^b F \cdot g,$$

amivel a bizonyítás teljes. □

Jelölés. $f \in R[a,b]$ esetén jelölje

$$\int_b^a f := -\int_a^b f.$$

7.56. Tétel (Helyettesítéses integrálás Riemann-integrálra)**.** *Tegyük fel, hogy f kielégíti a Newton–Leibniz-tétel feltételeit $[a,b]$-n. Legyen továbbá $g : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ differenciálható bijekció, melyre $(f \circ g) \cdot g' \in R[\alpha,\beta]$. Ekkor*

$$\int_a^b f = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} (f \circ g) \cdot g'.$$

Bizonyítás. A feltételekből azonnal következik, hogy g vagy szigorúan monoton növő vagy szigorúan monoton fogyó, tehát $g^{-1}(a) = \alpha$, $g^{-1}(b) = \beta$, vagy fordítva. Mivel f tetszőleges F primitív függvényére

$$(F \circ g)' = (f \circ g) \cdot g',$$

ezért a 7.53 Newton–Leibniz-tétel szerint

$$\int_\alpha^\beta (f\circ g)\cdot g' = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) = \begin{cases} F(b)-F(a), & \text{ha } g \text{ monoton növő;} \\ F(a)-F(b), & \text{ha } g \text{ monoton fogyó.} \end{cases} \tag{7.10}$$

Másrészt, szintén a Newton–Leibniz-tétel alapján

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Ha g monoton növő, a tétel azonnal következik; ha monoton fogyó, a (7.10) egyenlőség mindkét oldalának ellentettjét véve kész a bizonyítás. □

7.3.2. Integrálfüggvények

7.57. Definíció. Legyen I tetszőleges intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ függvény. Azt mondjuk, hogy f *lokálisan integrálható I-n*, ha

$$f|_{[a,b]} \in R[a,b]$$

minden $[a,b] \subset I$ esetén. Az I-n lokálisan integrálható függvények halmazát jelölje $R^{\mathrm{loc}}(I)$.

7.58. *Megjegyzés.* Könnyen látható, hogy ha $I = [a,b]$, akkor $R^{\mathrm{loc}}[a,b] = R[a,b]$.

Egy lokálisan integrálható függvénynek definiálhatjuk az I-n értelmezett ún. integrálfüggvényeit.

7.59. Definíció. Ha $f \in R^{\mathrm{loc}}(I)$, akkor f *integrálfüggvényei* az I-n értelmezett

$$I \ni x \mapsto c + \int_a^x f$$

alakú függvények, ahol $a \in I$, $c \in \mathbb{R}$.

7.60. *Megjegyzés.* Könnyen látható, hogy egy adott f függvény bármely két integrálfüggvénye csak konstansfüggvényben különbözik egymástól. Valóban, ha

$$F_1(x) = c_1 + \int_a^x f, \quad F_2(x) = c_2 + \int_b^x f, \quad x \in I$$

valamely $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ és $a, b \in I$ számokra, akkor

$$(F_2 - F_1)(x) = c_2 - c_1 + \int_b^a f, \quad x \in I$$

konstansfüggvény.

7.61. Tétel. *Legyen I nyílt intervallum, és tegyük fel, hogy $f \in R^{\mathrm{loc}}(I) \cap D'(I)$ – vagyis f kielégíti a Newton–Leibniz-tétel feltételeit tetszőleges $[a, b] \subset I$ esetén. Ekkor f primitív függvényeinek $\int f$ halmaza megegyezik f integrálfüggvényeinek halmazával. Ez azt is jelenti, hogy ekkor f integrálfüggvényei differenciálhatók, és deriváltjuk éppen f.*

Bizonyítás. Legyen F az f egy primitív függvénye I-n, vagyis $F' = f$. Ekkor a 7.53 Newton–Leibniz-tétel szerint bármely $a, x \in I$ esetén

$$\int_a^x f = F(x) - F(a)$$

(a képlet igaz $x < a$ esetén is!), tehát F az f egy integrálfüggvénye $c := F(a)$ választással.

Fordítva, legyen

$$F(x) := c + \int_a^x f, \quad x \in I$$

a f egy integrálfüggvénye. Rögzítsük f egy F_0 primitív függvényét – ez a feltétel alapján létezik. A 7.53 Newton–Leibniz-tétel alapján

$$F(x) - c = \int_a^x f = F_0(x) - F_0(a),$$

amiből $F(x) = F_0(x) + d$, $d = c - F_0(a)$, tehát F is primitív függvénye f-nek. $\square$

Annak idején a 7.45 Tételt, vagyis hogy minden folytonos függvénynek van primitív függvénye, bizonyítás nélkül mondtuk ki. Most elérkeztünk oda, hogy ezt a tételt igazoljuk. Mivel egy I nyílt intervallumon folytonos függvény lokálisan integrálható is (ld. a 7.23 Tételt), a most belátott tétel alapján primitív függvénye csak integrálfüggvénye lehet, és innen a bizonyítás könnyen adódik.

7.62. Tétel. *Legyen I nyílt intervallum, $f \in R^{\mathrm{loc}}(I)$. Ha f folytonos az $u \in I$ helyen, akkor f bármely F integrálfüggvénye differenciálható u-ban, és deriváltja*

$$F'(u) = f(u).$$

Bizonyítás. Legyen

$$F(x) = c + \int_a^x f, \quad x \in I$$

az f egy integrálfüggvénye valamely $a \in I$, $c \in \mathbb{R}$ esetén. Megmutatjuk, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in I$, $|x - u| < \delta$, $x \neq u$, akkor

$$\left| \frac{F(x) - F(u)}{x - u} - f(u) \right| \leq \varepsilon.$$

Ebből már következik, hogy

$$\lim_{x\to u} \frac{F(x)-F(u)}{x-u} = F'(u) = f(u).$$

Mivel f folytonos u-ban, ezért ε-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $x \in I$, $|x-u| < \delta$, akkor $|f(x) - f(u)| < \varepsilon$. Megmutatjuk, hogy ez a δ jó lesz. Legyen $x \in I$, $|x-u| < \delta$, $x \neq u$ rögzítve. A F függvény definíciója és a 7.31 Állítás szerint

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x)-F(u)}{x-u} - f(u)\right| &= \left|\frac{1}{x-u}\int_u^x f(t)\,dt - \frac{1}{x-u}\int_u^x f(u)\,dt\right| \\ &= \left|\frac{1}{x-u}\int_u^x (f(t)-f(u))\,dt\right|.\end{aligned}$$

A 7.35 Következményből kapjuk, hogy

$$\left|\frac{F(x)-F(u)}{x-u} - f(u)\right| \le \sup\{|f(t)-f(u)| : t \in [u,x]\} \le \varepsilon.$$

□

7.63. Következmény. *Ha $f \in C(I)$, akkor f-nek van primitív függvénye I-n, éspedig bármely integrálfüggvénye az.*

Bizonyítás. Ha $f \in C(I)$, akkor $f \in R^{\mathrm{loc}}(I)$, ld. a 7.23 Tételt. Így az előző tétel alapján tetszőleges F integrálfüggvényére $F' = f$ adódik I-n. □

7.4. A Riemann-integrál néhány alkalmazása

A 6.66 Tételben láttuk, hogy egy (elég sokszor differenciálható) függvény és Taylor-polinomjának különbsége az ún. Lagrange-féle maradéktag. Ez a maradéktag ugyanakkor egy Riemann-integrál formájában is felírható. A következő tétel teljes indukcióval igazolható a

$$\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$$

Newton–Leibniz-formulából, de a bizonyítás részleteitől itt eltekintünk.

7.64. Tétel (Taylor-formula integrál-maradéktaggal)**.** *Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}(f)$. Tegyük fel, hogy $\exists K(a) \subset \mathcal{D}(f)$, hogy az f függvény $n{+}1$-szer* folytonosan *differenciálható $K(a)$-ban. Legyen $x \in K(a)$ tetszőleges. Ekkor*

$$f(x) = T_{n,a}(x) + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt,$$

ahol $T_{n,a}$ a (6.11) egyenlőséggel definiált Taylor-polinom.

Alkalmazás. Riemann-integrál alkalmazásával igazolható (itt nem részletezzük) az ún. *Wallis-formula*:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{2\cdot 4\cdots 2n}{1\cdot 3\cdots (2n-1)}\right]^2 \cdot \frac{1}{n}$$

Tegyünk most egy kis kitérőt a *terület* matematikai fogalmához! A terület egy olyan $T : \mathcal{M} \to [0, +\infty)$ függvény, ahol $\mathcal{M}$ a sík mérhető („területtel rendelkező") részhalmazait jelöli, és a következő axiómák teljesülnek:

7.65. Definíció.

1. Ha H téglalap, oldalhosszai a és b, akkor $H \in \mathcal{M}$ és $T(H) = a \cdot b$;
2. Ha $H_1, H_2 \in \mathcal{M}$ és $H_1 \subseteq H_2$, akkor $T(H_1) \le T(H_2)$ (monotonitás);
3. Ha $H_1, H_2 \in \mathcal{M}$, és van olyan e egyenes, hogy az e által határolt félsíkok egyike tartalmazza H_1-et, másika H_2-t, akkor $H_1 \cup H_2 \in \mathcal{M}$ és $T(H_1 \cup H_2) = T(H_1) + T(H_2)$;
4. Ha a sík egy B részhalmaza teljesíti a következő feltételt: minden $\varepsilon > 0$ esetén léteznek olyan $A, C \in \mathcal{M}$ halmazok, hogy $A \subseteq B \subseteq C$ és $T(C) - T(A) < \varepsilon$, akkor $B \in \mathcal{M}$.

7.66. Tétel. *Ha $f \ge 0$ és $f \in R[a,b]$, akkor az*

$$A_f := \{(x, y) : x \in [a, b],\, 0 \le y \le f(x)\}$$

síkidom területe (a 7.65 Definícióban bevezetett területaxiómák alapján) $T(A_f) = \int_a^b f$.

7.67. Definíció. Az $A \subset \mathbb{R}^2$ halmazt *normáltartomány*nak nevezzük, ha

$$A = \{(x, y) : x \in [a, b], f(x) \le y \le g(x)\},$$

ahol $f, g \in R[a, b]$ és $f \le g$ az $[a, b]$-n.

7.68. Tétel. *Az előbbiekben definiált normáltartomány területe*

$$T(A) = \int_a^b (g - f).$$

Az ívhossz fogalmát a 18. fejezetben fogjuk precízen definiálni, és ott igazoljuk az alábbi tételt is.

7.69. Tétel. *Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, akkor az f grafikonjának ívhossza*

$$|\Gamma(f)| = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}.$$

Ebből a tételből gondolható meg az alábbi állítás is.

7.70. Tétel. *Ha $f \geq 0$ és $f \in R[a, b]$, akkor az f*

$$\Gamma(f) := \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$$

grafikonjának az x tengely körüli megforgatásával kapott A forgástest térfogata

$$V(A) = \pi \int_a^b f^2.$$

Ha f folytonosan differenciálható, akkor a kapott forgástest palástjának felszíne

$$F(A) = 2\pi \int_a^b f \cdot \sqrt{1 + (f')^2}.$$

7.5. Improprius integrál

Ki szeretnénk terjeszteni a Riemann-integrál fogalmát nyílt, félig nyílt és nem korlátos intervallumokra, valamint nem korlátos függvényekre. Ehhez szükségünk lesz a 7.57 és a 7.59 Definíciókra.

Jelölés. Jelölje a (nemelfajuló) I intervallum esetén ebben a szakaszban mindenütt a az I bal, b az I jobb végpontját! Ezeket I vagy tartalmazza, vagy nem, továbbá $a, b = \pm\infty$ is lehet.

7.71. Definíció. Legyen I tetszőleges nemelfajuló intervallum, $f : I \to \mathbb{R}$ függvény. Azt mondjuk, hogy f *impropriusan integrálható I-n*, ha $f \in R^{\mathrm{loc}}(I)$ és f-nek létezik olyan F integrálfüggvénye I-n, melyre

$$\exists \lim_{a+0} F \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{és} \quad \exists \lim_{b-0} F \in \overline{\mathbb{R}},$$

és a két határérték nem azonos előjelű végtelen(!). Ekkor f *improprius integrálja I-n*:

$$\int_I f := \int_a^b f = \lim_{b-0} F - \lim_{a+0} F.$$

Ha f impropriusan integrálható és improprius integrálja véges, akkor azt mondjuk, hogy *f improprius integrálja konvergens,* minden más esetben pedig *divergens.*

7.72. *Megjegyzés.* A fenti definíció a 7.60 Megjegyzés alapján független F választásától.

7.73. *Megjegyzés.* Legyen $I = [a, b)$ alakú, ahol $a \in \mathbb{R}$, $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Ha $f \in R^{\mathrm{loc}}(I)$, akkor

$$F(x) := \int_a^x f$$

választással meggondolható, hogy f pontosan akkor impropriusan integrálható I-n, ha az

$$\int_a^b f = \lim_{x \to b-} \int_a^x f$$

határérték létezik.

Hasonlóan, ha $I = (a, b]$ alakú valamely $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R}$ esetén, akkor f pontosan akkor impropriusan integrálható I-n, ha a

$$\int_a^b f = \lim_{x \to a+} \int_x^b f$$

határérték létezik.

7.74. Feladat. Számítsuk ki az $f : I \to \mathbb{R}$, $f(t) = \mathrm{e}^{-t}$ hozzárendeléssel definiált függvény improprius integrálját az $I := [0, +\infty)$ intervallumon!

$$\int_0^{+\infty} f = \lim_{x \to \infty} \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\, dt = \lim_{x \to \infty} \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x = \lim_{x \to \infty} \left(-\mathrm{e}^{-x} + 1\right) = 1.$$

7.75. Feladat. Számítsuk ki az $f : I \to \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ $(\alpha > 0)$ hozzárendeléssel definiált függvények improprius integrálját az $I := [1, +\infty)$ intervallumon!

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt = \lim_{x \to \infty} \int_1^x \frac{1}{t}\, dt = \lim_{x \to \infty} [\ln t]_1^x = \lim_{x \to \infty} \ln x = +\infty$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt = \lim_{x \to \infty} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\, dt = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^x = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1}\right) = \frac{1}{\alpha - 1},$$

$$\alpha > 1$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt = \lim_{x \to \infty} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\, dt = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^x = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1}\right) = +\infty,$$

$$0 < \alpha < 1$$

7.76. Feladat. Számítsuk ki az $f : I \to \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ $(\alpha > 0)$ hozzárendeléssel definiált függvények improprius integrálját az $I := (0, 1]$ intervallumon!

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to 0+}\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to 0+}[\ln t]_x^1 = \lim_{x\to 0+}(-\ln x) = +\infty$$

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \lim_{x\to 0+}\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \lim_{x\to 0+}\left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_x^1 = \lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{-\alpha+1} - \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right) = +\infty,$$

$$\alpha > 1$$

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \lim_{x\to 0+}\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \lim_{x\to 0+}\left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_x^1 = \lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{-\alpha+1} - \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right) = \frac{1}{1-\alpha},$$

$$0 < \alpha < 1$$

Könnyen meggondolható az alábbi.

7.77. Állítás. *Ha az* $\int_a^{+\infty} f$ *improprius integrál konvergens és létezik* $\lim_{+\infty} f$*, akkor szükségképpen* $\lim_{+\infty} f = 0$.

Bizonyítás. Tegyük fel indirekt, hogy $\lim_{+\infty} f = A > 0$ és véges (az $A < 0$ eset hasonlóan meggondolható). Ekkor a határérték definíciója alapján létezik olyan $a < K \in \mathbb{R}$, hogy ha $x > K$, akkor $f(x) > \frac{A}{2}$. Így tetszőleges $x > K$ esetén

$$\int_a^x f = \int_a^K f + \int_K^x f > \int_a^K f + \frac{A}{2}\cdot(x-K) \to \infty, \quad x \to \infty,$$

vagyis $\int_a^{+\infty} f$ nem lehet konvergens, ami ellentmondás.
Ha $\lim_{+\infty} f = +\infty$ volna, akkor tetszőleges $A > 0$ valós számhoz létezik a fenti tulajdonságú K, így az ellentmondás szintén adódik. A $\lim_{+\infty} f = -\infty$ eset hasonlóan meggondolható. □

7.78. Feladat. Adjunk példát olyan f függvényre, melyre $\int_a^{+\infty} f$ improprius integrál konvergens és $\lim_{+\infty} f$ nem létezik!

A következőkben improprius integrálok konvergenciájára vonatkozó feltételekkel foglalkozunk. A gyakorlatban ugyanis gyakran csak a konvergencia meglétére van szükségünk, az integrál pontos értékére – ami általában nehezen is számolható – nem.

Ismételjük át a függvényhatárértékre tanult Cauchy-kritériumot (ld. a 4.12 Tételt)! Ezen tétel segítségével szükséges és elégséges feltételt adhatunk egy improprius integrál konvergenciájára.

7.79. Tétel (Cauchy-féle szükséges és elégséges feltétel improprius integrálhatóságra)**.** *Legyen I nemelfajuló intervallum, $f \in R^{\text{loc}}(I)$. Ekkor f improprius integrálja pontosan akkor konvergens, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén léteznek olyan $\alpha, \beta \in I$, $a < \alpha \le \beta < b$ számok, hogy*

$$\left|\int_u^v f\right| < \varepsilon, \text{ ha } a < u < v < \alpha \text{ vagy } \beta < u < v < b.$$

Bizonyítás. Következik abból, hogy ha F tetszőleges integrálfüggvénye f-nek I-n, akkor

$$\int_u^v f = F(v) - F(u).$$

Alkalmazzuk a 4.12 Tételt F-nek a b-beli bal oldali és a-beli jobb oldali (véges) határértékére! □

7.80. Példa. Mutassuk meg a 7.79 Cauchy-feltétel segítségével, hogy az

$$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

függvény improprius integrálja konvergens!

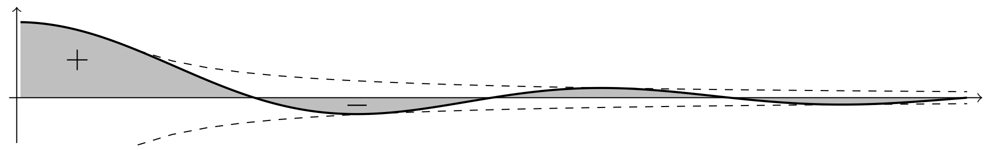
Parciális integrálással kapjuk:

$$\int_u^v \frac{\sin t}{t}\,dt = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_u^v - \int_u^v \frac{\cos t}{t^2}\,dt.$$

Ebből

$$\begin{aligned}
\left|\int_u^v \frac{\sin t}{t}\,dt\right| &= \left|\frac{-\cos v}{v} + \frac{\cos u}{u} - \int_u^v \frac{\cos t}{t^2}\,dt\right| \\
&\le \left|\frac{-\cos v}{v}\right| + \left|\frac{\cos u}{u}\right| + \int_u^v \left|\frac{\cos t}{t^2}\right|\,dt \le \frac{1}{v} + \frac{1}{u} + \int_u^v \frac{1}{t^2}\,dt \\
&\le \frac{1}{v} + \frac{1}{u} + \left[-\frac{1}{t}\right]_u^v = \frac{2}{u} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

ha $\frac{2}{\varepsilon} < u < v$. Másrészt, f-nek van véges határértéke 0-ban ($\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$), így f-et kiterjeszthetjük a $[0, +\infty)$ intervallumra úgy, hogy 0-ban 1-nek definiáljuk és így egy folytonos függvényt kapunk. Ezzel az improprius integrál konvergenciáját beláttuk.



7.6. ábra. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ konvergenciája

7.81. Definíció. Ha az $\int_I |f|$ improprius integrál konvergens, akkor azt mondjuk, hogy $\int_I f$ *abszolút konvergens.*

Most megmutatjuk, hogy az improprius integrál abszolút konvergenciájából következik az eredeti integrál konvergenciája.

7.82. Állítás. *Ha az $\int_I f$ improprius integrál abszolút konvergens, akkor az $\int_I f$ improprius integrál is konvergens.*

Bizonyítás. A feltétel szerint $|f| \in R^{\mathrm{loc}}(I)$, a 7.33 Következmény alapján pedig $f \in R^{\mathrm{loc}}(I)$ is teljesül. Mivel $\int_I |f|$ konvergens, ezért a 7.79 Tétel alapján $\forall \varepsilon > 0$-hoz léteznek olyan $\alpha, \beta \in I$, $a < \alpha \leq \beta < b$ számok, hogy

$$\left| \int_u^v |f| \right| = \int_u^v |f| < \varepsilon, \text{ ha } a < u < v < \alpha \text{ vagy } \beta < u < v < b.$$

Ekkor az $\int_I f$ integrálra is teljesül a Cauchy-kritérium ugyanezen $\alpha, \beta \in I$ számokkal, hiszen

$$\left| \int_u^v f \right| \leq \int_u^v |f| < \varepsilon, \text{ ha } a < u < v < \alpha \text{ vagy } \beta < u < v < b.$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $\int_I f$ konvergens. $\square$

7.83. *Megjegyzés.* Vigyázat! A fenti állítás nem megfordítható. Például, az $\int_0^\infty |\frac{\sin x}{x}| \, dx$ nem konvergens, vagyis a 7.80 Példában szereplő integrál nem abszolút konvergens! A 7.6. ábrán jól látható, hogy az eredeti integrál végessége egy Leibniz-típusú sor (aminek tagjai a váltakozó előjelű területdarabok) összegén múlik.

Most a végtelen numerikus sorokkal kapcsolatban tanult összehasonlító kritérium improprius integrálokra vonatkozó megfelelője következik.

7.84. Tétel (Összehasonlító kritérium)**.** *Legyen $f \in R^{\mathrm{loc}}(I)$. Tegyük fel, hogy létezik olyan $g : I \to \mathbb{R}^+$ függvény, amelynek improprius integrálja konvergens I-n és majorálja f-et, vagyis*

$$|f| \leq g \quad I\text{-n}.$$

Ekkor f improprius integrálja is konvergens.

Bizonyítás. A 7.79 Tétel szerint bármely $\varepsilon > 0$ számhoz léteznek $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a < \alpha \leq \beta < b$ számok, hogy

$$\int_u^v g = \left| \int_u^v g \right| < \varepsilon, \text{ ha } a < u < v < \alpha \text{ vagy } \beta < u < v < b.$$

Ebből a 7.32 Állítás és a 7.33 Következmény alapján

$$\left| \int_u^v f \right| \leq \int_u^v |f| \leq \int_u^v g < \varepsilon, \text{ ha } a < u < v < \alpha \text{ vagy } \beta < u < v < b.$$

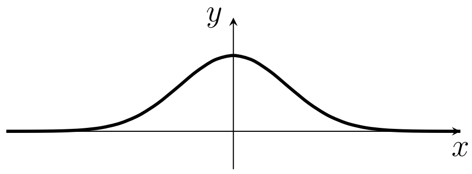
Így az állítás a 7.79 Tételből következik f-re. $\square$

7.85. *Megjegyzés.* Könnyen meggondolható, hogy a 7.84 Tétel akkor is igaz marad, ha az $|f| \leq g$ feltétel csak az a ill. b pont közelében teljesül.

7.86. Feladat. Mutassuk meg a 7.84 Összehasonlító kritérium segítségével, hogy az

$$f : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) := \mathrm{e}^{-x^2}$$

függvény (7.7. ábra) improprius integrálja konvergens!



7.7. ábra. Az $f(x) = e^{-x^2}$ függvény grafikonja („haranggörbe")

$$\forall x \in (-\infty, -1] : \mathrm{e}^{-x^2} \leq \mathrm{e}^{x},\ \forall x \in [1, +\infty) : \mathrm{e}^{-x^2} \leq \mathrm{e}^{-x}$$

Ezért a 7.74 Feladat alapján f improprius integrálja konvergens $(-\infty, +\infty)$-en. Igazolható, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

7.87. Feladat. Szintén a 7.84 Tétel segítségével meggondolható (a részleteket az olvasóra bízzuk), hogy tetszőleges n természetes számra az $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) := x^n \mathrm{e}^{-x}$ függvény improprius integrálja konvergens.

Igazolható, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\int_{0}^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-x}\, dx = n!.$$

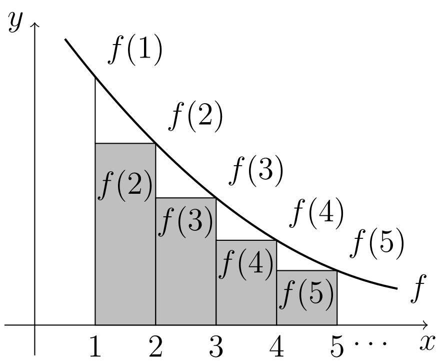
A következőkben azt gondoljuk meg, hogy az improprius integrálhatóság és végtelen sorok konvergenciája hogyan kapcsolható össze.

7.88. Tétel (Végtelen sorok konvergenciájára vonatkozó integrálkritérium)**.** *Legyen $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}^+$ monoton fogyó függvény. Ekkor a*

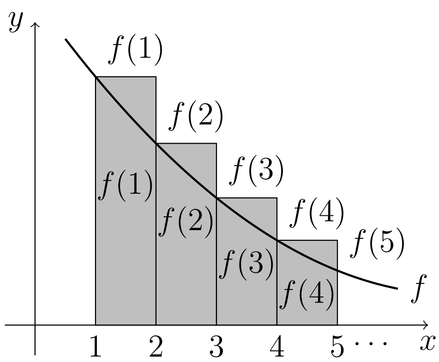
$$\sum f(n) \text{ sor pontosan akkor konvergens, ha a } \int_{1}^{+\infty} f \text{ improprius integrál konvergens.}$$

Bizonyítás. Legyen $S_k := f(1) + \cdots + f(k)$ a $\sum f(n)$ sor k. részletösszege. Tudjuk, hogy a sor pontosan akkor konvergens ill. divergens, ha az (S_k) sorozat konvergens ill. divergens. Ha tekintjük az $[1, k]$ intervallumnak az $1, 2, \ldots, k$ osztópontok által meghatározott Φ felosztását, akkor f monoton fogyását felhasználva könnyen látható, hogy

$$f(1) + s_f(\Phi) = S_k,$$



7.8. ábra. $f(1) + S_f(\Phi) = S_k$



7.9. ábra. $S_f(\Phi) = S_{k-1}$

továbbá

$$S_f(\Phi) = S_{k-1},$$

lásd a 7.8. és a 7.9. ábrákat. Ebből kapjuk, hogy

$$\int_1^{k+1} f \leq S_k \leq f(1) + \int_1^k f.$$

Mivel az $\int_1^x f$ integrálfüggvény monoton növő, ebből az is meggondolható, hogy az $\int_1^{+\infty} f$ pontosan akkor konvergens, ha az $(\int_1^k f)$ sorozat konvergens. Mivel (S_k) és $(\int_1^k f)$ is monoton növő, ezért a fenti egyenlőtlenségsorozatból a tétel állítása következik. □

7.89. Állítás (Hiperharmonikus sor)**.** *A*

$$\sum \frac{1}{n^\alpha}$$

hiperharmonikus sor konvergens, ha $\alpha > 1$ és divergens, ha $\alpha \leq 1$.

Bizonyítás. Alkalmazzuk a 7.88 integrálkritériumot! Mivel $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ pozitív, monoton fogyó tagú, ezért pontosan akkor konvergens, ha az $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}$ integrál konvergens. A bizonyítás adódik a 7.75 Feladatból.

□

Alkalmazás. Improprius integrál alkalmazásával igazolható (itt nem részletezzük) az ún. *Stirling-formula*:

$$n! \sim n^n \cdot \mathrm{e}^{-n} \cdot \sqrt{2\pi n},$$

ahol $\sim$ azt jelenti, hogy a két oldalán álló kifejezést egy-egy sorozat n-edik tagjaként definiálva, a két sorozat hányadosa 1-hez tart, azaz *aszimptotikusan egyenlők.*

8. fejezet

Függvénysorozatok, függvénysorok

8.1. Függvénysorozatok

Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$.

8.1. Definíció. Minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számhoz hozzárendelünk egy $f_n : X \to \mathbb{R}$ függvényt. Az $n \mapsto f_n$ leképezést *függvénysorozat*nak nevezzük. Jelölésben $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vagy (f_n).

8.2. Definíció. Legyenek adva az $f : X \to \mathbb{R}$, $f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ függvények. Azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat az X *halmazon pontonként tart az f függvényhez*, ha minden $x \in X$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} (f_n(x)) = f(x),$$

vagyis az $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat konvergens, és a határértéke az f függvény x helyen felvett értéke. Ekkor az $f : X \to \mathbb{R}$ függvényt az (f_n) függvénysorozat *limeszfüggvényé*nek nevezzük, és a pontonkénti konvergenciát így jelöljük:

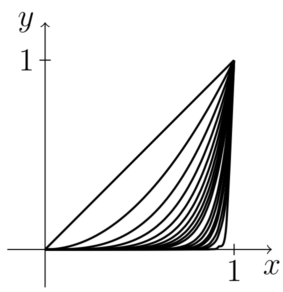
$$f_n \to f.$$

Ha létezik a fenti tulajdonságú f, akkor azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat *pontonként konvergens* X-en.

8.3. *Megjegyzés.* A pontonkénti limeszfüggvény egyértelmű, mivel a sorozathatérték is az.

8.4. Példa. Legyen $X := [0,1]$, $f_n(x) := x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor $f_n \to f$, ahol

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$



8.1. ábra. $f_n(x) = x^n$ konvergenciája

8.5. Definíció. Legyen (f_n) tetszőleges függvénysorozat, $f_n : X \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. E sorozat *konvergenciahalmaza* a

$$\mathrm{KH}(f_n) = \mathrm{KH} = \{x \in X : (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergens}\}.$$

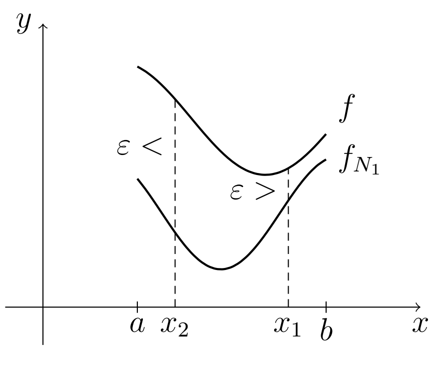
Ha KH $\neq \emptyset$, akkor beszélhetünk limeszfüggvényről, melynek értelmezési tartománya $\mathcal{D}(f) := \mathrm{KH}$, és

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} (f_n(x)), \; x \in \mathrm{KH}.$$

8.6. Példa. Legyen $X := \mathbb{R}$.

1. $f_n(x) := x^n$. Ekkor $\mathrm{KH}(f_n) = (-1, 1]$;
2. $f_n(x) := \frac{\sin nx}{n}$. Ekkor $\mathrm{KH}(f_n) = \mathbb{R}$.

Gondoljuk meg, hogy mit jelent az, hogy (f_n) az X halmazon pontonként tart az f-hez?



8.2. ábra. Pontonkénti konvergencia

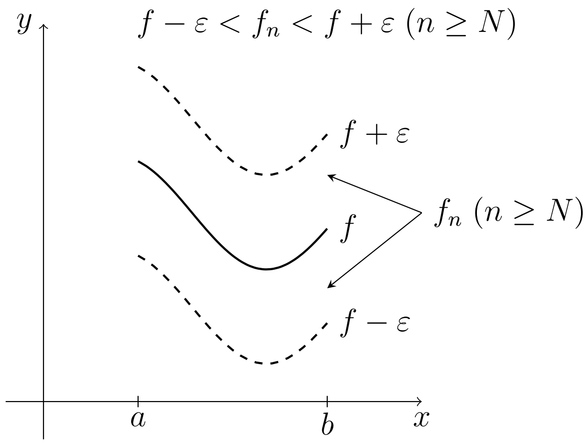
$$\forall x \in X : \lim_{n\to\infty} (f_n(x)) = f(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall x \in X\text{-re } \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists N(\varepsilon, x) = N : \forall n \geq N \text{ esetén } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Előfordulhat tehát, hogy különböző x-ek esetén más-más (egyre nagyobb) küszöbindex található.

A következőkben bevezetünk egy olyan konvergenciafogalmat, ahol a fenti definícióban létező N küszöbindex nem függ x-től (csak ε-tól), vagyis ugyanaz az N jó az egész X halmazon.



8.3. ábra. Egyenletes konvergencia

8.7. Definíció. Legyenek adva az $f : X \to \mathbb{R}$, $f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ függvények. Azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat *egyenletesen tart f-hez az X halmazon*, ha

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists N(\varepsilon) = N : \forall n \geq N \text{ esetén és } \forall x \in X\text{-re } |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

Mivel $\forall x \in X$-re $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$, ezért a fenti definícióval ekvivalens

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists N(\varepsilon) = N : \forall n \geq N \text{ esetén } \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

ami pedig kifejezhető úgy is, mint

$$a_n := \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \to 0, n \to \infty. \tag{8.1}$$

Jelölésben:

$$f_n \hookrightarrow f \quad X\text{-en}.$$

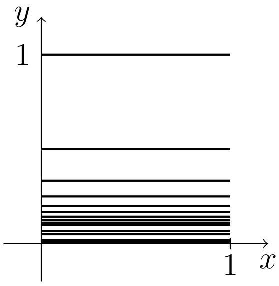
Ha létezik a fenti tulajdonságú f függvény, akkor azt mondjuk, hogy az (f_n) függvénysorozat *egyenletesen konvergens* X-en.

A definícióban szereplő ekvivalens megfogalmazások közül az utolsót, (8.1)-t használjuk a leggyakrabban konkrét függvénysorozatok egyenletes konvergenciájának eldöntésére.

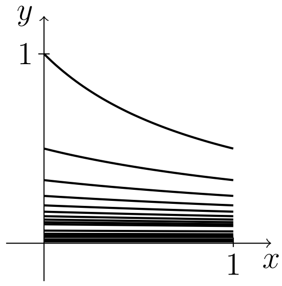
8.8. *Megjegyzés.* Ha $f_n \hookrightarrow f$ az X halmazon, akkor (f_n) pontonként is tart f-hez X-en.

8.9. Példa.

1. $f_n(x) := \frac{1}{n}$, $X := [0,1]$, $f_n \hookrightarrow f \equiv 0$ $[0,1]$-en;
2. $f_n(x) := \frac{1}{x+n}$, $X := [0,1]$, $f_n \hookrightarrow f \equiv 0$ $[0,1]$-en.



8.4. ábra. $f_n(x) = \frac{1}{n}$ konvergenciája

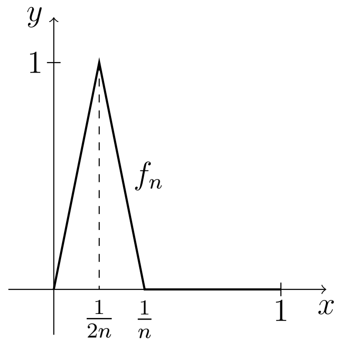


8.5. ábra. $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$ konvergenciája

8.10. Példa.

1. Legyen $X := [0,1]$ és definiáljuk a következő függvénysorozatot („kalapfüggvények" vagy „sátortetőfüggvények"), ld. 8.6. ábra. Mivel minden $x \in [0,1]$ esetén létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $\frac{1}{N} < x$, ezért $f_n(x) = 0$, ha $n \geq N$, tehát $f_n(x) \to 0, n \to \infty$. Így $f_n \to f \equiv 0$ pontonként X-en. Másrészt világos, hogy
$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \nrightarrow 0,$$
ezért (f_n) nem egyenletesen konvergens X-en.

2. Legyen $X := [0,1]$, $f_n(x) := x^n$, $n \in \mathbb{N}$. A 8.4 Példa alapján (f_n) pontonként konvergál X-en a
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$
függvényhez. Másrészt
$$f_n(x) - f(x) = \begin{cases} x^n, & x \in [0,1), \\ 0, & x = 1, \end{cases}$$



8.6. ábra. Sátortető függvények, $f_n \to 0$ pontonként, de f_n nem egyenletesen konvergens

tehát

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \not\to 0.$$

Így (f_n) nem egyenletesen konvergens.

Most bizonyítás nélkül jegyezzük meg, hogy a függvénysorozatok egyenletes konvergenciájának létezik – a számsorozatok konvergenciájához hasonló – Cauchy-féle ekvivalens feltétele.

8.11. Állítás. *Az (f_n) függvénysorozat pontosan akkor egyenletesen konvergens az X halmazon, ha az (f_n) függvénysorozat* egyenletesen Cauchy-tulajdonságú *X-en. Vagyis*

$$\exists f:\ f_n \hookrightarrow f\ X\text{-en} \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N \text{ esetén } \sup_{x\in X} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

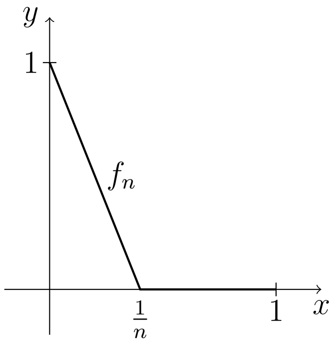
Probléma. Az (f_n) függvénysorozat milyen tulajdonságai öröklődnek át az f limeszfüggvényre?

8.1.1. Folytonosság

Ellenpélda:

8.12. Példa. Tekintsük a 8.7. ábrát. Könnyen látható, hogy $f_n \to f$, az f_n függvények folytonosak minden n esetén, viszont f szakad 0-ban.

8.13. Tétel. *Legyen (f_n) olyan függvénysorozat, melyre az $f_n : X \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) függvények folytonosak valamely $x_0 \in X$ pontban, valamint $f_n \hookrightarrow f$ X-en, vagyis (f_n) egyenletesen tart f-hez X-en. Ekkor f is folytonos x_0-ban.*



8.7. ábra. „Félsátortető” függvények, f_n ($n \in \mathbb{N}$) folytonos, de f nem folytonos

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzítve. Megmutatjuk, hogy van olyan $\delta > 0$ szám, melyre ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. A 8.7 Definíció szerint $\varepsilon/3$-hoz találunk olyan $N \in \mathbb{N}$ küszöbindexet, hogy

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3 \text{ minden } x \in X \text{ esetén, ha } n \geq N.$$

Speciálisan,

$$|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon/3 \text{ minden } x \in X\text{-re.}$$

Mivel f_N folytonos x_0-ban, azért $\varepsilon/3$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy

$$|f_N(x) - f_N(x_0)| < \varepsilon/3, \text{ ha } |x - x_0| < \delta.$$

Megmutatjuk, hogy ez a δ jó f-hez. Legyen x olyan, hogy $|x - x_0| < \delta$. Ekkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x_0)| + |f_N(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

8.14. Következmény. *Legyen (f_n) olyan függvénysorozat, melyre az $f_n : X \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) függvények folytonosak az egész X halmazon, valamint $f_n \hookrightarrow f$ X-en. Ekkor f is folytonos X-en.*

8.1.2. Riemann-integrálhatóság

Probléma. Ha $I = [a, b]$ korlátos és zárt intervallum, (f_n) tagjai Riemann-integrálhatók I-n, $f_n \to f$. Igaz-e, hogy ekkor f is Riemann-integrálható I-n, ill. hogy $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$?

Ellenpéldák:

1. Rendezzük sorba a $[0,1]$ intervallumba eső racionális számokat:

$$\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{r_1, r_2, r_3, \dots\}.$$

Definiálja

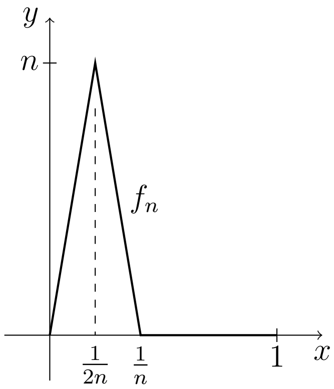
$$f_n(x) := \begin{cases} 1, & x \in \{r_1, r_2, \dots, r_n\}, \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

vagyis az $\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ halmaz karakterisztikus függvényét. Könnyen látható (ld. a 7.24 Megjegyzést), hogy $f_n \in R[0,1]$. Másrészt $f_n \to D$, ahol

$$D(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

a *Dirichlet-függvény*, ami nem Riemann-integrálható $[0,1]$-en, ld. a 7.10 Feladatot.

2. Tekintsük a 8.8. ábrán látható függvénysorozatot. A 8.101. Példában meggondolt



8.8. ábra. Nemkorlátos sátortető függvény: ellenpélda Riemann-integrálhatóságra

módon látható, hogy (f_n) pontonként (de nem egyenletesen) tart az $f \equiv 0$ függvényhez $[0,1]$-en. Másrészt f és f_n is Riemann-integrálható $[0,1]$-en minden n-re, de

$$\int_0^1 f_n = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \not\to \int_0^1 f = 0.$$

8.15. Tétel. *Legyen $[a,b]$ korlátos és zárt intervallum, és (f_n) olyan függvénysorozat, melynek tagjai Riemann-integrálhatók $[a,b]$-n, és $f_n \hookrightarrow f$ az $[a,b]$ intervallumon. Ekkor f is Riemann-integrálható $[a,b]$-n, valamint*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f_n \right) = \int_a^b f$$

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy a $(\int_a^b f_n)$ számsorozat Cauchy-sorozat. Ugyanis, legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Ekkor az $f_n \hookrightarrow f$ miatt létezik olyan N, hogy minden $n \geq N$ esetén

$$\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Ezért, ha $n, m \geq N$, akkor

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f_m \right| \leq \int_a^b |f_n - f_m| \leq \int_a^b |f_n - f| + \int_a^b |f - f_m| \leq 2\varepsilon \cdot (b - a)$$

a 7.33 Következmény és a 7.34 Állítás alapján. A 3.43 Tétel (sorozatok konvergenciájára vonatkozó Cauchy-féle kritérium) szerint ekkor $(\int_a^b f_n)$ konvergens, tehát létezik

$$I := \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n.$$

Belátjuk, hogy f Riemann-integrálható $[a, b]$-n és $\int_a^b f = I$.

Legyen ismét $\varepsilon > 0$ tetszőleges rögzített szám. Az egyenletes konvergencia alapján létező N küszöbindexre $n \geq N$ esetén

$$f_n - \varepsilon \leq f \leq f_n + \varepsilon$$

(ahol az egyszerűség kedvéért ε-al jelöltük az azonosan ε konstans függvényt is). Az alsó és felső Riemann-integrál definíciója szerint

$$\begin{aligned} \int_a^b f_n - \varepsilon \cdot (b - a) = \int_a^b (f_n - \varepsilon) = \underline{\int_a^b} (f_n - \varepsilon) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \\ \leq \overline{\int_a^b} (f_n + \varepsilon) = \int_a^b (f_n + \varepsilon) = \int_a^b f_n + \varepsilon \cdot (b - a), \end{aligned}$$

ahol kihasználtuk azt is, hogy az alsó- és felső integrálok is tartják a rendezést. Elvégezve az $n \to \infty$ határátmenetet, az egyenlőségsorozat két vége alapján kapjuk, hogy

$$I - \varepsilon \cdot (b - a) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq I + \varepsilon \cdot (b - a).$$

Ha most $\varepsilon \to 0$, akkor

$$I \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq I,$$

amiből következik, hogy f Riemann-integrálható és $I = \int_a^b f$. $\square$

8.16. Tétel. *Legyen* $[a, b]$ *korlátos és zárt intervallum, és* (f_n) *olyan függvénysorozat, melynek tagjai folytonosak (így Riemann-integrálhatók is)* $[a, b]$*-n, és* $f_n \hookrightarrow f$ *az* $[a, b]$ *intervallumon. Ekkor* f *is folytonos (tehát Riemann-integrálható)* $[a, b]$*-n, valamint*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f_n \right) = \int_a^b f$$

Bizonyítás. A tétel első része adódik a 8.14 Következményből. Az integrálok határértékéről szóló állítás pedig a fenti bizonyítás végével azonos módon igazolható. □

8.17. *Megjegyzés.* A fentiekben a

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f_n \right) = \int_a^b f$$

képlet úgy is írható, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f_n \right) = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n,$$

vagyis egyenletes konvergencia esetén „a limesz és az integrálás sorrendje felcserélhető".

8.1.3. Differenciálhatóság

Probléma. Milyen feltételek mellett öröklődik a differenciálhatóság a limeszfüggvényre, feltéve, hogy az (f_n) függvénysorozat tagjai differenciálhatók?

8.18. Példa. Tekintsük a 8.9. ábrán látható

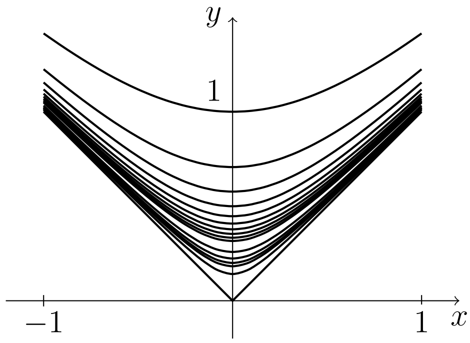
$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}, \quad (n \in \mathbb{N})$$

függvénysorozatot! Nyilvánvaló, hogy az f_n függvények differenciálhatók. Továbbá, gyöktelenítéssel számolva

$$|f_n(x) - |x|| = \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} \right| = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} \le \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0,\ n \to \infty.$$

Innen következik, hogy a függvénysorozat tagjai egyenletesen tartanak az $f(x) = |x|$ függvényhez – ami viszont 0-ban nem differenciálható.

8.19. *Megjegyzés.* Belátható, hogy tetszőleges folytonos függvény még polinomfüggvények sorozatának egyenletes limeszeként is előáll.



8.9. ábra. $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$ konvergenciája

Az előbbi példa alapján az egyenletes konvergenciától eltérő feltételeket kell tennünk a függvénysorozatra, hogy a differenciálhatóság megőrződjön a limeszfüggvényre. Az alábbi tétel feltételei között szerepelni fog, hogy a függvénysorozat tagjai legyenek az $[a, b]$ zárt intervallumon folytonosan differenciálhatók. Ez alatt azt értjük, hogy az f_n függvények legyenek az (a, b) nyílt intervallumon a szokásos értelemben differenciálhatók, és az f_n' deriváltfüggvények folytonosan kiterjedjenek az $[a, b]$ zárt intervallumra (tehát létezzenek olyan, az $[a, b]$-n értelmezett folytonos függvények, melyek (a, b)-re való megszorítása f_n'). A tétel bizonyítása során – a 7.53 Newton–Leibniz-tétel alkalmazásakor – valójában csak ennyit használunk ki, de az egyszerűség kedvéért azt írjuk, hogy f_n' létezik és folytonos $[a, b]$-n.

8.20. Tétel. *Legyenek az (f_n) függvénysorozat tagjai az $I = [a, b]$ intervallumon folytonosan differenciálható függvények (vagyis minden f_n differenciálható és az f_n' folytonos I-ben), továbbá tegyük fel, hogy*

1. *$\exists x_0 \in I$, hogy az $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ számsorozat konvergens;*
2. *$\exists g : I \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $f_n' \hookrightarrow g$ az I-n.*

Ekkor létezik $f : I \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, hogy $f_n \hookrightarrow f$, emellett $f' = g$.

Bizonyítás. Jelölje $c := \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) \in \mathbb{R}$. Mivel f_n' folytonos $\forall n$ és $f_n' \hookrightarrow g$ I-ben, ezért a 8.14 Következmény szerint g is folytonos I-n. Jelölje

$$f(x) := c + \int_{x_0}^{x} g,\ x \in I. \tag{8.2}$$

Mivel g folytonos I-ben, ezért a 7.62 Tétel szerint integrálfüggvénye differenciálható, így a fenti $f : I \to \mathbb{R}$ is differenciálható, és

$$f'(x) = g(x) \text{ minden } x \in I\text{-re.} \tag{8.3}$$

Alkalmazzuk most a 7.53 Newton–Leibniz-tételt az f_n' függvényre (ez megtehető, mivel folytonos, tehát Riemann-integrálható, és van primitív függvénye: f_n). Ekkor

$$\int_{x_0}^{x} f_n' = [f_n]_{x_0}^{x} = f_n(x) - f_n(x_0).$$

Az egyenlőség átrendezéséből kapjuk:

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n' \quad \forall x \in I. \tag{8.4}$$

Ha a (8.4) egyenlőségből kivonjuk a (8.2)-t, ennek abszolút értékére kapjuk a következő becslést:

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f(x)| &\le |f_n(x_0) - c| + \left|\int_{x_0}^{x} (f_n' - g)\right| \le |f_n(x_0) - c| + \int_{x_0}^{x} |f_n' - g| \\ &\le |f_n(x_0) - c| + \int_{a}^{b} |f_n' - g| \le |f_n(x_0) - c| + \left(\sup_I |f_n' - g|\right) \cdot (b - a).\end{aligned}$$

Az így kapott becslés már x-től független, tehát

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x_0) - c| + \left(\sup_I |f_n' - g|\right) \cdot (b - a)$$

is teljesül. Mivel $c = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$, azért a jobb oldal első tagja 0-hoz tart, továbbá mivel $f_n' \hookrightarrow g$, a második tag is 0-hoz tart, ha $n \to \infty$. Ezzel a (8.1) alapján igazoltuk, hogy $f_n \hookrightarrow f$ az I-n. Másrészt (8.3) alapján $f' = g$ is teljesül I-ben, amivel a tételt beláttuk. □

8.21. Következmény. *Legyenek az (f_n) függvénysorozat tagjai az $I = [a, b]$ intervallumban folytonosan differenciálható függvények, továbbá tegyük fel, hogy*

1. *$\exists f : I \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $f_n \to f$ pontonként I-ben;*
2. *$\exists g : I \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $f_n' \hookrightarrow g$ I-n.*

Ekkor $f_n \hookrightarrow f$ is teljesül, emellett $f' = g$.

8.22. *Megjegyzés.* Az előző tétel, ill. következmény feltételei mellett

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n',$$

vagyis „a limesz és a deriválás sorrendje felcserélhető".

8.2. Függvénysorok

Legyen $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$ halmaz.

8.23. Definíció. Legyenek az (f_n) függvénysorozat tagjai az X-en értelmezett függvények. Képezzük ebből a kövekező új függvénysorozatot:

$$s_n := \sum_{i=1}^{n} f_i, \ n = 1, 2, \dots, \tag{8.5}$$

azaz minden $x \in X$ esetén $s_n(x) := \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$. Ezt az (s_n) függvénysorozatot az eredeti (f_n) függénysorozathoz tartozó *függvénysor*nak nevezzük, és jelöljük:

$$\sum f_n := (s_n).$$

A (8.5)-ben definiált s_n függvényt a függvénysor *n-edik szeleté*nek vagy *részletösszegé*nek nevezzük.

8.24. Definíció. Azt mondjuk, hogy $\sum f_n$ függvénysor az X halmazon *pontonként konvergens*, ha a sor szeleteiből álló (s_n) függvénysorozat pontonként konvergens X-en, vagyis létezik $f : X \to \mathbb{R}$ függvény, hogy minden $x \in X$ esetén $s_n(x) \to f(x)$. Azt mondjuk, hogy a $\sum f_n$ függvénysor az X halmazon *egyenletesen konvergens*, ha létezik $f : X \to \mathbb{R}$ függvény, melyre $s_n \hookrightarrow f$ az X-n. Mindkét esetben f-et a függvénysor *összegfüggvényé*nek nevezzük, és így jelöljük:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

8.25. Definíció. Legyen $\sum f_n$ tetszőleges függvénysor. Jelölje

$$\mathrm{KH} := \{x \in X : (s_n(x)) \ \text{konvergens}\}$$

a $\sum f_n$ függvénysor *konvergenciahalmazát.* Ha $\mathrm{KH} \neq \emptyset$, akkor beszélhetünk összegfüggvényről, melynek értelmezési tartománya $\mathcal{D}(f) := \mathrm{KH}$, és

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} (s_n(x)), \ x \in \mathrm{KH}$$

az *összegfüggvény.*

8.26. Példa. Legyen $f_n(x) := x^n$ $(n \in \mathbb{N})$. A jól ismert geometriai sor konvergenciatulajdonságaiból adódik, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1,$$

és a sor konvergenciahalmaza KH $= (-1, 1)$. A konvergencia azonban a KH halmazon nem egyenletes, ugyanis minden egyes n mellett

$$\sup_{x\in(-1,1)} |s_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in(-1,1)} \left|\sum_{i=1}^{n} x^i - \frac{1}{1-x}\right| = \sup_{x\in(-1,1)} \left|\frac{1-x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x}\right|$$
$$= \sup_{x\in(-1,1)} \left|\frac{x^{n+1}}{x-1}\right| = \infty.$$

Ha azonban egy szűkebb halmazon, pl. a $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ intervallumon tekintjük a függvénysort, ott a konvergencia egyenletes lesz, ugyanis

$$\sup_{x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})} \left|\sum_{i=1}^{n} x^i - \frac{1}{1-x}\right| = \sup_{x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})} \left|\frac{x^{n+1}}{x-1}\right| = \frac{1}{2^n} \to 0,\ n \to \infty.$$

8.27. *Megjegyzés.* Kérdés, hogy adott $\sum f_n$ (pontonként) konvergens függvénysor esetén hogyan számolhatjuk ki az összegfüggvény egy adott $x \in X$ pontbeli helyettesítési értékét, $f(x)$-et? Definíció szerint

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

egy végtelen numerikus sor összege, mely a függvénysor tagjainak x-beli helyettesítési értékeiből kiszámolható (ha szerencsénk van...) – tehát nem szükséges az (s_n) függvénysorozatot meghatározni! Ez alapján az is világos, hogy

$$\mathrm{KH} = \left\{x \in X : \sum f_n(x) \text{ numerikus sor konvergens}\right\}.$$

A következőkben a függvénysorozatoknál megismertekhez hasonló állításokat mondunk ki arra vonatkozólag, hogy a függvénysor tagjainak milyen tulajdonságai és milyen feltételek mellett öröklődnek az összegfüggvényre.

8.28. Tétel. *Legyenek a $\sum f_n$ függvénysor tagjai az X halmazon értelmezett valós értékű függvények, és tegyük fel, hogy a sor egyenletesen konvergens X-en. Ha emellett valamely $x_0 \in X$ pontban a függvénysor minden tagja folytonos, akkor az $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ összegfüggvény is folytonos x_0-ban.*

Bizonyítás. A feltételből következik, hogy az $s_n := \sum_{i=1}^{n} f_i$ részletösszegek mindegyike folytonos x_0-ban. Így a 8.24 Definíció és a 8.13 Tétel alapján a bizonyítás kész. □

8.29. Következmény. *Legyenek a $\sum f_n$ függvénysor tagjai az X halmazon értelmezett valós értékű függvények, és tegyük fel, hogy a sor egyenletesen konvergens X-en. Ha emellett a függvénysor minden tagja folytonos az X halmazon, akkor az $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ összegfüggvény is folytonos X-en.*

8.30. Tétel. *Legyen $I := [a, b]$ korlátos és zárt intervallum, legyenek a $\sum f_n$ függvénysor tagjai az I intervallumon Riemann-integrálható függvények. Ha emellett a $\sum f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens I-n, akkor az $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ összegfüggvény is Riemann-integrálható I-n, valamint*

$$\int_a^b f = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n \right).$$

A képlet a következőképpen is írható:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n \right),$$

vagyis „a szumma és az integrálás sorrendje felcserélhető".

Bizonyítás. Jelölje $s_n := \sum_{i=1}^{n} f_i$ a függvénysor n-edik szeletét! Mivel minden f_i Riemann-integrálható $[a, b]$-n, azért $s_n \in R[a, b]$. Továbbá $s_n \hookrightarrow f$ I-n, ezért a 8.15 Tételből következik, hogy $f \in R[a, b]$, valamint

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} f_i \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f_n \right) = \int_a^b f.$$

□

8.31. Tétel. *Legyen $I = [a, b]$, legyenek a $\sum f_n$ függvénysor tagjai folytonosan differenciálhatók I-ben. Tegyük fel továbbá, hogy*

1. *$\exists x_0 \in I$ pont, melyben a $\sum f_n(x_0)$ numerikus sor konvergens;*
2. *a $\sum f_n'$ függvénysor egyenletesen konvergens I-n, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' = g$.*

Ekkor az eredeti $\sum f_n$ függvénysor is egyenletesen konvergens I-n, emellett $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jelöléssel f is folytonosan differenciálható I-n és

$$f' = g = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'.$$

Bizonyítás. A feltételekből következik, hogy a 8.20 Tétel feltételei teljesülnek a $\sum f_n$ függvénysor részletösszegeiből képezett (s_n) függvénysorozatra. Ez alapján az állítás könnyen belátható. □

8.32. Következmény. *Legyen $I = [a, b]$, legyenek a $\sum f_n$ függvénysor tagjai folytonosan differenciálhatók I-ben. Tegyük fel továbbá, hogy*

1. *a $\sum f_n$ függvénysor pontonként konvergens I-ben;*

2. a $\sum f_n'$ függvénysor egyenletesen konvergens I-n, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' = g$.

Ekkor az eredeti $\sum f_n$ függvénysor is egyenletesen konvergens I-n, emellett $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jelöléssel f is folytonosan differenciálható I-n és

$$f' = g = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'.$$

8.33. *Megjegyzés.* A fenti tétel, ill. következmény feltételei mellett

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n',$$

vagyis „a szumma és a deriválás sorrendje felcserélhető".

Probléma. Megadható-e jól használható feltétel arra nézve, hogy a $\sum f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens legyen? (Függvénysorozatok esetén a (8.1) egy jól használható szükséges és elégséges feltétel.)

8.34. Állítás (Függvénysorok egyenletes konvergenciájának Cauchy-féle kritériuma)**.** *A $\sum f_n$ függvénysor pontosan akkor egyenletesen konvergens X-en, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz található olyan $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > m \geq N$ esetén*

$$\sup_{x \in X} |s_n(x) - s_m(x)| = \sup_{x \in X} |f_{m+1}(x) + \cdots + f_n(x)| < \varepsilon,$$

vagyis az (s_n) függvénysorozat „egyenletesen Cauchy".

Bizonyítás. Adódik a 8.11 Állításból. □

8.35. Példa. A 8.26 Példában szereplő $\sum x^n$ függvénysorról a Cauchy-kritérium alapján is belátható, hogy a konvergenciahalmazán nem egyenletesen konvergens. Ugyanis,

$$\sup_{x \in (-1,1)} |s_{n+1}(x) - s_n(x)| = \sup_{x \in (-1,1)} \left| \sum_{i=1}^{n+1} x^i - \sum_{i=1}^{n} x^i \right| = \sup_{x \in (-1,1)} |x^{n+1}| = 1.$$

Az alábbi tétel a gyakorlatban a Cauchy-kritériumnál jobban használható, bár csak elegendő feltételt ad az egyenletes konvergenciára.

8.36. Tétel (Weierstrass-féle kritérium függvénysorok egyenletes konvergenciájára)**.** *Tegyük fel, hogy létezik egy $\sum a_n$ pozitív tagú, konvergens numerikus sor, melyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén*

$$|f_n(x)| \leq a_n \quad \forall x \in X, \text{ vagyis } \sup_{x \in X} |f_n(x)| \leq a_n.$$

Ekkor $\sum f_n$ egyenletesen konvergens X-en.
Azaz, ha a $\sum f_n$ függvénysor tagjai majorálhatók X-en egy pozitív tagú konvergens numerikus sor megfelelő tagjaival, akkor a függvénysor egyenletesen konvergens X-en.

Bizonyítás. Az 5.7 Tétel (végtelen numerikus sorokra vonatkozó Cauchy-kritérium) szerint tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n > m \geq N$ esetén

$$|a_{m+1} + \cdots + a_n| = a_{m+1} + \cdots + a_n < \varepsilon,$$

mivel $a_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Így bármely $n > m \geq N$ indexekre

$$\sup_{x\in X} |f_{m+1}(x) + \cdots + f_n(x)| \leq \sup_{x\in X} |f_{m+1}(x)| + \cdots + \sup_{x\in X} |f_n(x)| \leq a_{m+1} + \cdots + a_n < \varepsilon$$

is teljesül, amivel a 8.34 Cauchy-kritérium alapján a tételt beláttuk. □

8.37. *Megjegyzés.* A 8.36, függvénysorokra vonatkozó Weierstrass-kritérium annak az analógja, hogy numerikus sorok esetén az abszolút konvergencia implikálja a konvergenciát, ld. az 5.13 Állítást.

8.38. Példa. Tekintsük a

$$\sum \frac{\sin nx}{n^{3/2}}$$

függvénysort. Mivel minden n-re és minden valós x-re $|\frac{\sin nx}{n^{3/2}}| \leq \frac{1}{n^{3/2}}$ és $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ konvergens, azért a függvénysor egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$-en.

8.2.1. Hatványsorok

A továbbiakban az úgynevezett *hatványsorok*, azaz a

$$\sum a_n(x - x_0)^n$$

alakú függvénysorok tulajdonságaival szeretnénk foglalkozni, ahol $(a_n) \subset \mathbb{R}$ tetszőleges sorozat és $x_0 \in \mathbb{R}$ a hatványsor ún. *közepe.* A hatványsor tehát egy speciális függvénysor, ahol az összegzendő függvények $f_n(x) := a_n(x - x_0)^n$ alakúak. Az

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

összegfüggvény vizsgálatánál két fontos kérdést vizsgálunk.

- $\mathcal{D}(f) =?$, azaz mely $x \in \mathbb{R}$ esetén lesz $\sum(a_n(x - x_0)^n)$ konvergens?
- Milyen tulajdonságokkal rendelkezik az f függvény?

Az első kérdésre viszonylag gyorsan egy majdnem teljes választ tudunk adni. Ehhez először terjesszük ki a *korlátos* sorozatokra vonatkozó lim sup fogalmát (ld. a 3.5. szakaszt) *felülről nem korlátos* sorozatokra! Világos, hogy ez könnyen megtehető – csak ez esetben a $\limsup a_n = +\infty$ is előfordulhat. Továbbá, az is egyszerűen meggondolható, hogy a korlátos sorozatokra kimondott állítások alábbi megfelelői érvényesek lesznek:

1. A $\limsup a_n$ az (a_n) sorozat határértékkel rendelkező részsorozatainak a határértékei közül a legnagyobb (tehát van is olyan $(a_{\mathtt{n}_i})$ részsorozat, amelyre $a_{\mathtt{n}_i} \to \limsup a_n$.)

2. Minden $\limsup a_n$-nél *kisebb* számnál nagyobb tag végtelen sok van az (a_n) sorozatban, a $\limsup a_n$-nél *nagyobb* számnál nagyobb tag pedig csak véges sok van az (a_n) sorozatban.

Ezekből könnyen meggondolható a végtelen sorok konvergenciájára vonatkozó gyökkritérium egy módosított változata (ld. az 5.22 Tételt).

8.39. Tétel (Cauchy-féle gyökkritérium – módosított verzió)**.** *Legyen (c_n) adott sorozat.*

1. Ha

$$\limsup \sqrt[n]{|c_n|} < 1,$$

akkor $\sum c_n$ (abszolút) konvergens.

2. Ha

$$\limsup \sqrt[n]{|c_n|} > 1,$$

akkor $\sum c_n$ divergens.

Ebből már igazolhatjuk a fenti első kérdésre a (majdnem teljes) választ.

8.40. Tétel (Cauchy–Hadamard-tétel)**.** *Legyen*

$$r := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \left(\frac{1}{0+} = +\infty,\ \frac{1}{+\infty} = 0\right).$$

Ha $|x - x_0| < r$, akkor a $\sum a_n(x-x_0)^n$ (numerikus sor) abszolút konvergens,
ha $|x - x_0| > r$, akkor a $\sum a_n(x-x_0)^n$ (numerikus sor) divergens.

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathbb{R}$ és alkalmazzuk a $\sum a_n(x-x_0)^n$ sorra a fenti gyökkritériumot. Ezek szerint a sor abszolút konvergens, ha

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x - x_0| \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$

Átrendezéssel kapjuk az első állítást.

Hasonlóan, a gyökkritérium divergenciafeltételét alkalmazva kapjuk, hogy a sor divergens, ha

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x - x_0| \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1.$$

□

8.41. Definíció. Az előző tételben szereplő

$$r := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

számot a hatványsor *konvergenciasugar*ának nevezzük. A 8.40 Cauchy–Hadamard-tétel alapján tehát a hatványsor összegfüggvénye minden esetben létezik a $(x_0 - r, x_0 + r)$ nyílt intervallumon.

8.42. *Megjegyzés.* A Cauchy–Hadamard-tétel semmit nem mond az $x = x_0 - r$ és $x = x_0 + r$ pontokban való konvergenciáról, az mindig további vizsgálatot igényel.

A végtelen sorokkal végezhető műveletek (ld. az 5.5 és az 5.37 (Mertens) Tételét) alapján azonnal adódik a következő állítás.

8.43. Állítás. *Legyenek* $\sum a_n(x-x_0)^n$ *és* $\sum b_n(x-x_0)^n$ *hatványsorok, melyek konvergencia-sugara rendre* $r_1 > 0$ *és* $r_2 > 0$. *Ekkor*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)(x-x_0)^n,$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n b_0 + a_{n-1}b_1 + \ldots + a_0 b_n)(x-x_0)^n \quad (8.6)$$

minden olyan x *számra, melyre* $|x - x_0| < \min\{r_1, r_2\}$.

Tehát az adott intervallumon hatványsorként felírható függvények gyűrűt alkotnak.

8.44. Tétel. *A* $\sum a_n(x-x_0)^n$ *függvénysor (hatványsor) egyenletesen konvergens bármely*

$$[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset (x_0 - r, x_0 + r) \quad (0 < \delta < r)$$

korlátos és zárt intervallumon.

Bizonyítás. Tetszőleges $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ esetén $|x - x_0| \le \delta$, így

$$|a_n(x-x_0)^n| \le |a_n|\delta^n.$$

Mivel a 8.40 Cauchy–Hadamard-tétel alapján a hatványsor abszolút konvergens $x = x_0 + \delta$-ban, ezért a $\sum |a_n|\delta^n$ numerikus sor konvergens. Így a 8.36 Weierstrass-kritérium szerint $\sum a_n(x-x_0)^n$ egyenletesen konvergens $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$-n. □

Az előző tétel alapján, figyelembe véve hogy az $f_n(x) = a_n(x-x_0)^n$ függvények folytonosak (sőt, akárhányszor differenciálhatók), a függvénysorok elméletéből következik, hogy a hatványsor összegfüggvénye folytonos.

8.45. Tétel. *Hatványsor összegfüggvénye* folytonos *az* (x_0-r, x_0+r) *nyílt intervallumon.*

Bizonyítás. Következik a 8.28 és a 8.44 Tételekből. $\square$

Könnyen látható, hogy a

$$\sum f_n'(x) = \sum a_n n(x-x_0)^{n-1}$$

derivált hatványsor konvergenciasugara megegyezik az eredetiével, hiszen

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n| n} = (\limsup \sqrt[n]{|a_n|}) \cdot 1.$$

Így kapjuk, hogy a hatványsor összegfüggvénye (akárhányszor) differenciálható, és a deriválás tagonként végezhető.

8.46. Tétel. *A pozitív konvergenciasugarú* $\sum a_n(x-x_0)^n$ *hatványsor* f *összegfüggvénye* végtelen sokszor differenciálható *az* (x_0-r, x_0+r) *nyílt intervallumon, és a deriválás tagonként végezhető, vagyis*

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x-x_0)^n,$$

$$f''(x) = 2a_2 + 2\cdot 3a_3(x-x_0) + 3\cdot 4(x-x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}(x-x_0)^n,$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+k)(n+k-1)\ldots(n+1)a_{n+k}(x-x_0)^n, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Bizonyítás. A 8.44 Tétel és a 8.31 Tétel felhasználásával adódik. $\square$

Az előző tételből világos a hatványsorok és Taylor-sorok (ld. a 6.70 Definíciót) kapcsolata.

8.47. Következmény. *Minden pozitív konvergenciasugarú hatványsor az összegfüggvényének* Taylor-sora*.*

Bizonyítás. A 8.46 Tétel szerint az f összegfüggvény k-adik deriváltjára

$$f^{(k)}(x_0) = k\cdot(k-1)\cdots 1\cdot a_k,$$

azaz

$$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} = a_k,$$

valamint $f(x_0) = a_0$. $\square$

Mivel minden Taylor-sor nyilvánvalóan egy hatványsor, ezért az előbbiek szerint a (pozitív konvergenciasugarú) hatványsorok halmaza megegyezik a (pozitív konvergenciasugarú) Taylor-sorok halmazával.

8.48. Tétel. *Legyen $\sum a_n(x-x_0)^n$ pozitív konvergenciasugarú hatványsor. Ekkor a hatványsor összegfüggvényének van* primitív függvénye *az (x_0-r, x_0+r) nyílt intervallumon, mégpedig egy tetszőleges primitív függvénye előáll mint*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítás. Az állítás a 8.46 Tételből azonnal következik. A F-et előállító hatványsor konvergenciasugara megegyezik az eredeti hatványsoréval. $\square$

A (6.17) egyenlőségben definiált

$$\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Taylor-sorok x-beli konvergenciájára annak idején csak a 6.69 Következményben adtunk egy igen erős elégséges feltételt. A hatványsorok elmélete – a konvergenciaintervallum végpontjaitól eltekintve, ahol minden esetben külön kell megvizsgálni a konvergenciát, ld. később a 8.56 Abel-tételt – szükséges és elégséges feltételt ad arra, hogy egy adott Taylor-sor hol konvergens, azaz hol állítja elő az összegfüggvényét.

8.49. Példa. Az exp, sin, cos, sh, és ch függvényeknek a 6.71 Tételben igazolt

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},\\
\mathrm{sh}\ x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\\
\mathrm{ch}\ x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.
\end{aligned}$$

(0 körüli) Taylor-sor-előállításaiban a konvergenciasugár $+\infty$.

Az $f(x) = \frac{1}{1-x}$ függvény

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Taylor-sor-előállításában a konvergenciasugár 1.

Bizonyítás. Következik abból, hogy a konvergenciasugár 8.41 Definíciója alapján

$$r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}} = \frac{1}{0+} = +\infty,$$

továbbá

$$r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{1}} = \frac{1}{1} = 1.$$

□

Az előző tételekből előállíthatók olyan függvények Taylor-sorai is, amelyeket a 6.71 Tételben használt elv alapján nem tudtunk kiszámolni.

8.50. Állítás. *Az $f(x) = \ln(1+x)$ függvény Taylor-sora a $(-1,1)$ intervallumon*

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

Az $f(x) = \operatorname{arctg} x$ függvény Taylor-sora a $(-1,1)$ intervallumon

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Bizonyítás. Mivel $(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x}$, a 6.71 Tétel első állításából

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (-1 < x < 1),$$

a 8.48, primitív függvényre vonatkozó tételt és $f(0) = 0$-t felhasználva pedig

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

Hasonlóan, mivel $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, a 6.71 Tétel első állításából

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (-1 < x < 1),$$

a 8.48 Tételt és $f(0) = 0$-t felhasználva pedig

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

□

Fontos, hogy hatványsor összegfüggvénye az együtthatókat egyértelműen meghatározza.

8.51. Tétel (Hatványsorok egyértelműségi tétele). *Legyenek*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

olyan függvények, melyeket előállító hatványsoroknak közös $(x_0 - r, x_0 + r)$ konvergencia-intervalluma van $(r > 0)$. Legyen továbbá $(x_i) \subset (x_0 - r, x_0 + r)$ olyan sorozat, melyre $x_i \to y \in (x_0 - r, x_0 + r)$, $x_i \neq y$ és $f(x_i) = g(x_i)$.

Ekkor $a_n = b_n$ minden $n \in \mathbb{N}$ indexre.

Bizonyítás. Könnyen meggondolható, hogy elegendő azt az esetet vizsgálni, amikor $y = x_0$. Teljes indukcióval végezzük a bizonyítást. Mivel a hatványsor összegfüggvénye folytonos, ezért

$$a_0 = f(x_0) = \lim_{i \to \infty} f(x_i) = \lim_{i \to \infty} g(x_i) = g(x_0) = b_0.$$

Tegyük fel, hogy egy $n \in \mathbb{N}$ számra teljesül, hogy $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $\ldots$, $a_n = b_n$. Ekkor az

$$a_{n+1} + a_{n+2}(x - x_0) + a_{n+3}(x - x_0)^2 + \ldots \text{ és}$$
$$b_{n+1} + b_{n+2}(x - x_0) + b_{n+3}(x - x_0)^2 + \ldots$$

hatványsorok konvergenciahalmaza ugyanaz a K intervallum, és minden $x \neq x_0$ esetén

$$f_1(x) = \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k}{(x - x_0)^{n+1}} \text{ és } g_1(x) = \frac{g(x) - \sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k}{(x - x_0)^{n+1}}$$

az összegfüggvényük. A feltételek szerint $f_1(x_i) = g_1(x_i)$ minden $i \in \mathbb{N}$ esetén. Mivel f_1 és g_1 is hatványsor összegfüggvénye, ezért folytonosak. Ebből viszont az $n = 0$ esetre vonatkozó gondolatmenettel kapjuk, hogy

$$a_{n+1} = f_1(x_0) = \lim_{i \to \infty} f_1(x_i) = \lim_{i \to \infty} g_1(x_i) = g_1(x_0) = b_{n+1}.$$

□

8.52. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $D(f) = I$ nyílt intervallum. Azt mondjuk, hogy az f függvény *analitikus*, ha található $x_0 \in I$, $(a_n) \subset \mathbb{R}$, hogy

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

minden $x \in I$ esetén. Azt mondjuk, hogy az f függvény *lokálisan analitikus*, ha minden $x \in I$ ponthoz található annak olyan környezete, melyre megszorítva f analitikus.

8.53. *Megjegyzés.* A fentiek alapján egy függvény pontosan akkor analitikus, ha előáll a Taylor-sorának összegeként.

8.54. Példa. Az exponenciális-, a szinusz- és a koszinuszfüggvény analitikus függvény, a logaritmusfüggvény pedig lokálisan analitikus, de nem analitikus.

Ezzel szóhasználattal tehát a 8.51 Tétel azt mondja ki, hogy két különböző, ugyanazon az intervallumon értelmezett lokálisan analitikus függvény legfeljebb megszámlálhatóan sok helyen veheti fel ugyanazt a függvényértéket, és ezek a pontok nem torlódhatnak az intervallum belsejében.

8.55. Példa. A szinusz- és a koszinuszfüggvény olyan analitikus függvények, melyek végtelen sokszor veszik fel ugyanazt a függvényértéket. Azonban a közös függvényérték-helyek nem torlódnak semmilyen $y \in (-\infty, +\infty)$ valós helyen, csak a végtelenekben.

Végül vizsgáljuk meg azt az esetet, mikor a konvergenciaintervallum valamely végpontjában is konvergens egy hatványsor. A következő tétel mutatja, hogy ilyenkor az összegfügvény – mely ebben az esetben a végpontban is értelmezve van – az egész intervallumon folytonos.

Egyszerűség kedvéért a tételt 0 középpontú hatványsor konvergenciaintervallumának jobb végpontjára fogalmazzuk meg, de ennek nincs jelentősége a bizonyítás szempontjából, a bal végpont vagy a nem zérus középpont esete hasonlóan tárgyalható.

8.56. Tétel (Abel folytonossági tétele)**.** *Legyen* $\sum(a_n x^n)$ *egy pozitív, véges konvergenciasugarú hatványsor* $(0 < r < \infty)$*, valamint tegyük fel, hogy*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n < \infty,$$

azaz konvergens. Ekkor az

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

összegfüggvény az r *pontban is folytonos, azaz*

$$\lim_{x \to r-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n.$$

Bizonyítás. További egyszerűsítések kedvéért feltesszük, hogy $r = 1$. Ez a bizonyítás menetén nem változtat, csak jelöléseinket egyszerűsíti és teszi áttekinthetővé.

Legyen

$$s := \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \qquad s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Itt $s < \infty$ a feltétel szerint, és $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. A hatványsorok szorzatára felírt (8.6) összefügggés szerint, mivel $\sum s_n x^n$ konvergenciasugara 1, ezért ha $|x| < 1$, akkor

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} 1x^n\right)(1-x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 1\right)x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n,$$

így

$$s-f(x) = s-(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \left((1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)s-(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(s-s_n)x^n.$$

Tehát $0 < x < 1$ esetén

$$|s - f(x)| \le (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}|s - s_n|x^n.$$

Mivel $s_n \to s$, ezért minden $\varepsilon > 0$ számhoz található $N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy minden $n \ge N$ természetes számra $|s - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Így $0 < x < 1$ esetén

$$|s - f(x)| \le (1-x)\sum_{n=0}^{N}|s - s_n|x^n + \frac{\varepsilon}{2}(1-x)\cdot\sum_{n=N+1}^{\infty} x^n \le (1-x)\sum_{n=0}^{N}|s-s_n| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mivel a lineáris függvény folytonos, így $\varepsilon > 0$ számhoz található $\delta > 0$, hogy ha $x \in (1-\delta, 1)$, akkor

$$(1-x)\sum_{n=0}^{N}|s - s_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$

azaz ha $x \in (1-\delta, 1)$, akkor

$$|s - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ami viszont éppen a bizonyítandó állítás. □

8.57. Példa. Tekintsük a

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

hatványsort! Láttuk a 8.50 Állításban, hogy ez a hatványsor a $(-1,1)$ nyílt intervallumon az $f(x) = \ln(1+x)$ függvényt állítja elő. Ez a függvény értelmezési tartományának minden pontjában folytonos, amint azt korábban már láttuk. A fenti hatványsor az $x = 1$ helyen konvergens, hiszen

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$$

Leibniz típusú sor. Abel tétele szerint tehát a hatványsor összegfüggvénye a $(-1,1]$ intervallumon is folytonos és 1-ben a függvényérték $f(1) = \lim_{x\to 1-} f(x) = \ln 2$ a megfelelő sorösszeg, azaz

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots .$$

Ez egyébként elemi módszerekkel is belátható.

8.58. Példa. Az előző gondolatmenethez hasonlóan kapjuk az

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

előállításból, hogy

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1},$$

azaz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots .$$

8.59. Példa. A hatványsorok alkalmazásának egy szép példája a nevezetes *Fibonacci-számok* explicit előállítása. Ezeket a számokat rekurzív módon szokás definiálni, mégpedig, u_n-nel jelölve az n-edik Fibonacci-számot, legyen

$$u_0 := 0,\ u_1 := 1,\ u_n := u_{n-1} + u_{n-2}\ (n \geq 2).$$

Tekintsük az

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

ún. *generátorfüggvényt*, ami tehát a Fibonacci-számokból mint együtthatókból képezett, 0 körüli hatványsor. Belátható, hogy konvergenciasugara $r > 0$. Az u_n-ekre vonatkozó rekurzió felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n = x + x\sum_{n=1}^{\infty} u_{n-1}x^{n-1} + x^2\sum_{n=2}^{\infty} u_{n-2}x^{n-2} \\ &= x + xf(x) + x^2 f(x). \end{aligned}$$

Ebből

$$f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

Most már csak az a feladatunk, hogy f így kapott alakjának kiszámoljuk a hatványsor-előállítását, és ebből nyerjük az u_n együtthatókat.

Jelölje a x^2+x-1 polinom gyökeit q_1 és q_2, vagyis

$$q_1 := \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad q_1 := \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Ezzel

$$\begin{aligned}\frac{x}{1-x-x^2} &= \frac{-x}{(x-q_1)(x-q_2)} = \frac{1}{q_1-q_2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{q_1}} + \frac{1}{q_2-q_1}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{q_2}} \\ &= \frac{1}{q_1-q_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{q_1^n} + \frac{1}{q_2-q_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{q_2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{q_1^n(q_1-q_2)} + \frac{1}{q_2^n(q_2-q_1)}\right)x^n.\end{aligned}$$

Innen az x^n együtthatójára, a hatványsorok egyértelműsége alapján (ld. a 8.51 Tételt) kapjuk, hogy

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \ n \geq 2.$$

8.2.2. Trigonometrikus függvények

Korábbi tanulmányaink során hosszabban tárgyaltuk a trigonometrikus függvények alaptulajdonságait, melyeket a következőkben foglalhatunk össze.

Geometriai megfogalmazás alapján, intuitív módon definiáltuk a szinusz- és a koszinuszfüggvényt és lényegében a következő tulajdonságokban állapodtunk meg.

- $\mathcal{D}(\sin) = \mathcal{D}(\cos) = \mathbb{R}$,
- sin páratlan, cos páros függvény,
- $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y$,
- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$,
- $\cos 0 = 1$,
- $\lim_{x\to 0+}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Megemlítünk a tanult legfontosabb következményekből néhányat.

- sin és cos végtelen sokszor differenciálható függvények, $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$,

- legfeljebb egy, a fenti tulajdonságokkal rendelkező függvénypár létezhet,

- $$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

- $$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Ezzel a tárgyalásmóddal kapcsolatban felmerül néhány kérdés. Bár a trigonometrikus függvények intuitív geometriai bevezetése rendkívül szemléletes, ez a felépítés hagy maga után némi logikai kívánnivalót. Gondoljunk csak arra, hogy a definícióhoz szükségünk van olyan fogalmakra, mint az ívhossz vagy a szög nagysága.

Tehát a trigonometrikus függvények tulajdonságaival nincs igazán probléma, a gond a definíciójuk, a létezés. Most szeretnénk bemutatni egy lehetőséget arra, hogyan lehet ezt a logikai problémát és a bonyolult geometriai fogalmakat kiküszöbölni.

Megismertük intuitív módon a trigonometrikus függvényeket, azok alaptulajdonságait és az alaptulajdonságok fontosabb következményeit, így a hatványsor-előállításukat. Ezeket a hatványsorokat viszont bonyolult geometriai fogalmak bevezetése nélkül is fel lehet írni, tulajdonságaikat lehet vizsgálni. Tehát fordítsuk meg a gondolatmenetet, és használjuk a hatványsor-alakot a trigonometrikus függvények definíciójaként!

Legyen tehát
$$\sin x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
és *legyen*
$$\cos x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$
A hatványsorokról tanultak alapján azonnal következnek a következő tulajdonságok:

- $\mathcal{D}(\sin) = \mathcal{D}(\cos) = \mathbb{R}$,
- sin páratlan, cos páros függvény,
- sin és cos tetszőlegesen sokszor differenciálható függvények,
- $\cos 0 = 1$,
- $\lim_{x\to 0+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0+} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots\right) = 1$,
- $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$.

Az addíciós képletek beláthatók például a Cauchy-szorzat segítségével, vagy a differenciálási szabályok alkalmazásával a következő módon. Legyen tetszőleges rögzített $y \in \mathbb{R}$ mellett

$$f_y(x) = [\sin(x+y) - \sin x \cos y - \cos x \sin y]^2 + [\cos(x+y) - \cos x \cos y + \sin x \sin y]^2 .$$

Egyszerű számolással adódik, hogy $f_y(0) = 0$ és $f_y'(x) = 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, így $f_y \equiv 0$.

Ezzel beláttuk, hogy a hatványsorral definiált sin és cos függvények teljesítenek minden fontos alaptulajdonságot, amit a trigonometrikus függvényektől elvártunk. Mivel tudjuk, hogy legfeljebb egy ilyen függvénypár létezhet, ezért ők azok.

A hatványsor-alakból következik az is, hogy például a cos függvénynek van pozitív gyöke. Ugyanis, $\cos 0 = 1 > 0$, továbbá a Taylor-sor előállítás alapján

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \cdots$$

egy Leibniz-sor, és az (5.5) becslést $n = 3$-ra alkalmazva kapjuk, hogy

$$|-0{,}42\dot{2} - \cos 2| \leq 0{,}08\dot{8},$$

amiből $\cos 2 < 0$ következik. Tehát alkalmazható a 4.54 Bolzano-tétel: a cos függvénynek van gyöke a $(0,2)$ intervallumban. Mivel a gyökhelyek nem torlódhatnak a 0-ban, ezért a cos függvénynek van *legkisebb* pozitív gyöke is. Ennek kétszeresenként szokás a π számot definiálni.

9. fejezet

Többváltozós függvények

Egészen mostanáig olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényekkel foglalkoztunk, melyek értelmezési tartománya és értékkészlete a valós számok részhalmaza, vagyis

$$\mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R}, \quad \mathcal{R}(f) \subset \mathbb{R}.$$

A minket körülvevő világ jelenségeit tanulmányozva azonban láthatjuk, hogy bizonyos mennyiségek több más mennyiségtől is függnek. Például, a hőmérséklet idő és hely függvénye. Vagy a

$$V = V(h, r) = \pi r^2 h$$

képlet egy henger térfogatát adja meg annak h magassága és alapkörének r sugara függvényében.

Ebben a fejezetben olyan p változós függvényekkel ismerkedünk meg, melyek értékkészlete $\mathbb{R}$-ben fekszik:

$$f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R}^p,\ \mathcal{R}(f) \subset \mathbb{R}.$$

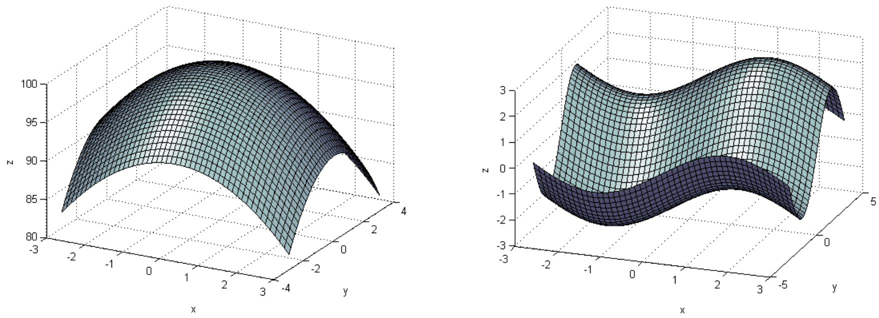
Célunk a határérték, folytonosság, integrál- és differenciálszámítás kiterjesztés ilyen típusú függvényekre.

9.1. Kétváltozós függvények

9.1.1. Példák

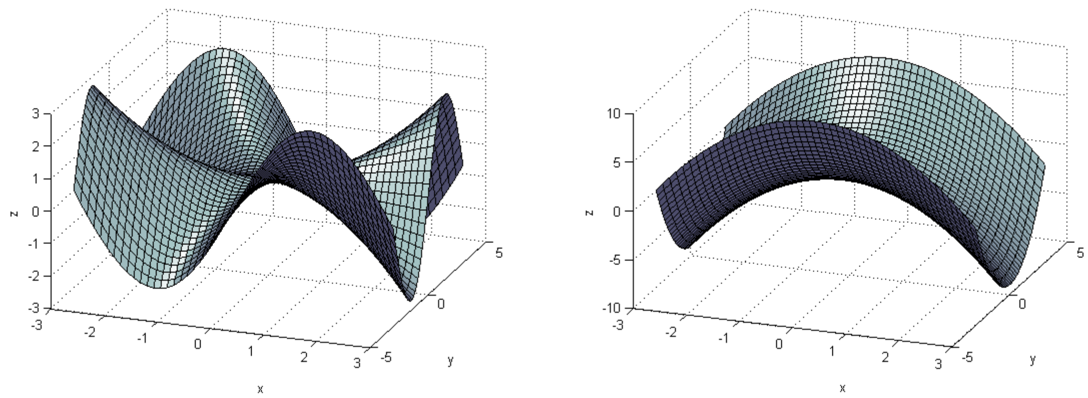
A 9.1. és a 9.2. ábrákon kétváltozós ($\mathbb{R}$-be képező) függvények grafikonjai láthatók. Míg egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény

$$\operatorname{graph} f := \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{D}(f)\} \subset \mathbb{R}^2$$



(a) $f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$ (b) $f(x,y) = \sin x + 2\sin y$

9.1. ábra. Kétváltozós függvények



(a) $f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ (b) $f(x,y) = y^2 - x^2$

9.2. ábra. Kétváltozós függvények

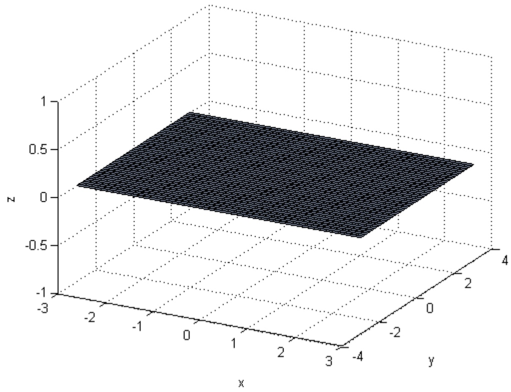
grafikonja a sík egy részhalmaza (egy görbe), addig egy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény hasonlóan definiált

$$\operatorname{graph} f := \{(x, y, f(x,y)) : (x,y) \in \mathcal{D}(f)\} \subset \mathbb{R}^3$$

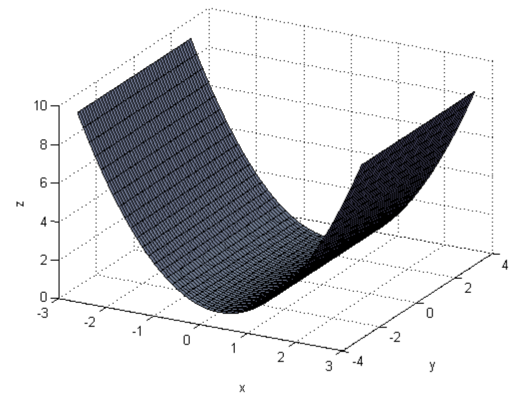
*grafikon*ja egy térbeli ún. *felület*.

Könnyen meggondolható, hogy a konstans $f(x,y) = c$ függvény grafikonja egy vízszintes, vagyis az xy-koordinátasíkkal párhuzamos sík, ld. a 9.3. ábrát. Az $f(x,y) = x^2$ függvény grafikonja egy végtelenbe nyúló, vályú alakú felület, melynek az y tengelyre merőleges síkokkal való metszetei parabolák, ld. a 9.4. ábrát. Az $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ függvény grafikonja pedig egy végtelen kúppalást, ld. a 9.5. ábrát.

Egy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény grafikonjának az $x-y$-síkkal párhuzamos metszeteit, vagyis



9.3. ábra. $f(x, y) = c$



9.4. ábra. $f(x, y) = x^2$

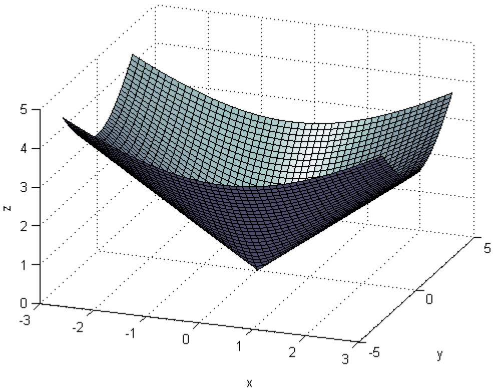
a

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = k\} \subset \mathbb{R}^2$$

alakú síkbeli alakzatokat (ahol $k \in \mathcal{R}(f)$) a függvény *szintvonalai*nak hívjuk. Ezek ismerete nagyban megkönnyíti a függvények ábrázolását.

9.1.2. Az $\mathbb{R}^2$ (a sík) metrikus tulajdonságai

Ha visszaemlékszünk, egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény $a \in \mathcal{D}(f)$ pontbeli folytonosságát úgy definiáltuk, hogy „a-hoz közeli pontokat $f(a)$-hoz közeli pontokba visz”. A függvény $a \in \mathcal{D}(f)'$ pontbeli határértékének, ill. $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontbeli differenciálhatóságának fogalmát is a „közelség” fogalmát felhasználva vezettük be (idézzük fel az „$\varepsilon - \delta$-s” de-



9.5. ábra. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

finíciókat!). A definíciók megfogalmazhatóak voltak sorozathatárértékek segítségével is (ld. az átviteli elveket).

Ebben a szakaszban az a célunk, hogy a „közelség” és sorozatkonvergencia fogalmát kiterjesszük a sík, vagyis $\mathbb{R}^2$ pontjaira (vektoraira) is.

Középiskolából ismeretes, hogy egy $x \in \mathbb{R}^2$ pont valójában egy

$$x = (x_1, x_2)$$

(rendezett) számpárral azonosítható, ahol x_1 és x_2 az x pont Descartes-féle koordinátarendszerben egyértelműen meghatározott koordinátái.

9.1. Definíció. Az $x = (x_1, x_2)$ és $y = (y_1, y_2)$ síkbeli pontok *(euklideszi) távolságán* az alábbi mennyiséget értjük:

$$d(x, y) = d_2(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} (= |x - y|). \tag{9.1}$$

9.2. *Megjegyzés.* Világos, hogy

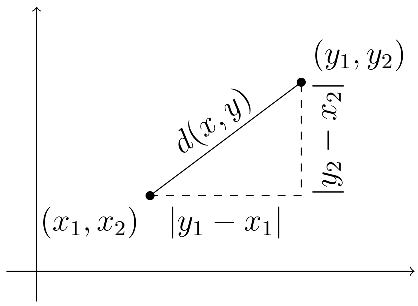
$$d(x, y) \geq |x_i - y_i|, \quad i = 1, 2.$$

Ez a távolságfogalom a Pitagorasz-tétel felhasználásán alapul: koordinátarendszerben ábrázolva a két pontot, a (9.1) képlettel meghatározott szám az őket összekötő szakasz hossza, ld. a 9.6. ábrát.

Könnyen ellenőrizhető, hogy az előbbiekben definiált $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$ távolságfüggvény rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal, melyek jól mutatják, hogy d valójában az $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$(x, y) \mapsto |x - y|$$

egydimenziós távolság általánosítása 2 dimenzióra.



9.6. ábra. Euklidészi távolság

9.3. Állítás. *A (9.1) egyenlőséggel definiált* $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$ *távolságfüggvényre teljesülnek az alábbiak.*

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ *esetén (szimmetria);*
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2$ *esetén (háromszög-egyenlőtlenség).*

Bizonyítás. Az 1. és 2. állítások nyilvánvalóak. A 3. négyzetre emelés után az 1.16 Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenségből adódik, aminek ellenőrzését az olvasóra bízzuk. □

Az ilyen tulajdonságú függvényeket *metrikák*nak fogjuk hívni, ld. a 10. Fejezetet. A metrika (vagy távolságfüggvény) segítségével – hasonlóan az egy dimenzióhoz – értelmezhetjük egy $u \in \mathbb{R}^2$ pont $r > 0$ sugarú gömbkörnyezetét.

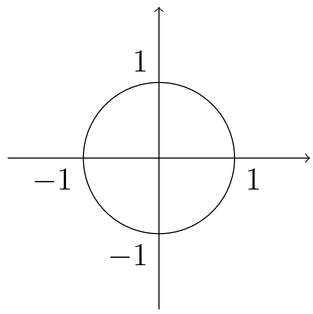
9.4. Definíció. Az $u \in \mathbb{R}^2$ pont körüli $r > 0$ sugarú

- *nyílt gömb:* $B(u, r) := \{x \in \mathbb{R}^2 : d(u, x) < r\}$;
- *zárt gömb:* $\overline{B}(u, r) := \{x \in \mathbb{R}^2 : d(u, x) \leq r\}$;
- *gömbfelület:* $\partial B(u, r) := \{x \in \mathbb{R}^2 : d(u, x) = r\}$;
- *kipontozott gömb(környezet):* $\dot{B}(u, r) := B(u, r) \setminus \{u\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < d(u, x) < r\}$.

A távolságfogalom lehetőséget ad $\mathbb{R}^2$-beli sorozatok konvergenciájának értelmezésére. $\mathbb{R}^2$-beli *sorozat*on egy $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2$ függvényt értünk, ahol

$$x(n) := x_n = (x_{n,1}, x_{n,2}) \in \mathbb{R}^2$$

a sorozat n-edik *tagja*, $n \in \mathbb{N}$.



$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

9.7. ábra. Origó középpontú egységkör

9.5. Definíció. Legyen $(x_n) \subset \mathbb{R}^2$ sorozat (vagyis $x_n = (x_{n,1}, x_{n,2})$, $n \in \mathbb{N}$), $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Azt mondjuk, hogy az (x_n) sorozat u-hoz *konvergál*, vagy az (x_n) sorozat *határértéke* u, jelölésben

$$\lim_{n\to\infty} x_n = u \text{ vagy } x_n \to u,$$

ha a $d(x_n, u)$ számsorozat 0-hoz tart:

$$d(x_n, u) = \sqrt{(x_{n,1} - u_1)^2 + (x_{n,2} - u_2)^2} \to 0, n \to \infty.$$

Ekvivalensen: $x_n \to u$ pontosan akkor, ha

$$\text{minden } \varepsilon > 0\text{-hoz létezik } N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ hogy minden } n \geq N \text{ esetén } d(x_n, u) < \varepsilon.$$

Ekvivalensen: $x_n \to u$ pontosan akkor, ha

$$\text{minden } \varepsilon > 0\text{-hoz létezik } N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ hogy minden } n \geq N \text{ esetén } x_n \in B(u, \varepsilon).$$

Fontos megjegyezni, hogy $\mathbb{R}^2$-ben nincs értelme „∞” határértékről beszélni!

9.6. Állítás. *Sorozat határértéke egyértelmű.*

Bizonyítás. Ha $x_n \to u$ és $x_n \to v$ és $u \neq v$ lenne, akkor $r := d(u, v)/2 > 0$ definícióval elég nagy n-re $x_n \in B(u, r)$ és $x_n \in B(v, r)$. Másrészt, $B(u, r) \cap B(v, r) = \emptyset$, ugyanis ha $x \in B(u, r) \cap B(v, r)$ volna, akkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$d(u, x) \geq d(u, v) - d(x, v) > d(u, v) - r = d(u, v) - \frac{d(u, v)}{2} = \frac{d(u, v)}{2}$$

lenne, pedig $d(u, x) < r = \frac{d(u,v)}{2}$. Ez pedig ellentmond a konvergenciának. □

Ha jobban meggondoljuk, egy $\mathbb{R}^2$-beli sorozat konvergenciája tulajdonképpen az első, ill. a második koordinátákból álló sorozatok konvergenciáját jelenti.

9.7. Állítás. *Legyen* $x_n = (x_{n,1}, x_{n,2}) \in \mathbb{R}^2$*,* $n \in \mathbb{N}$ *és* $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$*. Az* (x_n) *sorozat akkor és csak akkor konvergál* u*-hoz, ha*

$$\lim_{n\to\infty} x_{n,1} = u_1 \text{ és } \lim_{n\to\infty} x_{n,2} = u_2.$$

Bizonyítás.

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, u) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_{n,1}-u_1)^2 + (x_{n,2}-u_2)^2} = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_{n,1} = u_1 \text{ és } \lim_{n\to\infty} x_{n,2} = u_2$$

□

Ismeretes, hogy $\mathbb{R}^2$ *vektortér*, vagyis $\mathbb{R}^2$-beli pontok (vektorok) között értelmezhető az összeadás és számmal való szorzás a szokásos módon. A sorozatok közötti (tagonként végzett) vektorműveletek öröklődnek a sorozatok határértékeire.

9.8. Állítás. *Ha* $x_n \to u$ *és* $y_n \to v$*, akkor* $x_n + y_n \to u + v$ *és* $c \cdot x_n \to c \cdot u$*,* $c \in \mathbb{R}$*.*

Bizonyítás. Azonnal adódik a 9.7 Állításból és a valós sorozatok és műveletek kapcsolatából. □

9.9. Tétel (Cauchy-kritérium)**.** *Egy* $(x_n) \subset \mathbb{R}^2$ *pontsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat, vagyis*

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ esetén } \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N \text{ indexre } d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Ha $x_n \to u$, akkor $\varepsilon/2$-höz létezik N, hogy minden $n, m \geq N$ esetén

$$d(x_n, u) < \frac{\varepsilon}{2},\ n \geq N \Longrightarrow d(x_n, x_m) \leq d(x_n, u) + d(x_m, u) < \varepsilon.$$

Fordítva, tegyük fel, hogy (x_n) Cauchy-sorozat. Könnyen meggondolható, hogy ekkor az 1., ill. 2. koordinátákból álló

$$(x_{n,1}) \text{ és } (x_{n,2})$$

valós sorozatok Cauchy-sorozatok – tehát konvergensek. Legyen

$$u_1 := \lim x_{n,1} \text{ és } u_2 := \lim x_{n,2}.$$

A 9.7 Állítás alapján $x_n \to u = (u_1, u_2)$, és ezt akartuk belátni. □

Hasonlóan, a számsorozatokra megismert Bolzano–Weierstrass-tétel is érvényben marad $\mathbb{R}^2$-beli sorozatokra. Ennek kimondásához először definiálnunk kell a korlátosság fogalmát a síkon.

9.10. Definíció. Egy $H \subset \mathbb{R}^2$ halmaz *korlátos*, ha van olyan $a \in \mathbb{R}^2$ pont és $r > 0$ sugár, hogy $H \subset B(a, r)$. Vagy, van olyan $r > 0$ sugár, hogy $H \subset B(0, r)$, ahol $0 = (0, 0)$ az origó. Egy $(x_n) \subset \mathbb{R}^2$ *sorozat korlátos*, ha a tagjaiból alkotott halmaz korlátos.

9.11. Tétel (Bolzano–Weierstrass). *Minden $\mathbb{R}^2$-beli korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. Könnyen meggondolható, hogy ha $(x_n) \subset \mathbb{R}^2$ korlátos, akkor az 1. ill. 2. koordinátákból álló

$$(x_{n,1}) \text{ és } (x_{n,2})$$

valós sorozatok is korlátosak. Pontosabban, belátható, hogy ha

$$(x_n) \subset B(a, r),$$

akkor

$$(x_{n,1}) \subset (a_1 - r, a_1 + r) \text{ és } (x_{n,2}) \subset (a_2 - r, a_2 + r).$$

Az $(x_{n,1})$ valós sorozatnak a (valós) Bolzano-Weierstrass tétel alapján van konvergens részsorozata – ez legyen $(x_{n_k,1})$, és

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k,1} = u_1.$$

Tekintsük most az ugyanezen indexsorozathoz tartozó, 2. koordinátákból álló $(x_{n_k,2})$ sorozatot! A fentiek alapján ez is korlátos, ezért a (valós) Bolzano-Weierstrass tétel alapján van konvergens részsorozata, legyen $(x_{n_{k_l},2})$,

$$\lim_{l\to\infty} x_{n_{k_l},2} = u_2.$$

Mivel az ezen indexsorozatnak megfelelő, 1. koordinátákból álló $(x_{n_{k_l},1})$ sorozat részsorozata az $(x_{n_k,1})$ sorozatnak, ezért

$$\lim_{l\to\infty} x_{n_{k_l},1} = u_1 \text{ és } \lim_{l\to\infty} x_{n_{k_l},2} = u_2.$$

A 9.7 Állítás alapján tehát az $u := (u_1, u_2)$ pontra

$$\lim_{l\to\infty} x_{n_{k_l}} = u,$$

és ezt akartuk belátni. □

Hasonlóan a valós számhalmazok körében bevezetett külső/belső/határ/torlódási stb. pont fogalmához, $\mathbb{R}^2$-ben is definiálhatjuk ezeket a ponttípusokat, melyre később szükségünk is lesz.

9.12. Definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$, $u \in \mathbb{R}^2$.

1. Az u pont *belső pontja* H-nak, ha

   $$\text{létezik } r > 0, \text{ hogy } B(u, r) \subset H$$

   (ebből persze következik, hogy $u \in H$). H belső pontjainak halmazát jelölje $\operatorname{int} H$.

2. Az u pont *külső pontja* H-nak, ha

$$\text{létezik } r > 0, \text{ hogy } B(u, r) \subset \mathbb{R}^2 \setminus H$$

(ebből persze következik, hogy $u \notin H$). H külső pontjainak halmazát jelölje $\operatorname{ext} H$. Világos, hogy

$$\operatorname{ext} H = \operatorname{int}(\mathbb{R}^2 \setminus H).$$

3. Az u pont *határpontja* H-nak, ha

$$\text{minden } r > 0 \text{ esetén } B(u, r) \cap H \neq \emptyset \text{ és } B(u, r) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus H) \neq \emptyset.$$

H határpontjainak halmazát jelölje ∂H.

4. Az u pont *torlódási pontja* H-nak, ha

$$\text{minden } r > 0 \text{ esetén } \dot{B}(u, r) \cap H \neq \emptyset.$$

H torlódási pontjainak halmazát jelölje H'.

9.13. Példa. Tekintsük a $H := \dot{B}(u, r)$ halmazt és határozzuk meg az előbb definiált $\operatorname{int} H, \operatorname{ext} H, \partial H, H'$ halmazokat!

Könnyen meggondolható, hogy $\operatorname{int} H = H = \dot{B}(u, r)$. Továbbá, $\partial H = \{u\} \cup \partial B(u, r)$. Innen már következik, hogy $\operatorname{ext} H = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}(u, r)$. Továbbá, az is meggondolható, hogy $H' = \overline{B}(u, r)$.

9.1.3. Kétváltozós függvények tulajdonságai

Az előző szakaszban bevezetett $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ síkbeli távolság segítségével értelmezhetjük kétváltozós függvények határértékét és folytonosságát. A definíciók az egyváltozós esettel teljesen analóg módon hangzanak – az egyetlen különbség, hogy az értelmezési tartományban a „közelség” fogalmát a d függvény felhasználásával értelmezzük.

Határértéket – hasonlóan a valós esethez – csak az értelmezési tartomány torlódási pontjaiban értelmezünk. A v határértékre $v \in \overline{\mathbb{R}}$, tehát $v = \pm\infty$ lehetséges, melynek ε sugarú környezeteit korábban definiáltuk (ld. a (4.2) és a (4.3) egyenlőségeket).

9.14. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, u \in \mathcal{D}(f)', v \in \overline{\mathbb{R}}$. Azt mondjuk, hogy f *határértéke az u helyen v*, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy

$$\text{minden } x \in \mathcal{D}(f),\ x \neq u,\ d(x, u) < \delta \text{ esetén } f(x) \in K_\varepsilon(v).$$

Másképpen: minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy

$$\text{minden } x \in \dot{B}(u, \delta) \cap \mathcal{D}(f) \text{ esetén } f(x) \in K_\varepsilon(v).$$

Jelölés:

$$\lim_u f = v \text{ vagy } \lim_{x \to u} f(x) = v.$$

Függvények folytonosságáról csak az értelmezési tartomány pontjaiban beszélhetünk.

9.15. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{D}(f)$. Azt mondjuk, hogy f *folytonos az u pontban*, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy

$$\text{minden } x \in \mathcal{D}(f),\ d(x,u) < \delta \text{ esetén } |f(x) - f(u)| < \varepsilon.$$

Másképpen: minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy

$$\text{minden } x \in B(u,\delta) \cap \mathcal{D}(f) \text{ esetén } f(x) \in K_\varepsilon(f(u))$$

(itt $K_\varepsilon(f(u)) = (f(u) - \varepsilon, f(u) + \varepsilon)$ nyílt intervallum).

9.16. Definíció. Azt mondjuk, hogy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *folytonos a $H \subset \mathcal{D}(f)$ halmazon*, ha annak minden pontjában folytonos. Azt mondjuk, hogy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *folytonos*, ha a $\mathcal{D}(f)$ halmazon folytonos.

A valós függvényeknél tanultakhoz analóg módon igazolhatunk átviteli elveket.

9.17. Tétel (Átviteli elv határértékre)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{D}(f)'$, $v \in \overline{\mathbb{R}}$. Ekkor ekvivalensek:*

1. $\lim_u f = v$;
2. *minden $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$, $x_n \neq u$, $x_n \to u$ sorozat esetén $f(x_n) \to v$.*

9.18. Tétel (Átviteli elv folytonosságra)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u \in \mathcal{D}(f)$. Ekkor ekvivalensek:*

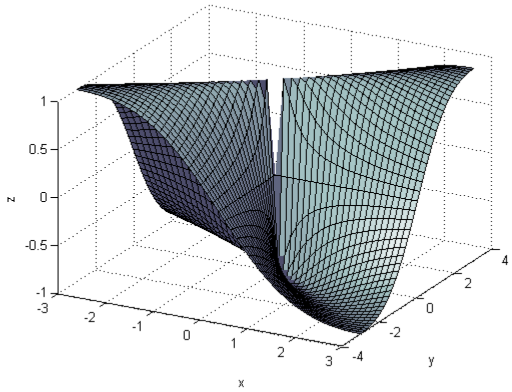
1. *f folytonos u-ban;*
2. *minden $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$, $x_n \to u$ sorozat esetén $f(x_n) \to f(u)$.*

Könnyen meggondolható, hogy a 9.1.1. alszakaszban található ábrákon bemutatott függvények mindegyike folytonos.

9.19. Példa. A 9.8. ábrán látható $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$ függvénynek azonban az origóban, vagyis a $(0,0)$ pontban nincs határértéke.
Ennek igazolásához gondoljuk meg, hogy ha $y = mx$, $(x \neq 0)$ alakú egyeneseken közeledünk az origóhoz, akkor itt a függvényértékek

$$f(x,y) = f(x,mx) = \frac{2mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{2m}{1+m^2},$$

vagyis m-től függő konstans értéket vesznek fel. Mivel ezek különböző m-ekre különböző értéket adnak, így a függvénynek nincs határértéke $(0,0)$-ban. Ugyanezen okok miatt bárhogyan is értelmeznénk a függvényt a $(0,0)$-ban, ott nem lenne folytonos.



9.8. ábra. $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$

9.20. Példa. Az $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ függvénynek van határértéke az origóban, mégpedig 0. Ennek megmutatásához alkalmazzuk a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséget az x^2 és y^2 számokra!

$$\sqrt{x^2y^2} \le \frac{x^2+y^2}{2},$$

amiből

$$x^2y^2 \le \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2.$$

Így

$$0 \le f(x,y) \le \frac{x^2+y^2}{4},$$

és a rendőr-elv alapján következik, hogy $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Másképp, egyszerű becsléssel adódik, hogy

$$\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| \le \frac{x^2y^2}{y^2} = x^2 \to 0, \quad (x,y) \to (0,0).$$

Áttérhetünk $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ polárkoordinátákra is. Ekkor

$$\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{r^2}\right| \le r^2 \to 0, \quad r \to 0.$$

A fenti példákból is látszik, hogy a kétváltozós függvények határértéke jóval összetettebb fogalom, mint az egyváltozós határérték, hiszen az adott ponthoz sokféleképpen közelíthetünk (nem csak egyenesek, hanem például parabolák, vagy tetszőlegesen bonyolult síkbeli alakzatok mentén is).

9.2. Az $\mathbb{R}^p$ és p változós függvények

A fentiekben $\mathbb{R}^2$-re bevezetett fogalmakat könnyen kiterjeszthetjük $\mathbb{R}^p$-re, tetszőleges $p \in \mathbb{N}$ esetén. A

$$d = d_2 : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_+$$

(szintén *euklideszi*nek nevezett) távolságfüggvényt $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ és $y = (y_1, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^p$ vektorokra

$$d(x, y) = d_2(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_p - y_p)^2} \tag{9.2}$$

képlettel definiáljuk – és, ha nem okoz félreértést, ugyanúgy jelöljük, mint a megfelelő $\mathbb{R}^2$-beli távolságfüggvényt. Ez a d is teljesíti a 9.3 Állításban felsorolt tulajdonságokat (a 3. tulajdonság teljesüléséhez ismét szükség van az 1.16 Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenségre).

Az $\mathbb{R}^p$-beli pontokra (vektorokra) bevezethetünk mindent, amit $\mathbb{R}^2$-en definiáltunk. Fontos megjegyeznünk, hogy a Bolzano–Weiertsrass tétel is érvényben marad $\mathbb{R}^p$-beli sorozatokra. Továbbá, értelmezhetjük $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvények folytonosságát, határértékét. Ezekben a definíciókban egyszerűen d helyébe az $\mathbb{R}^p$-beli $d : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ távolságfüggvényt kell helyettesíteni.

Megjegyezzük, hogy egy $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény

$$\operatorname{graph} f := \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{D}(f)\} \subset \mathbb{R}^{p+1}$$

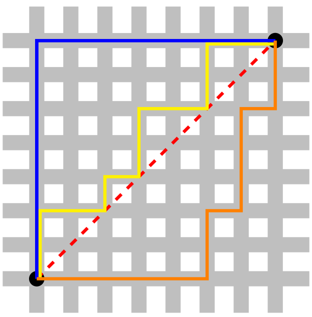
grafikonja már $p = 3$ esetén is nehezen elképzelhető (és rajzolható le...), hiszen $\mathbb{R}^4$ egy részhalmazáról (ún. *hiperfelület*ről) van szó.

10. fejezet

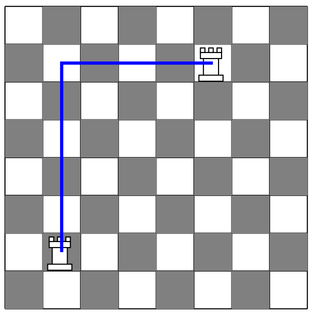
Metrikus terek

Ebben a fejezetben a távolságfogalom általánosításával (absztrakciójával) foglalkozunk. Mielőtt a definíciókra rátérnénk, motivációképpen nézzük meg a következő példát, az úgynevezett taxi-geometriát!

Képzeljük el Manhattan utcáit mint egy négyzetrácsot, és tegyük fel, hogy taxival el akarunk jutni A pontból B-be!



10.1. ábra. „Manhattan-távolság”



10.2. ábra. „Bástya-távolság”

Ekkor számunkra az A és B pont „igazi” távolsága helyett az a lényeges, hogy az utcákon a lehető legrövidebb úton hogyan juthatunk el B-be. Vegyük észre, hogy a lehető legrövidebb út nem egyértelmű (ld.a 10.1. ábrát), de a hossza igen, ez $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ (ahol $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$). Ezt nevezhetjük A és B „taxitávolságának” (vagy „Manhattan-távolságának”). Hasonló távolságot nyerünk, ha a sakktáblán egyik mezőből a másikba bástyával akarunk eljutni a lehető legrövidebb úton. Bástya helyett vehetünk más bábukat, és ekkor más távolságokat nyerünk. Kérdezhetjük, hogy vajon e távolságok milyen tulajdonságokkal rendelkeznek, hogyan néznek ki az egységgömbjeik, mik a konvergens sorozatok, folytonos függvények, stb. (ilyen és hasonló kérdésekkel foglalkozik a metrikus terek elmélete).

10.1. Alapfogalmak, nyílt és zárt halmazok

Alapötlet: Az $(x, y) \mapsto |x - y|$ hozzárendelés az x és y valós számok *távolságá*t adja meg. Ezt általánosíthatjuk $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ és $y = (y_1, y_2, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^p$ vektorokra úgy, hogy

$$d_2(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_p - y_p)^2} = \left(\sum_{k=1}^{p} |x_k - y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

amit az x és y pontok *euklideszi távolságá*nak nevezünk.

Az alábbiakban tovább általánosítjuk a távolság fogalmát.

10.1. Definíció. Legyen $X \neq \emptyset$ nem üres halmaz. Ekkor X-beli *metrika* vagy *távolságfüggvény* alatt egy olyan $d : X \times X \to [0, +\infty)$ leképezést értünk, melyre az alábbi tulajdonságok teljesülnek:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$ $\forall x, y \in X$ esetén (szimmetria);
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ $\forall x, y, z \in X$ esetén (háromszög-egyenlőtlenség).

10.2. Definíció. A *metrikus tér* egy olyan (X, d) rendezett pár, ahol X nem üres alaphalmaz, d pedig X-beli metrika.

10.3. Példa (metrikus terekre)**.**

1. $X := \mathbb{R}^p$,

$$d_1(x, y) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \cdots + |x_p - y_p| = \sum_{k=1}^{p} |x_k - y_k| \tag{10.1}$$

$$d_2(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_p - y_p)^2} = \left(\sum_{k=1}^{p} |x_k - y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{10.2}$$

Bizonyítás. A metrika 1. és 2. tulajdonsága könnyen látható a d_1 és d_2 függvényre. A 3. tulajdonság a d_1 esetén könnyen igazolható, a d_2 esetén az 1.16 Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenségből adódik. □

10.4. *Megjegyzés.* Az d_1 és d_2 metrikák definíciójával analóg módon tetszőleges $\alpha \geq 1$ számra definiálható d_α metrika. Az általános esetben azonban a háromszög-egyenlőtlenség belátása meglehetősen nehéz.

2. $X := \mathbb{R}^p$,

$$d_\infty(x,y) := \max_{1\le k\le p} |x_k - y_k|$$

Bizonyítás. Az 1. és 2. tulajdonságok nyilvánvalók. A 3. háromszög-egyenlőtlenséghez legyenek $x, y, z \in \mathbb{R}^p$. Minden $k \in \{1, \ldots, p\}$ esetén

$$|x_k - z_k| \le |x_k - y_k| + |y_k - z_k|,$$

tehát minden $k \in \{1, \ldots, p\}$ esetén

$$|x_k - z_k| \le d_\infty(x,y) + d_\infty(y,z).$$

Ebből következik, hogy

$$d_\infty(x,z) \le d_\infty(x,y) + d_\infty(y,z).$$

□

Amint láttuk, ugyanazon az alaphalmazon sokféle metrika értelmezhető, például $\mathbb{R}^p$-n értelmezhetjük a d_1, d_2 és d_∞ metrikák – így az $(\mathbb{R}^p, d_1)$, $(\mathbb{R}^p, d_2)$ ill. $(\mathbb{R}^p, d_\infty)$ metrikus terekhez jutunk. A későbbiekben látni fogjuk, hogy ezek a metrikus terek sok szempontból hasonlóan „viselkednek” ($p = 1$ esetén mindhárom metrika ugyanazt a távolságot adja).

10.5. *Megjegyzés.* Bármely $(\mathbb{R}^p, d_i)$, $i = 1, 2, \infty$ térben

$$d_i(x,y) \ge |x_k - y_k|, \quad k = 1, \ldots, p.$$

Ebből az is adódik, hogy

$$d_i(x,y) \ge d_\infty(x,y), \quad i = 1, 2.$$

3. $X \ne \emptyset$ tetszőleges,

$$d(x,y) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \ne y; \\ 0, & \text{ha } x = y. \end{cases}$$

diszkrét metrika.

Bizonyítás. Az 1. és 2. tulajdonságok ismét világosak. A 3. tulajdonság rögtön következik, ha $x = z$. Ha $x \ne z$, akkor a 3. egyenlőtlenség bal oldalán 1 áll. Másrészt y az x és z pontok közül legfeljebb az egyikkel egyezhet meg, így a jobb oldalon legalább 1 áll, amiből az egyenlőtlenség adódik. □

4. $X := b(H)$ a $H \subset \mathbb{R}$ halmazon korlátos függvények halmaza,

$$d_\infty(f,g) := \sup_{h \in H} |f(h) - g(h)| \, .$$

Bizonyítás. Az 1. és 2. tulajdonságok azonnal adódnak. Legyenek $f, g, u \in b(H)$ függvények. Ekkor minden $h \in H$ esetén

$$|f(h) - u(h)| \le |f(h) - g(h)| + |g(h) - u(h)| \, ,$$

tehát minden $h \in H$ esetén

$$|f(h) - u(h)| \le d_\infty(f,g) + d_\infty(g,u),$$

amiből definíció szerint

$$d_\infty(f,u) \le d_\infty(f,g) + d_\infty(g,u).$$

□

5. $X := C[a,b]$,

$$d_\infty(f,g) := \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

(a 4.56 Weierstrass-tétel alapján) az előző egy speciális esete.

10.6. Definíció. Az (X,d) metrikus térben az $u \in X$ pont körüli $r > 0$ sugarú

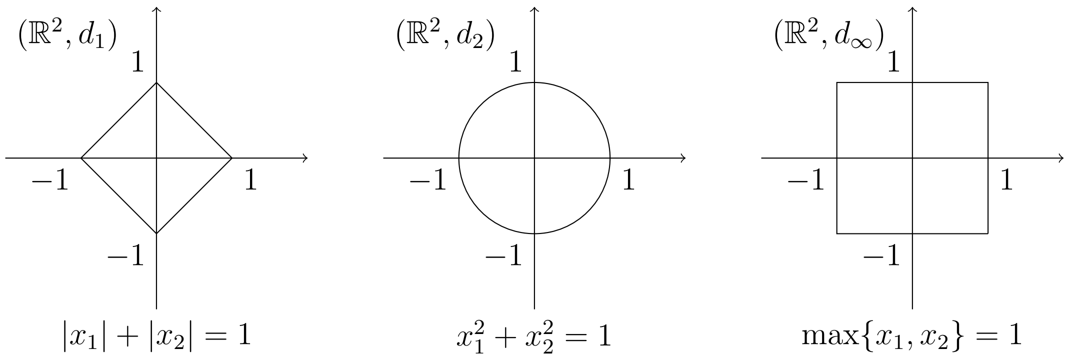
- *nyílt gömb:* $B(u,r) := \{x \in X : d(u,x) < r\}$;
- *zárt gömb:* $\overline{B}(u,r) := \{x \in X : d(u,x) \le r\}$;
- *gömbfelület:* $\partial B(u,r) := \{x \in X : d(u,x) = r\}$;
- *kipontozott gömb(környezet):* $\dot{B}(u,r) := B(u,r) \setminus \{u\} = \{x \in X : 0 < d(u,x) < r\}$.

10.7. Definíció. Az u pont r *sugarú környezetén* a $B(u,r)$ nyílt gömböt értjük.

10.8. Példa (gömbökre)**.**

1. A 10.3. ábrán az $(\mathbb{R}^2, d_1)$, $(\mathbb{R}^2, d_2)$ és $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ terekben a $(0,0)$ pont (origó) körüli 1 sugarú gömbök láthatók. Például, az $(\mathbb{R}^2, d_1)$ tér esetén

$$B((0,0),1) = \{(x_1,x_2) : |x_1 - 0| + |x_2 - 0| < 1\} = \{(x_1,x_2) : |x_1| + |x_2| < 1\} \, .$$



10.3. ábra. Origó középpontú egységkörök a síkon a d_1, d_2, d_∞ metrikákban

2. Ha (X, d) a diszkrét metrikus tér egy tetszőleges alaphalmazon, akkor

$$B(u, r) = \begin{cases} \{u\}, & r \leq 1; \\ X, & r > 1. \end{cases}$$

10.9. Definíció. Legyen $(x_n) \subset (X, d)$ pontsorozat, $u \in X$. Azt mondjuk, hogy $\lim_{n\to\infty} x_n = u$ vagy $x_n \to u$, vagyis az (x_n) sorozat u-hoz *konvergál*, ha $n \to \infty$ esetén $d(x_n, u) \to 0$.

Ekvivalensen: $x_n \to u$ pontosan akkor, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N$ esetén $d(x_n, u) < \varepsilon$, vagyis $x_n \in B(u, \varepsilon)$.

10.10. Állítás. *Sorozat határértéke egyértelmű.*

Bizonyítás. Ha $x_n \to u$ és $x_n \to v$ lenne és $u \neq v$, akkor $r := \frac{d(u,v)}{2} > 0$ definícióval elég nagy n-re $x_n \in B(u, r)$ és $x_n \in B(v, r)$. Másrészt $B(u, r) \cap B(v, r) = \emptyset$, ugyanis ha $x \in B(u, r) \cap B(v, r)$ volna, akkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$d(u, x) \geq d(u, v) - d(x, v) > d(u, v) - r = d(u, v) - \frac{d(u, v)}{2} = \frac{d(u, v)}{2}$$

lenne, pedig $d(u, x) < r = \frac{d(u,v)}{2}$. Ez pedig ellentmond a konvergenciának. $\square$

10.11. Állítás. *Az $(\mathbb{R}^p, d_1)$, $(\mathbb{R}^p, d_2)$ és $(\mathbb{R}^p, d_\infty)$ terekben egy $(x_n) \subset \mathbb{R}^p$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha minden $1 \leq k \leq p$ esetén a k-adik koordinátákból álló*

$$(x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$$

valós sorozat konvergens. Az (x_n) sorozat d_1, d_2, ill. d_∞ metrika szerinti határértéke az az $u = (u_1, \ldots, u_p) \in \mathbb{R}^p$ pont, melyre

$$\lim_{n\to\infty} x_{n,k} = u_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

vagyis a koordináta-sorozatok határértékeiből álló vektor.

Bizonyítás. Ha (x_n) valamelyik metrikus térben konvergens, akkor a 10.5 Megjegyzés alapján a koordinátákból álló sorozatok is konvergensek. A másik irány pedig triviálisan adódik. □

Ennek az állításnak közvetlen következménye, hogy a fenti p-dimenziós metrikus terekben is érvényben marad a Bolzano–Weierstrass tétel.

10.12. Tétel (Bolzano–Weierstrass). *Az* $(\mathbb{R}^p, d_1)$, $(\mathbb{R}^p, d_2)$ *és* $(\mathbb{R}^p, d_\infty)$ *terekben minden* (x_n) korlátos *sorozatnak van konvergens részsorozata.*

Bizonyítás. A 9.11 Tétel bizonyításával analóg módon látható. □

10.13. Példa. Vizsgáljuk meg, hogy mit jelent egy $(f_n) \subset b(H)$ függvénysorozatnak a fent definált d_∞ metrikában való konvergenciája! Definíció szerint $f_n \to f$ a d_∞ metrikában ekvivalens azzal, hogy

$$d_\infty(f_n, f) = \sup_{h \in H} |f_n(h) - f(h)| \to 0, \quad n \to \infty,$$

ami a függvénysorozat *egyenletes konvergenciája* H-n.

10.14. Definíció. Legyen (X, d) metrikus tér, $H \subset X$, $u \in X$.

1. Az u pont *belső pontja* H-nak, ha

   $$\text{létezik } r > 0, \text{ hogy } B(u, r) \subset H$$

   (ebből persze következik, hogy $u \in H$). H belső pontjainak halmazát jelölje $\operatorname{int} H$.

2. Az u pont *külső pontja* H-nak, ha

   $$\text{létezik } r > 0, \text{ hogy } B(u, r) \subset X \setminus H$$

   (ebből persze következik, hogy $u \notin H$). H külső pontjainak halmazát jelölje $\operatorname{ext} H$. Világos, hogy

   $$\operatorname{ext} H = \operatorname{int}(X \setminus H).$$

3. Az u pont *határpontja* H-nak, ha

   $$\text{minden } r > 0 \text{ esetén } B(u, r) \cap H \neq \emptyset \text{ és } B(u, r) \cap (X \setminus H) \neq \emptyset.$$

   H határpontjainak halmazát jelölje ∂H. (Vigyázat! Lehet határpont H-ban, de $X \setminus H$-ban is!)

4. Az u pont *torlódási pontja* H-nak, ha

   $$\text{minden } r > 0 \text{ esetén } \dot{B}(u, r) \cap H \neq \emptyset.$$

   H torlódási pontjainak halmazát jelölje H'.

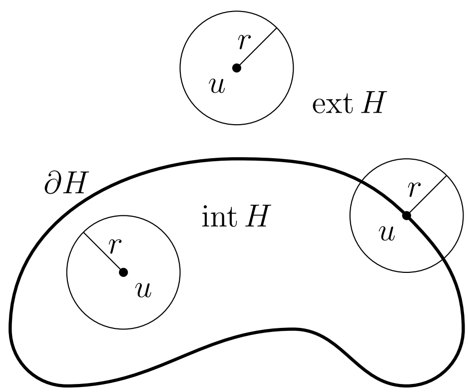
5. Az u pont *izolált pontja* H-nak, ha

$$\text{létezik } r > 0, \text{ melyre } B(u,r) \cap H = \{u\}.$$

6. A H halmaz *lezártja*

$$\overline{H} := \operatorname{int} H \mathbin{\dot\cup} \partial H = H \cup \partial H,$$

ahol $\dot\cup$ a diszjunkt uniót jelöli.



10.4. ábra. Halmaz belső, külső és határpontja

10.15. *Megjegyzés.* Könnyen látható, hogy bármely $H \subset X$ esetén

$$X = \operatorname{int} H \mathbin{\dot\cup} \partial H \mathbin{\dot\cup} \operatorname{ext} H.$$

10.16. Példa.

1. $(X,d) := (\mathbb{R}, d_1)$, $H := (a,b)$ intervallum (vagy $H := [a,b)$, $H := (a,b]$, $H := [a,b]$.) Ekkor $\operatorname{int} H = (a,b)$, $\operatorname{ext} H = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$, $\partial H = \{a,b\}$, $H' = [a,b]$, $\overline{H} = [a,b]$, izolált pontja nincs (ugyanis minden nemelfajuló intervallumban van racionális és irracionális szám, ld. az 1.41 Következményt).

2. $(X,d) := (\mathbb{R}, d_1)$, $H := \mathbb{Q}$ racionális számok halmaza. Ekkor $\operatorname{int} H = \operatorname{ext} H = \emptyset$, $\partial H = H' = \overline{H} = \mathbb{R}$, izolált pontja nincs. Ugyanezek érvényesek $H = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$-ra.

10.17. Tétel. *Legyen (X,d) metrikus tér, $H \subset X$, $u \in X$. Ekkor ekvivalensek:*

1. *$u \in H'$;*

2. *$\forall r > 0$ esetén $B(u,r) \cap H$ végtelen halmaz;*

3. *$\exists (x_n) \subset H \setminus \{u\}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = u$.*

Bizonyítás. A 2. $\Rightarrow$ 1. a definícióból rögtön következik.

1. $\Rightarrow$ 3.: tekintsük a $B(u, \frac{1}{n})$ gömböket, és legyen $x_n \in \dot{B}(u, \frac{1}{n}) \cap H$, ami H' definíciója szerint létezik. Ekkor $d(x_n, u) < \frac{1}{n}$ miatt $x_n \to u$, és x_n választása miatt $x_n \neq u$, $n \in \mathbb{N}$.

3. $\Rightarrow$ 2.: mivel $\forall r > 0$ esetén létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N$-re $x_n \in B(u, r)$, ezért az állítás következik. □

10.18. Definíció. Legyen (X, d) metrikus tér, $H \subset X$. Azt mondjuk, hogy H *nyílt halmaz*, ha minden pontja belső pont, vagyis $H = \operatorname{int} H$ – ami ekvivalens azzal, hogy $H \cap \partial H = \emptyset$, vagyis H egyetlen határpontját sem tartalmazza.

Azt mondjuk, hogy H *zárt halmaz*, ha minden határpontját tartalmazza, vagyis $H = \overline{H}$.

10.19. Tétel (:-)). *A halmaz nem ajtó! Vagyis: nem igaz, hogy egy halmaz vagy nyílt vagy zárt.*

10.20. Példa. Tetszőleges (X, d) metrikus térben $\emptyset$ és X zárt is és nyílt is. $(\mathbb{R}, d_1)$-ben az $(a, b]$ intervallum se nem zárt se nem nyílt. Tekintsük az $X := (0, 1) \cup (2, 3)$ (két nyílt intervallum uniója) alaphalmazt és lássuk el a d_1 metrikával! Ebben a térben a $(0, 1)$ halmaz nyílt és zárt is.

10.21. Állítás. *Egy halmaz pontosan akkor nyílt, ha a komplementere zárt és fordítva (pontosan akkor zárt, ha a komplementere nyílt).*

Bizonyítás. Következik abból, hogy $\partial H = \partial(X \setminus H)$. □

10.22. Példa. Legyen (X, d) a diszkrét metrikus tér tetszőleges alaphalmazon. Ekkor minden $H \subset X$ halmaz nyílt és következésképpen minden halmaz zárt.

Bizonyítás. Világos, hogy $B(x, 1) = \{x\} \subset H$ minden $x \in H$ esetén. □

10.23. *Megjegyzés.* A fentiek alapján $H \subset X$ pontosan akkor nyílt, ha minden $h \in H$ ponthoz van olyan $r > 0$, hogy $B(h, r) \subset H$.

10.24. Állítás. *Ha H_1 és H_2 nyílt halmazok, akkor $H_1 \cup H_2$ is nyílt halmaz.*

Bizonyítás. Legyen $x \in H_1 \cup H_2$. Ekkor $x \in H_1$ vagy $x \in H_2$ teljesül. Legyen például $x \in H_1$. Mivel H_1 nyílt halmaz, ezért $\exists r > 0$, hogy $B(x, r) \subset H_1 \subset H_1 \cup H_2$, tehát $x \in \operatorname{int}(H_1 \cup H_2)$. □

10.25. Állítás. *Akárhány nyílt halmaz uniója nyílt.*

Bizonyítás. A fenti állításhoz hasonlóan igazolható. Ha egy pont benne van nyílt halmazok uniójában, akkor (legalább) az egyik nyílt halmazban benne van. De akkor (a nyílt halmaz definíciója szerint) egy pont körüli gömb is benne van a halmazban, így az unióban is. □

10.26. Állítás. *Ha H_1 és H_2 zárt halmazok, akkor $H_1 \cap H_2$ is zárt halmaz.*

Bizonyítás. A de Morgan-azonosság alapján

$$X \setminus (H_1 \cap H_2) = (X \setminus H_1) \cup (X \setminus H_2),$$

ami a 10.21 és az előző Állítás alapján nyílt. Ismét alkalmazva a 10.21 Állítást kapjuk, hogy $H_1 \cap H_2$ zárt. □

10.27. Állítás. *Akárhány zárt halmaz metszete zárt.*

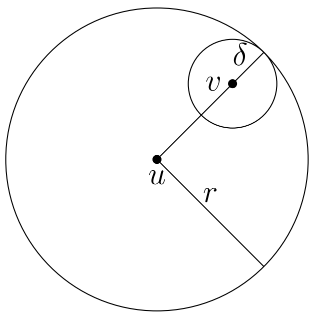
10.1.1. Példák nyílt halmazokra

10.28. Állítás. *Tetszőleges $B(u, r)$ nyílt gömb nyílt halmaz.*

Bizonyítás. Legyen $v \in B(u, r)$. Megmutatjuk, hogy $\delta := r - d(u, v) > 0$ esetén $B(v, \delta) \subset B(u, r)$. Ha $x \in B(v, \delta)$, akkor

$$d(x, u) \leq d(x, v) + d(v, u) < \delta + d(v, u) = r,$$

vagyis $x \in B(u, r)$. Ld. a 10.5. ábrát. □



10.5. ábra. $B(u, r)$ nyílt halmaz

10.29. Állítás. *$X \setminus \overline{B}(u, r)$ nyílt halmaz.*

Bizonyítás. Legyen $x \in X \setminus \overline{B}(u, r)$. Megmutatjuk, hogy $\delta := d(x, u) - r$ esetén $B(x, \delta) \subset X \setminus \overline{B}(u, r)$. Legyen $y \in B(x, \delta)$, ekkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$d(y, u) \geq d(x, u) - d(x, y) > d(x, u) - \delta = d(x, u) - d(x, u) + r = r,$$

vagyis $y \in X \setminus \overline{B}(u, r)$. □

10.30. Állítás. *Tetszőleges $H \subset X$ esetén $\operatorname{int} H$ nyílt halmaz.*

Bizonyítás. Be kell látni, hogy $\operatorname{int} H$ minden pontja belső pontja $\operatorname{int} H$-nak. Legyen $x \in \operatorname{int} H$, ekkor létezik $r > 0$, hogy $B(x,r) \subset H$. Megmutatjuk, hogy $B(x,r) \subset \operatorname{int} H$ is teljesül. Legyen $y \in B(x,r)$. A 10.28 Állítás alapján van olyan $\delta > 0$, melyre $B(y,\delta) \subset B(x,r) \subset H$, vagyis $y \in \operatorname{int} H$ is teljesül. $\square$

10.31. Következmény. *Tetszőleges $H \subset X$ esetén $\operatorname{ext} H$ nyílt halmaz (ugyanis $\operatorname{ext} H = \operatorname{int}(X \setminus H)$).*

Az alábbi tétel a számegyenes nyílt halmazait jellemzi.

10.32. Tétel. *Egy $H \subset (\mathbb{R}, d_1)$ halmaz pontosan akkor nyílt, ha előáll megszámlálható sok diszjunkt nyílt intervallum uniójaként.*

Vázlat. Egyrészt tetszőleges ilyen halmaz nyílt a 10.24 Állítás szerint. Másrészt, ha $H \subset (\mathbb{R}, d_1)$ nyílt halmaz, akkor $h \in H$ esetén definiáljuk az alábbi nyílt intervallumot:

$$I_h := \cup\{J \subset H : J \text{ nyílt intervallum, } h \in J\}\,.$$

Ilyen J intervallum van H nyíltsága miatt, és az is világos, hogy I_h egy nyílt intervallum. Meggondolható, hogy tetszőleges $h_1, h_2 \in H$ esetén

$$I_{h_1} \cap I_{h_2} = \emptyset \text{ vagy } I_{h_1} = I_{h_2}$$

teljesül. A bizonyítás hátralévő része következik abból, hogy a számegyenesen bármely diszjunkt nyílt intervallumokból álló rendszer megszámlálható (hiszen mindegyikből tetszőlegesen választva egy racionális számot azok páronként különbözőek, így legfeljebb megszámlálhatóan végtelen sokan lehetnek). $\square$

10.1.2. Példák zárt halmazokra

10.33. Állítás. *Tetszőleges $\overline{B}(u,r)$ zárt gömb zárt halmaz.*

Bizonyítás. Következik a 10.29 és a 10.21 Állításokból. $\square$

10.34. Állítás. *Tetszőleges $H \subset X$ esetén $\overline{H}$ zárt halmaz – vagyis a halmaz lezártja valóban zárt.*

Bizonyítás. Következik abból, hogy a komplementere, $X \setminus \overline{H} = \operatorname{ext} H$ nyílt a 10.31 Következmény szerint. $\square$

10.35. Állítás. *Bármely $H \subset X$ esetén ∂H zárt halmaz.*

Bizonyítás. Elég megmutatni, hogy $X \setminus \partial H = \operatorname{int} H \cup \operatorname{ext} H$ nyílt. Ez következik a 10.30, 10.31 és 10.24 Állításokból – vagyis hogy $\operatorname{int} H$ és $\operatorname{ext} H$ nyílt halmazok, és az uniójuk is az. $\square$

10.36. Állítás. *Bármely $H \subset X$ esetén H' zárt halmaz.*

Bizonyítás. Megmutatjuk, hogy $X \setminus H'$ nyílt halmaz. Legyen $u \in X \setminus H'$. Megmutatjuk, hogy van egy u körüli gömb, mely része $X \setminus H'$-nak. A 10.172. Tétel szerint u-nak van olyan $B(u, r)$ környezete, melyben csak véges sok H-beli pont található. Ekkor $B(u, r) \subset X \setminus H'$. Ugyanis, ha volna $y \in B(u, r) \cap H'$, akkor véve y-nak egy $B(u, r)$-be eső $B(y, \delta)$ gömbkörnyezetét (ld. 10.28 Állítás), erre nem teljesülhetne, hogy $B(y, \delta) \cap H$ végtelen halmaz (hiszen $B(y, \delta) \subset B(u, r)$, és $B(u, r)$-ben csak véges sok H-beli pont van), ami ellentmond annak, hogy $y \in H'$. □

A következő állítás a zárt halmazok egy karakterizációját adja.

10.37. Állítás. *Egy $F \subset X$ halmaz pontosan akkor zárt, ha minden $(x_n) \subset F$ konvergens sorozat esetén*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in F.$$

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy F zárt és legyen $(x_n) \subset F$ konvergens sorozat, $x_n \to u$. Indirekt tegyük fel, hogy $u \in X \setminus F$. Mivel ez utóbbi halmaz a 10.21 Állítás szerint nyílt, ezért létezik $r > 0$ sugár, hogy $B(u, r) \subset X \setminus F$. Ekkor a konvergencia definíciója szerint van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N$ esetén

$$x_n \in B(u, r) \subset X \setminus F,$$

ami ellentmond annak, hogy $(x_n) \subset F$.

Másodszor tegyük fel, hogy minden $(x_n) \subset F$ konvergens sorozat esetén $\lim_{n\to\infty} x_n \in F$. Indirekt tegyük fel, hogy F nem zárt, tehát legyen $u \in \partial F \cap (X \setminus F)$. Ekkor a határpont definíciója miatt minden $\frac{1}{n} > 0$ számhoz létezik egy olyan u_n pont, mely benne van az u körüli $\frac{1}{n}$ sugarú gömbben és F-ben is, vagyis

$$\exists u_n \in B(u, \frac{1}{n}) \cap F, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Az így kapott $(u_n) \subset F$ sorozatra $d(u_n, u) < \frac{1}{n}$, tehát $u_n \to u$, másrészt $u \in X \setminus F$, ami ellentmondás. □

10.2. Metrikus terek teljessége

10.38. Definíció. Legyen $(x_n) \subset (X, d)$ pontsorozat. Azt mondjuk, hogy az (x_n) sorozat *Cauchy-sorozat*, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy minden $n, m \geq N$ esetén $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

10.39. Állítás. *Ha $(x_n) \subset (X, d)$ konvergens, akkor Cauchy-sorozat.*

Bizonyítás. Mint valós esetben: ha $x_n \to u$, akkor válasszunk adott $\varepsilon > 0$ esetén $\varepsilon/2$-höz küszöbindexet, hogy $n \geq N$ esetén $d(x_n, u) < \varepsilon/2$. Ekkor $n, m \geq N$ esetén a háromszög-egyenlőtlenségből kapjuk, hogy

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, u) + d(x_m, u) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

$\square$

10.40. *Megjegyzés.* A fenti állítás megfordítása általában nem igaz! Tetszőleges metrikus térben nem feltétlenül igaz, hogy minden Cauchy-sorozat konvergens, ellentétben azzal, amit annak idején $\mathbb{R}$-ben láttunk. *Teljes metrikus tér*nek fogjuk nevezni azokat a tereket, ahol a Cauchy-sorozatok konvergensek.

10.41. Példa (Cauchy-sorozatra, amely nem konvergens)**.** Legyen $X := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $d := d_1|_X$. Tekintsük az $(\frac{1}{n}) \subset X$ sorozatot. Könnyen látható, hogy ez a megadott metrikában Cauchy-sorozat, hiszen $\mathbb{R}$-ben is az, így a szűkebb X térben is. Másrészt nem lehet konvergens, mert $\mathbb{R}$-ben létezik határértéke (a 0), ami nem eleme X-nek. (Másképp, ha lenne határértéke X-ben, akkor a bővebb $\mathbb{R}$-ben is volna, és a határértékeknek meg kellene egyezniük.)

10.42. Definíció (FONTOS!)**.** Egy (X, d) metrikus teret *teljes metrikus tér*nek mondunk, ha benne minden Cauchy-sorozat konvergens.

10.43. Példa (Teljes metrikus terekre)**.**

1. $(\mathbb{R}, d_1)$, ld. a 3.43 Tételt.

2. $(\mathbb{R}^p, d_1)$, $(\mathbb{R}^p, d_2)$ és $(\mathbb{R}^p, d_\infty)$. Ez úgy látható, ahogy a $p = 2$ esetre már meggondoltuk, ld. a 9.9 Tételt.

3. (X, d), ahol $X \neq \emptyset$ tetszőleges alaphalmaz, d a diszkrét metrika. Könnyen látható (ld. gyakorlat), hogy a diszkrét metrikus térben a Cauchy-sorozatok és a konvergens sorozatok is csak a kvázikonstans (egy indextől kezdve állandó) sorozatok.

4. A $(b(H), d_\infty)$ tér teljes metrikus tér.

   Bizonyítás. * Legyen $(f_n) \subset b(H)$ Cauchy-sorozat, vagyis minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy $n, m \geq N$ esetén

   $$d_\infty(f_n, f_m) := \sup_{h \in H} |f_n(h) - f_m(h)| < \varepsilon.$$

   Ebből következik, hogy minden $h \in H$ esetén

   $$|f_n(h) - f_m(h)| < \varepsilon,$$

tehát rögzített h-ra $(f_n(h)) \subset \mathbb{R}$ Cauchy-sorozat, így konvergens. Jelölje a határtéket

$$\lim_{n\to\infty} f_n(h) := f(h),\ h \in H. \tag{10.3}$$

Megmutatjuk, hogy (f_n) a d_∞ metrikában tart az így definiált $f \in b(H)$ függvényhez. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzített és válasszunk ε-hoz $N \in \mathbb{N}$-et úgy, hogy $n, m \geq N$ esetén

$$\sup_{h\in H} |f_n(h) - f_m(h)| < \varepsilon. \tag{10.4}$$

Rögzítsünk most egy $n \geq N$ indexet! Ekkor a (10.4) egyenlőtlenségben elvégezve az $m \to \infty$ határátmenetet, (10.3) alapján kapjuk, hogy tetszőleges $h \in H$-ra

$$|f_n(h) - f(h)| \leq \varepsilon.$$

Ebből

$$d_\infty(f_n, f) = \sup_{h\in H} |f_n(h) - f(h)| \leq \varepsilon,\ n \geq N.$$

tehát az (f_n) sorozat konvergens is a $(b(H), d_\infty)$ térben, amiből az állítás következik. □

10.44. Állítás. *Legyen (X, d) teljes metrikus tér és $M \subset X$* zárt *részhalmaz. Ekkor $d_M := d|_{M\times M}$ jelöléssel (M, d_M) teljes metrikus tér.*

Bizonyítás. Legyen $(x_n) \subset M$ Cauchy-sorozat d_M szerint. Ekkor $(x_n) \subset X$ is teljesül, és (x_n) nyilván Cauchy-sorozat d szerint is, tehát (X, d) teljessége miatt konvergens. Legyen a határértéke $u \in X$. No de a 10.37 Állítás miatt $u \in M$ is teljesül, és ezzel az állítást beláttuk. □

10.45. Következmény. *A 10.43 Példában felsoroltak alapján $([a, b], d_1)$, $(C[a, b], d_\infty)$ és $(R[a, b], d_\infty)$ teljes metrikus terek (ld. a 8.14 és a 8.15 Tételeket).*

10.46. Definíció. Legyenek (X, d) és (Y, ρ) tetszőleges metrikus terek. Azt mondjuk, hogy az $f : X \to Y$ leképezés *kontrakció*, ha létezik $q \in [0, 1)$, hogy

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) \leq q \cdot d(x_1, x_2),\ x_1, x_2 \in X.$$

Ez a definíció szemléletesen azt mondja, hogy a kontrakció olyan leképezés, ami minden távolságot q-szorosára kicsinyít vagy más szóval „összehúz”.

10.47. Tétel (Banach-féle fixponttétel)**.** *Legyen (X, d)* teljes *metrikus tér, $f : X \to X$ kontrakció, ahol $\mathcal{D}(f) = X$. Ekkor f-nek létezik egyetlen fixpontja, vagyis $\exists! u \in X$, melyre*

$$f(u) = u.$$

Továbbá, ez a fixpont megkapható tetszőleges $x_0 \in X$ pontból kiindulva az $x_{n+1} := f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ rekurzióval értelmezett sorozat határértékeként.

Bizonyítás. Legyen $x_0 \in X$ tetszőleges, és indukcióval, $x_{n+1} := f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Belátjuk, hogy (x_n) Cauchy-sorozat, ezért konvergens, és határértéke maga a fixpont. Az $(x_n) \subset X$ sorozatra, $n > m$ esetén a metrikára vonatkozó háromszög-egyenlőtlenségből adódik, hogy

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + d(x_{m+1}, x_m). \tag{10.5}$$

Másrészt, az (x_n) sorozat definíciója szerint és kihasználva, hogy f kontrakció, kapjuk, hogy minden $k = m+1, \ldots, n$ esetén

$$\begin{aligned} d(x_k, x_{k-1}) &= d(f(x_{k-1}), f(x_{k-2})) \leq q \cdot d(x_{k-1}, x_{k-2}) = \\ &= d(f(x_{k-2}), f(x_{k-3})) \leq q^2 \cdot d(x_{k-2}, x_{k-3}) \leq \cdots \\ &\leq q^{k-1} d(x_1, x_0). \end{aligned} \tag{10.6}$$

A (10.5) és a (10.6) alapján

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq \left(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q^m\right) \cdot d(x_1, x_0) = \frac{q^m - q^n}{1-q} \cdot d(x_1, x_0). \end{aligned} \tag{10.7}$$

Mivel $q \in [0, 1)$, ezért $q^n \to 0$, így

$$a_n := \frac{q^n}{1-q} \cdot d(x_1, x_0) \to 0, \quad n \to \infty$$

is teljesül. Tehát az (a_n) számsorozat konvergens, így a 3.43 Tétel alapján Cauchy-sorozat is. Ezért minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy $n > m \geq N$ esetén

$$|a_n - a_m| = \frac{q^m - q^n}{1-q} \cdot d(x_1, x_0) < \varepsilon.$$

A (10.7) egyenlőtlenség miatt ilyen n, m indexekre

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

is igaz, tehát $(x_n) \subset X$ is Cauchy-sorozat, és X teljessége miatt konvergens. Legyen

$$u := \lim_{n \to \infty} x_n.$$

Megmutatjuk, hogy u fixpontja f-nek. Mivel

$$\begin{aligned} 0 \leq d(u, f(u)) \leq d(u, x_n) + d(x_n, f(u)) &= d(u, x_n) + d(f(x_{n-1}), f(u)) \\ &\leq d(u, x_n) + q \cdot d(x_{n-1}, u) \to 0, n \to \infty, \end{aligned}$$

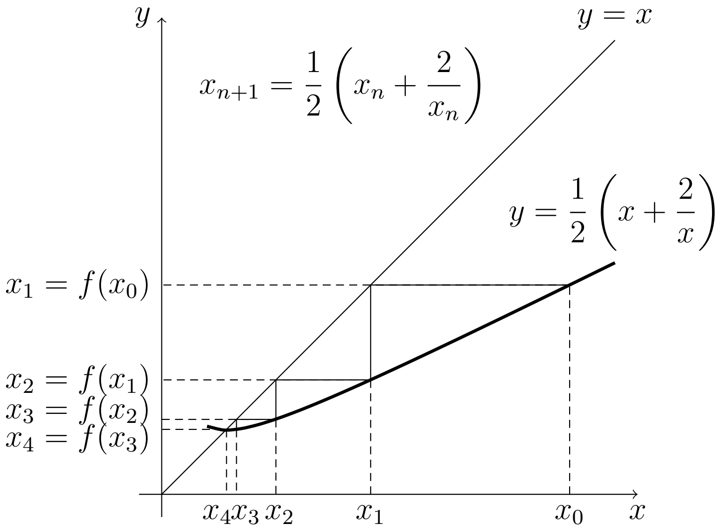
ezért $d(u, f(u)) = 0$, tehát $u = f(u)$. Ha $v = f(v)$ is teljesül, akkor

$$0 \leq d(u, v) = d(f(u), f(v)) \leq q \cdot d(u, v),$$

ami $0 \leq q < 1$ miatt csak úgy lehet, hogy $d(u, v) = 0$, vagyis $u = v$. □

10.48. Példa (Newton-féle gyökkeresési eljárás (babiloni módszer))**.** Legyen $X := [1, \infty)$ ellátva a (szokásos) d_1 metrikával. Mivel $(\mathbb{R}, d_1)$ teljes, ezért a 10.44 Állítás alapján (X, d_1) is az. Definiálja

$$f(x) := \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right).$$



10.6. ábra. Newton-féle gyökkeresési eljárás lépései

Először meggondoljuk, hogy $f : X \to X$. Legyen $x \in [1, \infty)$, megmutatjuk, hogy $f(x) \in [1, \infty)$. A számtani-mértani közép közti egyenlőtlenségből adódik, hogy

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \geq \sqrt{x \cdot \frac{2}{x}} = \sqrt{2} \geq 1.$$

Másrészt, ha $x, y \in X$, akkor

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left|\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x} - y - \frac{2}{y}\right)\right| = \left|\frac{1}{2}\left(x - y + \frac{2(y-x)}{xy}\right)\right| \\ &= \left|\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{xy}\right)(x - y)\right| \leq \frac{1}{2}|x - y|, \end{aligned}$$

tehát $f : X \to X$ kontrakció $q = \frac{1}{2}$ konstanssal. Ezért a 10.47 Tétel szerint a tetszőleges $x_0 \in [1, \infty)$ kezdőpontból induló,

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$$

rekurzióval definiált sorozat az f fixpontjához, vagyis az

$$u = \frac{1}{2}\left(u + \frac{2}{u}\right)$$

egyenlet megoldásához, $u = \sqrt{2}$-höz tart.

10.49. *Megjegyzés.* A 10.47 Banach-féle fixponttételben nagyon lényeges, hogy a kontrakció definíciójában $0 \leq q < 1$! Ugyanis, például az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ leképezésre

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|,$$

tehát $q = 1$, de nyilván nincs fixpontja $\mathbb{R}$-en.

10.3. Kompaktság metrikus terekben

10.50. Definíció. Legyen (X, d) metrikus tér. Egy $\emptyset \neq H \subset X$ halmaz *átmérője*

$$\operatorname{diam} H := \sup \{d(x, y) : x, y \in H\}.$$

$\operatorname{diam} \emptyset := 0$.

Fontos, hogy a fenti definícióban sup helyett nem írhatunk max-ot, pl. $(\mathbb{R}, d_1)$-ben egy $I = (a, b)$ intervallum átmérője $b - a$, de nincs két olyan pontja, aminek ennyi lenne a távolsága. Másrészt ha (X, d) a diszkrét metrikus tér, akkor $\operatorname{diam}(B(x, \frac{1}{2})) = 0$ bármely $x \in X$ esetén.

10.51. Definíció. Legyen (X, d) metrikus tér. Egy $H \subset X$ halmazt *korlátos*nak mondunk, ha $\operatorname{diam} H < \infty$.

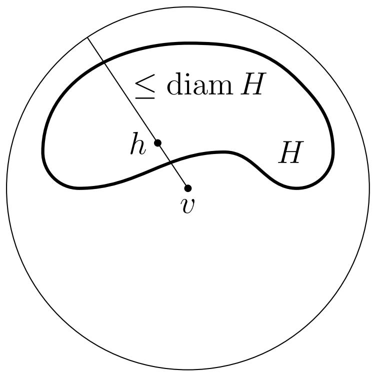
A következő tétel azt mondja, hogy egy halmaz pontosan akkor korlátos, ha belefoglalható egy (tetszőleges pont körüli) gömbbe.

10.52. Tétel. *Legyen (X, d) metrikus tér. Egy $\emptyset \neq H \subset X$ esetén ekvivalensek:*

1. *H korlátos;*

2. *$\exists u \in X$ és $\exists r > 0$, hogy $H \subset B(u, r)$;*

3. *$\forall v \in X$ esetén $\exists \rho > 0$, hogy $H \subset B(v, \rho)$.*



10.7. ábra. Korlátos halmaz belefoglalható adott középpontú gömbbe

Bizonyítás. A 3. $\Rightarrow$ 2. nyilvánvaló. A 2. $\Rightarrow$ 1. abból következik, hogy 2. fennállása esetén $\operatorname{diam} H \le 2r$ teljesül.

1. $\Rightarrow$ 3.: legyen $v \in X$ adva, és válasszunk egy tetszőleges $h \in H$ pontot. Legyen $\rho := \operatorname{diam} H + d(h, v) + 1$. Ekkor bármely $x \in H$ esetén

$$d(x, v) \le d(x, h) + d(h, v) \le \operatorname{diam} H + d(h, v) < \rho,$$

tehát $H \subset B(v, \rho)$. □

A fenti állításból (is) látszik, hogy a korlátosság fogalma mennyire metrika-függő fogalom. Ha például $\mathbb{R}^2$-en tekintjük a diszkrét metrikát, ebben minden halmaz korlátos lesz, hiszen az egész tér belefoglalható bármely pont körüli, tetszőleges 1-nél nagyobb sugarú nyílt gömbbe. A „szokásos” euklideszi metrikában azonban nyilvánvaló, hogy nem minden halmaz korlátos.

10.53. Definíció. Legyen (X, d) metrikus tér. Egy $H \subset X$ *halmazt (sorozat)kompakt*nak mondunk, ha bármely H-beli sorozatnak van H-beli ponthoz konvergáló részsorozata. Az (X, d) metrikus tér *(sorozat)kompakt*, ha benne X sorozatkompakt halmaz, vagyis tetszőleges sorozatnak van konvergens részsorozata.

10.54. Példa. A 3.36 Bolzano–Weierstrass-tétel alapján az $(\mathbb{R}, d_1)$ térben minden $[a, b]$ korlátos és zárt intervallum sorozatkompakt.

10.55. Tétel. *Legyen (X, d) metrikus tér. Ha $H \subset X$ sorozatkompakt, akkor H korlátos és zárt halmaz.*

Bizonyítás. Először a zártságot bizonyítjuk. A 10.37 Állítás alapján elég megmutatni, hogy bármely H-beli konvergens sorozat határértéke H-ban van. Legyen $(x_n) \subset H$ konvergens sorozat. Mivel H sorozatkompakt, ezért minden H-beli sorozatnak, így (x_n)-nek is van H-ban lévő ponthoz konvergáló részsorozata – no de akkor $\lim x_n \in H$ is teljesül, hiszen $\lim x_n$ megegyezik minden részsorozatának a határértékével.

Másodszor tegyük fel indirekt, hogy H sorozatkompakt, de nem korlátos. Legyen $x_1 \in H$ tetszőleges. Válasszunk $x_2 \in H \setminus B(x_1, 1)$ pontot – ilyen létezik az indirekt feltevés és a 10.52 Tétel szerint. Indukcióval, az n-edik lépésben válasszunk

$$x_n \in H \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} B(x_i, 1) \right)$$

pontot – ilyen létezik, mert világos, hogy véges sok gömb uniója, $\cup_{i=1}^{n-1} B(x_i, 1)$ korlátos. Kaptunk tehát egy $(x_n) \subset H$ sorozatot, melyre teljesül, hogy

$$d(x_n, x_i) \geq 1, \; i = 1, \ldots, n-1. \tag{10.8}$$

Ebből a sorozatból nem választható ki konvergens részsorozat, hiszen egyetlen részsorozata sem Cauchy-sorozat (mivel tetszőleges tagjának bármely kisebb indexű tagtól való eltérése nagyobb vagy egyenlő mint 1). $\square$

10.56. Példa. * Korlátos és zárt, de nem sorozatkompakt halmazra.

Legyen

$$X := \ell^\infty = \{(x_n) : (x_n) \text{ korlátos, valós sorozat}\}.$$

A $d : X \times X \to [0, \infty)$,

$$d(x, y) := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|$$

függvényről könnyen látható, hogy metrika. Álljon a H halmaz azon sorozatokból, melyeknek pontosan egy eleme 1, a többi 0, vagyis a

$$\begin{aligned} e_1 &:= (1, 0, 0, \ldots) \\ e_2 &:= (0, 1, 0, \ldots) \\ &\vdots \\ e_n &:= (0, 0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{n}, 0 \ldots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

jelöléssel

$$H := \{e_i : i \in \mathbb{N}\}.$$

Világos, hogy $H \subset X$ és $H \subset \overline{B}(\underline{0}, 1)$, ahol most $\underline{0}$ a konstans 0 sorozatot jelöli, tehát H korlátos halmaz. Mivel $d(e_i, e_j) = 1$, ha $i \neq j$, ezért a H elemei körüli gömbökre

$$B\left(e_i, \frac{1}{2}\right) \cap B\left(e_j, \frac{1}{2}\right) = \emptyset, \; i \neq j$$

teljesül. Ebből következik, hogy ha $x \in \partial H$, akkor $x \in B(e_j, \frac{1}{2})$ valamely $j \in \mathbb{N}$ számra. Ha $x \neq e_j$ volna, akkor létezne x körül olyan gömb, mely nem tartalmazza e_j-t, így nem lehetne $x \in \partial H$. Ebből kapjuk, hogy $\partial H \subset H$ (sőt, $\partial H = H$), tehát H zárt halmaz is. Másrészt $d(e_i, e_j) = 1$, $i \neq j$ miatt az (e_n) sorozatból nem választható ki konvergens részsorozat (mivel egyetlen részsorozata sem Cauchy-sorozat), tehát H nem sorozatkompakt.

10.57. Tétel. *Sorozatkompakt halmaz zárt részhalmaza sorozatkompakt.*

Bizonyítás. Legyen H sorozatkompakt és $G \subset H$ zárt halmaz, $(x_n) \subset G$ tetszőleges sorozat. Mivel $(x_n) \subset H$ is teljesül, azért a sorozatnak van olyan (x_{n_k}) részsorozata, mely egy H-beli ponthoz konvergál. No de a 10.37 Állítás szerint ez a határérték G-ben van, amivel az állítást beláttuk. □

10.58. Tétel. *Az $(\mathbb{R}^p, d_1)$, $(\mathbb{R}^p, d_2)$ és $(\mathbb{R}^p, d_\infty)$ terekben minden korlátos és zárt halmaz sorozatkompakt.*

Bizonyítás. Legyen $H \subset (\mathbb{R}^p, d_k)$ ($k = 1, 2$, vagy ∞) korlátos és zárt halmaz, továbbá $(x_n) \subset H$ sorozat. Mivel (x_n) a feltétel szerint korlátos is, ezért a 10.12 Bolzano–Weierstrass-tétel miatt (x_n)-nek van konvergens részsorozata. No de H zárt is, ezért a 10.37 Állítás alapján e részsorozat határértéke is H-ban van, amivel a bizonyítás kész. □

10.59. Tétel. *Az $(\mathbb{R}^p, d_1)$, $(\mathbb{R}^p, d_2)$ és $(\mathbb{R}^p, d_\infty)$ terekben egy halmaz pontosan akkor sorozatkompakt, ha korlátos és zárt.*

Bizonyítás. Következik az előző és a 10.55 Tételekből. □

11. fejezet

Folytonosság, határérték metrikus terekben

Legyenek az alábbiakban (X_i, d_i), $i = 1, 2$ metrikus terek, $\mathcal{D}(f) \subseteq X_1$, $f : X_1 \to X_2$. Az (X_1, d_1) térbeli gömböket B_1-el, az (X_2, d_2) térbeli gömböket B_2-vel jelöljük. (Vigyázat! Ebben a fejezetben d_1 és d_2 tetszoleges metrikákat jelöl!)

11.1. Definíció. Legyen $f : X_1 \to X_2$, $u \in \mathcal{D}(f)'$, $v \in X_2$. Azt mondjuk, hogy f *határértéke az u helyen v*, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy

$$\text{minden } x \in \mathcal{D}(f),\ x \neq u,\ d_1(x, u) < \delta \text{ esetén } d_2(f(x), v) < \varepsilon.$$

Másképpen: minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy

$$\text{minden } x \in \dot{B}_1(u, \delta) \cap \mathcal{D}(f) \text{ esetén } f(x) \in B_2(v, \varepsilon).$$

Jelölés:

$$\lim_u f = v \text{ vagy } \lim_{x \to u} f(x) = v.$$

11.2. Definíció. Azt mondjuk, hogy f *folytonos az $u \in \mathcal{D}(f)$ helyen* vagy *az u pontban*, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy

$$\text{minden } x \in \mathcal{D}(f),\ d_1(x, u) < \delta \text{ esetén } d_2(f(x), f(u)) < \varepsilon.$$

Másképpen: minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy

$$\text{minden } x \in B_1(u, \delta) \cap \mathcal{D}(f) \text{ esetén } f(x) \in B_2(f(u), \varepsilon).$$

11.3. Definíció. Azt mondjuk, hogy f *folytonos a H halmazon*, ha annak minden pontjában folytonos.

A valós függvényeknél tanultakhoz analóg módon megfogalmazhatunk átviteli elveket.

11.4. Tétel (Átviteli elv határértékre)**.** *Legyen* $f : X_1 \to X_2$*,* $u \in \mathcal{D}(f)'$*,* $v \in X_2$*. Ekkor ekvivalensek:*

1. $\exists \lim_u f = v$*;*
2. *minden* $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$*,* $x_n \neq u$*,* $x_n \to u$ *sorozat esetén* $f(x_n) \to v$*;*
   2.* *minden* $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$*,* $x_n \neq u$*,* $x_n \to u$ *sorozat esetén* $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergens.*

Bizonyítás. A valós függvényekre vonatkozó átviteli elvhez hasonlóan történik.
1. $\Rightarrow$ 2.: Legyen $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$, $x_n \neq u$, $x_n \to u$, valamint $\varepsilon > 0$. Ekkor a határérték definíciója miatt létezik $\delta > 0$, hogy minden $x \in \mathcal{D}(f)$, $d_1(x,u) < \delta$ esetén $d_2(f(x), v) < \varepsilon$. No de a konvergencia miatt $\delta > 0$-hoz létezik $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq N$ indexre $d_1(x_n, u) < \delta$. Tehát $n \geq N$-re $d_2(f(x_n), v) < \varepsilon$, így $f(x_n) \to v$.
2. $\Rightarrow$ 1.: Indirekt tegyük fel, hogy $\lim_u f$ nem létezik vagy nem v. Ekkor létezik olyan $\varepsilon > 0$, melyhez minden $n \in \mathbb{N}$ esetén találunk $x_n \in \dot{B}_1(u, \frac{1}{n}) \cap \mathcal{D}(f)$ elemet, hogy $f(x_n) \notin B_2(v, \varepsilon)$. Így kaptunk egy $x_n \to u$, $x_n \neq u$ sorozatot (hiszen $d_1(x_n, u) < \frac{1}{n} \to 0$), melyre $f(x_n) \nrightarrow v$, ez ellentmondás.
A 2.* ekvivalenciájának bizonyítása ehhez hasonló. □

11.5. Tétel (Átviteli elv folytonosságra)**.** *Ekvivalensek:*

1. f *folytonos* u*-ban;*
2. *minden* $(x_n) \subset \mathcal{D}(f)$*,* $x_n \to u$ *sorozat esetén* $f(x_n) \to f(u)$*.*

Bizonyítás. A határértékre vonatkozó átviteli elvhez, illetve a valós függvényeknél tanultakhoz hasonlóan történik. □

11.6. Definíció. Az $f : X_1 \to X_2$ függvényről azt mondjuk, hogy *Lipschitz-tulajdonságú*, ha létezik $L > 0$, hogy

$$d_2(f(x), f(y)) \leq L \cdot d_1(x, y) \text{ minden } x, y \in \mathcal{D}(f) \text{ esetén.}$$

Világos, hogy a 10.46 Definícióban bevezetett kontrakció Lipschitz-tulajdonságú $L = q$ választással.

11.7. Állítás. *Ha* f *Lipschitz-tulajdonságú, akkor folytonos is.*

Bizonyítás. Világos, hogy $\varepsilon > 0$-hoz $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$ választás jó. □

11.8. Példa (Metrikus tereken értelmezett folytonos függvényekre)**.**

1. Az
   $$+, -, \cdot, \div : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
   (összeadás, kivonás, szorzás, osztás) függvények folytonosak (bizonyítás: átviteli elvvel és a valós sorozatoknál tanultak segítségével, $\mathbb{R}^2$-en vehetjük a d_1, d_2, vagy d_∞ metrikát).

2. Ha (X_i, d_i), $i = 1, 2$ tetszőleges metrikus terek, $c \in X_2$ adott, akkor az $f(x) := c$, $x \in X_1$ konstans függvény folytonos.

3. Legyen $a = (a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^p$ adva. Az

$$A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}, \quad Ax := \sum_{k=1}^{p} a_k x_k = \langle a, x \rangle, \quad x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$$

lineáris függvény folytonos az $(\mathbb{R}^p, d_i)$, $i = 1, 2, \infty$ terekben. Vegyük először $\mathbb{R}^p$-n a d_∞ metrikát!

$$\begin{aligned} |Ax - Ay| &= \left| \sum_{k=1}^{p} a_k x_k - \sum_{k=1}^{p} a_k y_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{p} a_k \cdot (x_k - y_k) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{p} |a_k| \cdot |x_k - y_k| \leq \max_{k \in \{1, \ldots, p\}} |x_k - y_k| \cdot \sum_{k=1}^{p} |a_k| = L_\infty \cdot d_\infty(x, y) \end{aligned}$$

vagyis A Lipschitz-tulajdonságú $L_\infty := \sum_{k=1}^{p} |a_k|$ konstanssal. Mivel a 10.5 Megjegyzés alapján $d_i(x, y) \geq d_\infty(x, y)$, $i = 1, 2$, ezért

$$|Ax - Ay| \leq L_\infty \cdot d_i(x, y), \quad i = 1, 2$$

is teljesül, így A Lipschitz-tulajdonságú az $(\mathbb{R}^p, d_i)$, $i = 1, 2$ terekben is a fenti L_∞ konstanssal.

4. Tekintsük az

$$F : (R[a, b], d_\infty) \to \mathbb{R}, \quad Ff := \int_a^b f, \quad f \in R[a, b]$$

lineáris leképezést. Ennek folytonosságát kétféleképpen is bizonyíthatjuk. Az átviteli elv segítségével: láttuk (8.15 Tétel), hogy ha $f_n \to f$ a d_∞ metrikában – vagyis $f_n \hookrightarrow f$ –, akkor

$$Ff_n = \int_a^b f_n \to \int_a^b f = Ff.$$

Másrészt:

$$\begin{aligned} |Ff - Fg| &= \left| \int_a^b f - \int_a^b g \right| = \left| \int_a^b (f - g) \right| \\ &\leq (b - a) \cdot \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| = L \cdot d_\infty(f, g), \end{aligned}$$

vagyis F Lipschitz-tulajdonságú.

Tekintsük most azt az esetet, mikor $X_1 = \mathbb{R}^p$, $X_2 = \mathbb{R}^q$, tehát $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ p változós, q dimenziós értékkészlettel rendelkező függvény.

11.9. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $i \in \{1, \ldots, q\}$. Az f függvény *i-edik koordinátafüggvénye*

$$f_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}, \quad f_i(x) = [f(x)]_i, \quad x \in \mathcal{D}(f),$$

ahol $[f(x)]_i \in \mathbb{R}$ jelöli az $f(x) \in \mathbb{R}^q$ vektor i-edik koordinátáját. Így $f = (f_1, \ldots, f_q)$.

Könnyen meggondolható a következő állítás.

11.10. Állítás. *Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $a \in \mathcal{D}(f)$. Az f függvény pontosan akkor folytonos a-ban, ha minden $f_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, q$ koordinátafüggvénye folytonos a-ban.*

A továbbiakban az egyváltozós függvények határértékérol és folytonosságáról tanult fontosabb tételek metrikus terek között ható függvényekre való általánosításával foglalkozunk.

11.11. Tétel (Kompozíciófüggvény határértéke)**.** *Legyenek (X_i, d_i) metrikus terek, $i = 1, 2, 3$, $f_1 : X_1 \to X_2$, $f_2 : X_2 \to X_3$ függvények. Továbbá legyen $u_1 \in \mathcal{D}(f_1)'$. Tegyük fel, hogy létezik*

$$\lim_{u_1} f_1 := u_2.$$

Az alábbi két állítás bármelyikébol következik, hogy

$$\exists \lim_{u_1} (f_2 \circ f_1) = u_3.$$

1. *$u_2 \in \mathcal{D}(f_2)$ és f_2 folytonos u_2-ben, $f_2(u_2) = u_3$;*
2. *$u_2 \in \mathcal{D}(f_2)'$ és $\exists \lim_{u_2} f_2 := u_3$, továbbá f_1 injektív az u_1 egy környezetében (vagy $u_2 \notin \mathcal{R}(f_1)$).*

Bizonyítás. Legyen $(x_n) \subset \mathcal{D}(f_2 \circ f_1)$, $x_n \to u_1$, $x_n \neq u_1$ tetszőleges sorozat. Ekkor $(x_n) \subset \mathcal{D}(f_1)$ is teljesül. Az f_1 u_1-beli határértékére vonatkozó átviteli elv alapján, $f_1(x_n) \to u_2$.

Az 1. esetben az f_2 folytonosságára vonatkozó átviteli elv miatt $f_2(f_1(x_n)) \to f_2(u_2) = u_3$

Az 2. esetben elég nagy n-re $f_1(x_n) \neq u_2$, tehát alkalmazható az f_2 függvény u_2-beli határértékére vonatkozó átviteli elv, amiből az állítás következik. □

11.12. Tétel (Kompozíciófüggvény folytonossága)**.** *Legyenek (X_i, d_i) metrikus terek, $i = 1, 2, 3$, valamint $f_1 : X_1 \to X_2$, $f_2 : X_2 \to X_3$ függvények. Tegyük fel, hogy f_1 folytonos az $u_1 \in \mathcal{D}(f_1)$ helyen, f_2 folytonos az $u_2 := f_1(u_1) \in \mathcal{D}(f_2)$ helyen. Ekkor $f_2 \circ f_1 : X_1 \to X_3$ folytonos az u_1 helyen.*

Bizonyítás. A 11.5 Tételbeli átviteli elvet fogjuk alkalmazni. Legyen $(x_n) \subset \mathcal{D}(f_2 \circ f_1)$, $x_n \to u_1$ tetszőleges sorozat. Ekkor $(x_n) \subset \mathcal{D}(f_1)$ is teljesül. Az f_1 folytonosságára vonatkozó átviteli elv alapján, $f_1(x_n) \to f_1(u_1) = u_2$. Az f_2 függvény u_2-beli folytonosságát kihasználva

$$f_2(f_1(x_n)) \to f_2(f_1(u_1)) = f_2(u_2),$$

amibol az állítás következik. □

11.13. Példa. Az átviteli elvből és az előző tételekből könnyen látható, hogy minden (n változós) polinomfüggvény és racionális törtfüggvény, valamint minden komplex polinomfüggvény folytonos.

A következő tétel a korábban látott a 4.56 Weierstrass-tétel általánosítása metrikus terek között ható folytonos függvényekre.

11.14. Tétel (Általánosított Weierstrass-tétel)**.** *Legyenek* (X_i, d_i), $i = 1, 2$ *metrikus terek,* $K \subset X_1$ sorozatkompakt *halmaz,* $f : K \to X_2$ *folytonos függvény, amelyre* $\mathcal{D}(f) = K$*. Ekkor*

$$f(K) := \{f(x) : x \in K\} \subset X_2$$

halmaz is sorozatkompakt.

Bizonyítás. Legyen $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset f(K)$ adott sorozat. Meg kell mutatnunk, hogy kiválasztható belőle konvergens részsorozat, melynek határértéke $f(K)$-ban van. No de tudjuk, hogy minden n-re $y_n = f(x_n)$ valamely $x_n \in K$ pontra. Az így kapott $(x_n) \subset K$ sorozatból (K sorozatkompaktsága miatt) kiválasztható $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset K$ konvergens részsorozat, melyre

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} := u \in K.$$

Másrészt f folytonos K-n, tehát az átviteli elv miatt

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(u) \in f(K)$$

is teljesül. Tehát

$$y_{n_k} := f(x_{n_k}), \quad k \in \mathbb{N}$$

megfelelo részsorozat. □

11.15. *Megjegyzés.* A korábban látott 3.36 Bolzano–Weierstrass-tétel szerint egy $[a, b] \subset \mathbb{R}$ korlátos és zárt intervallum sorozatkompakt. A fenti tétel alapján egy $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény értékkészlet-halmaza sorozatkompakt, a 4.52 Bolzano–Darboux-tétel alapján pedig tudjuk, hogy intervallum. Így a 10.55 Tétel szerint az $\mathcal{R}(f)$ értékkészlet-halmaz egy korlátos és zárt intervallum, tehát van legnagyobb és legkisebb eleme. Ez pedig éppen a 4.56 Weierstrass–tétel.

Az alábbi definíció és az azt követő tétel szintén az egyváltozós függvényeknél megismertek általánosítása.

11.16. Definíció. Legyenek (X_i, d_i), $i = 1, 2$ metrikus terek. Azt mondjuk, hogy az $f : X_1 \to X_2$ függvény *egyenletesen folytonos*, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta > 0$, hogy

$$\text{minden } x, y \in \mathcal{D}(f),\ d_1(x, y) < \delta \text{ esetén } d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

11.17. *Megjegyzés.* Világos, hogy ha egy függvény egyenletesen folytonos H-n, akkor ott folytonos. Továbbá minden Lipschitz-tulajdonságú függvény egyenletesen is folytonos (ε-hoz $\delta = \varepsilon/2$ választás megfelel).

11.18. Tétel (Általánosított Heine-tétel)**.** *Legyenek* (X_i, d_i), $i = 1, 2$ *metrikus terek,* $K \subset X_1$ sorozatkompakt *halmaz,* $f : K \to X_2$ *folytonos függvény, amelyre* $\mathcal{D}(f) = K$*. Ekkor* f *egyenletesen folytonos* K*-n.*

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy f nem egyenletesen folytonos K-n. Ekkor létezik olyan $\varepsilon > 0$, melyhez minden $n \in \mathbb{N}$ esetén vannak olyan $x_n, y_n \in K$ pontok, melyekre

$$d_1(x_n, y_n) < \frac{1}{n}, \quad \text{de} \quad d_2(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon.$$

Mivel az így definiált $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ sorozat egy sorozatkompakt halmazban van, ezért létezik $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergens részsorozat, melyre

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} := u \in K.$$

A feltétel alapján

$$d_1(x_{n_k}, y_{n_k}) < \frac{1}{n_k} \to 0,\ k \to \infty,$$

ezért

$$\lim_{k \to \infty} y_{n_k} = u$$

is teljesül. Az f függvény folytonossága miatt (a 11.5 Tételbeli átviteli elv szerint)

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \to \infty} f(y_{n_k}) = f(u)$$

adódik, ami ellentmond a

$$d_2(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geq \varepsilon, \quad k \in \mathbb{N}$$

feltételnek. $\square$

12. fejezet

Jordan-mérték $\mathbb{R}^p$-n

Ebben a fejezetben a terület-, ill. térfogatfogalmat értelmezzük matematikailag.

Először az $p = 2$ (sík) esettel foglalkozunk. Olyan m *mérték*et akarunk definiálni, amelyre m értelmezési tartományának elemei a sík bizonyos, ún. *mérhető* részhalmazai, és ha $H \subset \mathbb{R}^2$ mérhető, akkor $m(H) \geq 0$. A mérhető halmazoktól, ill. az m mértéktől az alábbi tulajdonságok teljesülését várjuk el:

1. az $\emptyset$ üres halmaz mérhető, $m(\emptyset) = 0$;
2. m egybevágóságra invariáns: ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ távolságtartó leképezés és H mérhető, akkor $f(H)$ is mérhető és $m(H) = m(f(H))$;
3. m additív: ha H és G mérhetőek és egymásba nem nyúlók (vagyis $\operatorname{int} H \cap \operatorname{int} G = \emptyset$), akkor $H \cup G$ is mérhető és $m(H \cup G) = m(H) + m(G)$;
4. a Q egységnégyzet mérhető és $m(Q) = 1$.[1]

Az alábbiakban mutatunk egy konstrukciót egy ilyen mérték előállítására. Előzetesen megjegyezzük, hogy egyrészt léteznek más, a fenti tulajdonságokat kielégítő mértékek is, másrészt létezik számos konstrukció az általunk felépített *Jordan-mérték*re is.

Kiindulásképpen definiáljuk a Q, koordinátatengelyekkel párhuzamos, egységnyi oldalú $[0, 1] \times [0, 1]$ négyzet területét 1-nek, vagyis legyen

$$\operatorname{ter} Q = 1.$$

Később meg fogjuk mutatni, hogy a megkonstruált m mérték esetén is $m(Q) = 1$ lesz (ld. 4. tulajdonság). A mérték felépítéséből következni fog a többi tulajdonság is. Az 1.

[1] Felmerül a kérdés, hogy vajon miért vannak egyáltalán mérhető és nem mérhető halmazok, vagyis miért nem fogunk a sík minden részhalmazához mértéket rendelni. Ennek tárgyalása túlhaladja jelen jegyzet kereteit. Itt most csak annyit említünk meg, hogy „nagyon” nehéz lenne a sík minden részhalmazán értelmezett, a kívánt tulajdonságoknak megfelelő m függvényt definiálni...

nyilvánvaló módon, a 3.-at a 12.10 Állításban bizonyítjuk, a 2.-t pedig itt nem bizonyítjuk.

Tekintsük a sík koordinátatengelyekkel párhuzamos, $\frac{1}{2^n}$ oldalhosszúságú négyzetekre való rácsfelbontását, a tengelyekből „kiindulva”. Ezen kis négyzetek területét $\frac{1}{4^n}$-nak definiáljuk. Legyen $\emptyset \neq H \subset \mathbb{R}^2$ *korlátos* halmaz. Jelölje $\overline{H}_n$ azon kis zárt négyzetek *unióját* a rácsból, melyek belemetszenek H-ba (vigyázat! itt a felülvonás nem metrikus értelemben vett lezárást jelent!). Továbbá, jelölje $\underline{H}_n$ azon kis zárt négyzetek *unióját*, melyek részei $\operatorname{int} H$-nak. Ezek $\operatorname{ter}(\overline{H}_n)$, ill. $\operatorname{ter}(\underline{H}_n)$ területe legyen az unióban szereplő négyzetek száma (ez H korlátossága miatt véges) szorozva $\frac{1}{4^n}$-el. Világos, hogy $\underline{H}_n \subset \overline{H}_n$, így

$$\operatorname{ter}(\underline{H}_n) \leq \operatorname{ter}(\overline{H}_n), \; n \in \mathbb{N}. \tag{12.1}$$

Az is könnyen látható, hogy ha n-et növeljük, a rácsfelbontás sűrűsödik: az $n+1$-dik lépésben az n-dik rácsfelbontáshoz tartozó kis négyzetek mindegyikét 4 egyenlő részre osztjuk. Így könnyen meggondolható, hogy

$$\underline{H}_n \subset \underline{H}_{n+1} \text{ és } \overline{H}_n \supset \overline{H}_{n+1},$$

másrészt

$$\operatorname{ter}(\underline{H}_n) \leq \operatorname{ter}(\underline{H}_{n+1}) \text{ és } \operatorname{ter}(\overline{H}_n) \geq \operatorname{ter}(\overline{H}_{n+1}).$$

Ebből következik, hogy $(\operatorname{ter}(\underline{H}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő, $\big(\operatorname{ter}(\overline{H}_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó, és a H halmaz korlátossága miatt korlátos sorozatok.

12.1. Definíció. A fentiek alapján definiálhatjuk tetszőleges $H \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmaz *belső*, ill. *külső mértékét* mint

$$\underline{m}(H) := \lim_{n\to\infty} \operatorname{ter}(\underline{H}_n), \quad \overline{m}(H) := \lim_{n\to\infty} \operatorname{ter}(\overline{H}_n).$$

A (12.1) egyenlőtlenség alapján

$$\underline{m}(H) \leq \overline{m}(H).$$

12.2. Definíció. Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ korlátos halmaz. Azt mondjuk, hogy H *(Jordan-)mérhető*, ha

$$\underline{m}(H) = \overline{m}(H) =: m(H),$$

ahol $m(H)$ jelöli a H *Jordan-mértékét.*

12.3. Példa (Egységnégyzet mértéke)**.** Megmutatjuk, hogy teljesül a mértéktől megkívánt 4. tulajdonság, vagyis a $Q = [0,1] \times [0,1]$ egységnégyzet mérhető és $m(Q) = 1$. Könnyen meggondolható, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\operatorname{ter}(\underline{Q}_n) = 1 - \frac{4}{2^n} + \frac{1}{4^{n-1}}, \quad \operatorname{ter}(\overline{Q}_n) = 1 + \frac{4}{2^n} + \frac{1}{4^{n-1}}.$$

Így
$$\underline{m}(Q) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{ter}(\underline{Q}_n) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{ter}(\overline{Q}_n) = \overline{m}(Q) = 1,$$
tehát Q mérhető és $m(Q) = 1$. Hasonlóan meggondolható, hogy a konstrukcióban szereplő $\frac{1}{2^n}$ oldalú kis négyzetek is mérhetők és mértékük $\frac{1}{4^n}$. Ebből következik (a későbbiekben belátott 12.9 Következmény alapján), hogy tetszőleges H korlátos halmaz esetén $\underline{H}_n$ és $\overline{H}_n$ is mérhető, és
$$\operatorname{ter}(\underline{H}_n) = m(\underline{H}_n), \quad \operatorname{ter}(\overline{H}_n) = m(\overline{H}_n).$$
Így a továbbiakban ezek területének jelölésére is ter helyett az m mértéket használjuk.

12.4. Példa (Nem mérhető halmazra)**.** Legyen $H := Q \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$, az egységnégyzet racionális koordinátájú pontjai. Világos, hogy H külső mértéke 1, belső mértéke 0 (hiszen minden nem üres és nem egy pontból álló halmazban van olyan pont, amelynek minden koordinátája racionális és olyan is, amelynek legalább egy koordinátája irracionális).

Mérhető halmazok fontos osztályát alkotják a *nullmértékű* halmazok.

12.5. Definíció. Azt mondjuk, hogy $H \subset \mathbb{R}^2$ *nullmértékű*, ha H mérhető és $m(H) = 0$.

12.6. Állítás. *$H \subset \mathbb{R}^2$ pontosan akkor nullmértékű, ha $m(\overline{H}_n) \to 0$, $n \to \infty$.*

Bizonyítás. Ha H nullmértékű, akkor a definícióból következik az állítás. Ha $m(\overline{H}_n) \to 0$, akkor $0 \le m(\underline{H}_n) \le m(\overline{H}_n)$ alapján $m(\underline{H}_n) \to 0$ is teljesül. □

12.7. Következmény. *A H halmaz pontosan akkor nullmértékű, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $G \supset H$ mérhető halmaz, melyre $m(G) < \varepsilon$.*

Bizonyítás. Ha H nullmértékű, akkor $G := H$ megfelel. Megfordítva, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan G halmaz, melyre $G \supset H$ és $m(G) < \varepsilon$, akkor ezesetben elég nagy n-re $m(\overline{G}_n) < \varepsilon$ is teljesül. Másrészt, $H \subset G$ miatt ilyen n indexekre $m(\overline{H}_n) \le m(\overline{G}_n) < \varepsilon$ is fennáll. Ebből $m(\overline{H}_n) \to 0$, tehát a 12.6 Állítás miatt H nullmértékű. □

12.8. Tétel. *$H \subset \mathbb{R}^2$ pontosan akkor mérhető, ha ∂H nullmértékű.*

Bizonyítás.
$$\partial H \subset \overline{H}_n \setminus \underline{H}_n = (\overline{\partial H})_n \text{ minden } n \in \mathbb{N},$$
másrészt
$$m((\overline{\partial H})_n) = m(\overline{H}_n \setminus \underline{H}_n) = m(\overline{H}_n) - m(\underline{H}_n)$$
a definíció miatt. Mivel $m(\overline{H}_n) - m(\underline{H}_n)$ pontosan akkor nullsorozat, ha H mérhető, ezért $m((\overline{\partial H})_n)$ is pontosan akkor nullsorozat. Vagyis H pontosan akkor mérhető, ha ∂H nullmértékű. □

12.9. Következmény. *Ha $H, G \subset \mathbb{R}^2$ mérhető halmazok, akkor $H \cup G$, $H \cap G$, $H \setminus G$ is mérhetők.*

Bizonyítás. Igazolható, hogy

$$\partial(H \cup G) \subset \partial H \cup \partial G,$$
$$\partial(H \cap G) \subset \partial H \cup \partial G,$$
$$\partial(H \setminus G) \subset \partial H \cup \partial G.$$

Így a fenti tételből következik az állítás. □

12.10. Állítás. *Ha H és G mérhetőek és egymásba nem nyúlók, akkor*

$$m(H \cup G) = m(H) + m(G).$$

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy

$$m(\overline{(H \cup G)}_n) = m(\overline{H}_n) + m(\overline{G}_n) - m(\overline{(\partial H \cap \partial G)}_n),$$

hiszen a $\partial H \cap \partial G$-be metsző $\frac{1}{2^n}$ oldalú négyzeteket előtte kétszer számoltuk. Másrészt

$$m(\overline{(\partial H \cap \partial G)}_n) \leq m(\overline{\partial H}_n) \to 0,\ n \to \infty,$$

amiből az állítás a definíció szerint következik. □

12.11. Példa (Üres halmaz mérhetősége)**.** Legyen $H := \emptyset$. Ha G tetszőleges mérhető halmaz (ilyen létezik, ld. például az egységnégyzet), akkor H előáll mint $G \setminus G$, vagyis a 12.9 Következmény alapján mérhető. Másrészt, a 12.10 Állítás szerint

$$m(H \cup G) = m(G) = m(H) + m(G),$$

amiből $m(H) = m(\emptyset) = 0$.

12.12. Állítás. *Ha H a koordinátatengelyekel párhuzamos oldalú téglalap, akkor mérhető és $m(H) = a \cdot b$, ahol a és b az oldalhosszúságai.*

Bizonyítás. Diadikus racionális koordinátájú csúcspontokkal rendelkező téglalapra a definícióból következik. Más esetben közelítsük a csúcspontok koordinátáit diadikus racionálisokkal. Meggondolható (nem könnyű!), hogy az így kapott téglalapok külső, ill. belső mértéke tartani fog az eredeti téglalap külső, ill. belső mértékéhez. □

12.13. Állítás. *Ha $f \in C[a, b]$, akkor*

$$\mathrm{graph}(f) := \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^2$$

nullmértékű halmaz.

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ adva. Mivel f egyenletesen folytonos, ezért $\frac{\varepsilon}{b-a}$-hoz létezik $\delta > 0$, hogy ha $|x-y| < \delta$, akkor $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Legyen

$$\Phi = \{I_1 \ldots, I_n\} \in \mathcal{F}[a,b]$$

olyan felosztás, melynek finomsága kisebb, mint δ, vagyis $|I_i| < \delta$ minden i esetén. Definiálja a $G \supset \operatorname{graph}(f)$ halmazt

$$G := \bigcup_{i=1}^{n} \left(I_i \times [\min_{I_i} f, \max_{I_i} f] \right).$$

Ekkor a 12.12 Állítás alapján

$$m(G) = \sum_{i=1}^{n} |I_i| \cdot \left(\max_{I_i} f - \min_{I_i} f \right) < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_{i=1}^{n} |I_i| = \varepsilon.$$

Az állítás a 12.7 Következményből adódik. □

12.14. *Megjegyzés.* Az előző állítás Riemann-integrálható függvényekre is igaz. Vagyis ha $f \in R[a,b]$, akkor a grafikonja nullmértékű halmaz. Ugyanis, a 7.16 Tétel alapján tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\Phi = \{I_1, \ldots, I_n\}$ intervallumfelosztás, melyre $\Omega_f(\Phi) = S_f(\Phi) - s_f(\Phi) < \varepsilon$. Véve a Φ felosztásban szereplő I_i intervallumokat, a

$$G := \bigcup_{i=1}^{n} \left(I_i \times [\min_{I_i} f, \max_{I_i} f] \right)$$

halmaz lefedi $\operatorname{graph}(f)$-et, (esetleg elfajuló) téglalapok uniója, melyre $m(G) = \Omega_f(\Phi) < \varepsilon$.

12.15. Következmény. *A kör(lap), ellipszis, és minden olyan halmaz, melynek határa szakaszonként egy folytonos (vagy Riemann-integrálható) függvény grafikonja, mérhető halmazok a síkon.*

Bizonyítás. Következik a 12.8 Tételből és a fenti állításból. □

A továbbiakban tetszőleges $p \in \mathbb{N}$ esetén bevezethetjük az m_p $\mathbb{R}^p$-beli (Jordan-)mértéket, ill. mérhetőséget a $p = 2$ esettel analóg módon. A fentiekhez hasonlóan definiálhatjuk az $\mathbb{R}^p$ tér koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalú, $\frac{1}{2^n}$ élhosszúságú p dimenziós „kockákra" való *rácsfelbontását*, vagyis egy kocka

$$\left[\frac{i_1}{2^n}, \frac{i_1+1}{2^n}\right] \times \left[\frac{i_2}{2^n}, \frac{i_2+1}{2^n}\right] \times \cdots \times \left[\frac{i_p}{2^n}, \frac{i_p+1}{2^n}\right], \quad i_1, \ldots, i_p \in \mathbb{Z}$$

alakú. Egy ilyen kis kocka (p dimenziós) térfogata legyen $\frac{1}{2^{np}}$. Adott $H \subset \mathbb{R}^p$ korlátos halmaz esetén jelölje most $\overline{H}_n$ azon kis zárt kockák *unióját* a rácsból, melyek belemetszenek H-ba, $\underline{H}_n$ pedig azon kis zárt kockák *unióját*, melyek részei $\operatorname{int} H$-nak. Ezek térfogata $\operatorname{ter}_p(\overline{H}_n)$ ill. $\operatorname{ter}_p(\underline{H}_n)$ legyen az unióban szereplő kockák száma szorozva $\frac{1}{2^{np}}$-vel. A fenitekhez hasonlóan meggondolható, hogy

$$\underline{H}_n \subset \underline{H}_{n+1} \text{ és } \overline{H}_n \supset \overline{H}_{n+1},$$

másrészt

$$\operatorname{ter}_p(\underline{H}_n) \leq \operatorname{ter}_p(\underline{H}_{n+1}) \text{ és } \operatorname{ter}_p(\overline{H}_n) \geq \operatorname{ter}_p(\overline{H}_{n+1}).$$

Ebből következik, hogy $(\operatorname{ter}_p(\underline{H}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton növő, $\big(\operatorname{ter}_p(\overline{H}_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fogyó, korlátos sorozatok. A 2 dimenzióval analóg módon definiálhatjuk az $\underline{m}_p(H)$ és $\overline{m}_p(H)$ p dimenziós *belső*, ill. *külső* mértéket mint $\lim_{n\to\infty} \operatorname{ter}_p(\underline{H}_n)$, ill. $\lim_{n\to\infty} \operatorname{ter}_p(\overline{H}_n)$.

12.16. Definíció. Egy $H \subset \mathbb{R}^p$ korlátos halmazt *(Jordan-)mérhető halmaz*nak mondunk, ha külső és belső mértéke megegyezik, és

$$m_p(H) := \overline{m}_p(H) = \underline{m}_p(H)$$

a H *(Jordan-)mértéke.*

Meggondolható, hogy a 12.6–12.10 Állítások az m_p p dimenziós Jordan-mértékre is érvényben maradnak. A 12.12 Állítást úgy kell módosítani, hogy ha H egy p dimenziós, (koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalú) *tégla*, vagyis

$$H := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_p, b_p],$$

akkor H mérhető, és

$$m_p(H) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \cdots \cdot (b_p - a_p).$$

13. fejezet

Riemann-integrál $\mathbb{R}^p$-n

Ebben a fejezetben az egyváltozós függvényeknél megismert Riemann-integrál fogalmát terjesztjük ki többváltozós függvényekre.

13.1. A p dimenziós integrál alaptulajdonságai

Az egydimenziós Riemann-integrálhoz hasonlóan, a p dimenziós Jordan-mérték segítségével definiálni fogjuk $f : H \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ korlátos függvények Riemann-integrálját, ahol H mérhető halmaz.

13.1. Definíció. Egy $H \subset \mathbb{R}^p$ mérhető halmaz *felosztása* egy $\Phi := \{H_1, \dots, H_n\}$ egymásba nem nyúló, nemüres mérhető halmazokból álló rendszer, ahol

$$H = \bigcup_{i=1}^{n} H_i.$$

A H halmaz felosztásainak halmazát jelölje $\mathcal{F}(H)$ (ld. 13.1(a). ábra).

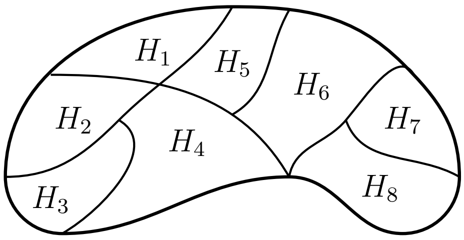
13.2. Példa. Legyenek $T_1, \dots, T_n$ az $\mathbb{R}^p$ tér egy rácsfelbontásának azon téglái, melyekre $T_i \cap H \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, n$. Legyen $H_i := H \cap T_i$, $i = 1, \dots, n$. Ekkor $\{H_1, \dots, H_n\}$ a H halmaz egy *rácsszerű felosztását* adja (ld. 13.1(b). ábra).

13.3. Definíció. Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, $H \subset \mathbb{R}^p$ mérhető, $\Phi := \{H_1, \dots H_n\}$ a H egy felosztása. Ekkor az f Φ felosztáshoz tartozó *alsó*, ill. *felső közelítőösszege*

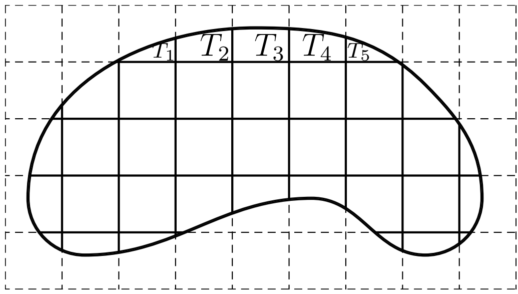
$$s_f(\Phi) := \sum_{i=1}^{n} \left(\inf_{H_i} f \right) \cdot m_p(H_i)$$

ill.

$$S_f(\Phi) := \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{H_i} f \right) \cdot m_p(H_i).$$



(a) A H halmaz egy felosztása



(b) A H halmaz egy rácsszerű felosztása

13.1. ábra.

Az egyváltozós esetben látottakhoz hasonlóan igazolható (ld. a 7.6 Tételt), hogy tetszőleges Φ, Ψ felosztásokra

$$s_f(\Phi) \leq S_f(\Psi).$$

13.4. Definíció. Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, $H \subset \mathbb{R}^p$ mérhető. Az f *alsó Riemann-integrálja*

$$\underline{\int_H} f := \sup \{ s_f(\Phi) : \Phi \in \mathcal{F}(H) \},$$

felső Riemann-integrálja

$$\overline{\int_H} f := \inf \{ S_f(\Phi) : \Phi \in \mathcal{F}(H) \}.$$

A fentiekből nyilvánvaló, hogy

$$\underline{\int_H} f \leq \overline{\int_H} f.$$

Ezek alapján már definiálhatjuk a Riemann-integrálhatóságot.

13.5. Definíció. Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, $H \subset \mathbb{R}^p$ mérhető. Azt mondjuk, hogy f *Riemann-integrálható* H-n, ha

$$\underline{\int_H} f = \overline{\int_H} f.$$

A közös értéket jelölje

$$\int_H f.$$

A H halmazon Riemann-integrálható függvények halmazát jelölje $R(H)$.

13.6. Példa.

1. Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ tetszőleges mérhető halmaz, $c \in \mathbb{R}$, $f : H \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, $x \in H$ konstans függvény. Ekkor f Riemann-integrálható H-n és
$$\int_H f = c \cdot m(H).$$

2. Definiálja az $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y) := \begin{cases} 1, & (x,y) \in (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cap ([0,1] \times [0,1]), \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$
A Dirichlet-függvény esetéhez hasonlóan (ld. a 7.10 Példát) meggondolható, hogy f nem Riemann-integrálható a $[0,1] \times [0,1]$ halmazon.

A továbbiakban kimondunk egy, az egydimenziós Riemann-integrálnál tanultakhoz analóg integrálhatósági kritériumot. A bizonyítás egy az egyben átvihető p dimenziós integrálra. A tétel kimondásához szükségünk lesz egy definícióra.

13.7. Definíció. Az $f : H \to \mathbb{R}$ függvény $\Phi = \{H_1, \ldots, H_n\} \in \mathcal{F}(H)$ felosztáshoz tartozó *oszcillációs összege*
$$\Omega_f(\Phi) := S_f(\Phi) - s_f(\Phi) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{H_i} f - \inf_{H_i} f \right) \cdot m_p(H_i).$$

13.8. Tétel (Leghasznosabb kritérium)**.** *Legyen $f : H \to \mathbb{R}$ korlátos függvény, $H \subset \mathbb{R}^p$ mérhető. Az f pontosan akkor Riemann-integrálható, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\Phi \in \mathcal{F}(H)$ felosztás, hogy*
$$\Omega_f(\Phi) < \varepsilon.$$

Bizonyítás. Az egyváltozós eset megfelelő tételének (ld. a 7.16 Tételt) bizonyításával megegyező módon történik. □

Összefoglaljuk a Riemann-integrál legfontosabb tulajdonságait.

13.9. Tétel. *Legyenek $f, g \in R(H)$, $c \in \mathbb{R}$.*

1. *Ekkor $f + g \in R(H)$ és $c \cdot f \in R(H)$, valamint*
$$\int_H (f+g) = \int_H f + \int_H g,$$
$$\int_H (c \cdot f) = c \cdot \int_H f.$$

2. Ha $f \leq g$, akkor

$$\int_H f \leq \int_H g.$$

Bizonyítás. Az egydimenziós esettel analóg módon. □

13.10. Tétel. *Legyenek $A, B \subset \mathbb{R}^n$ egymásba nem nyúló mérhető halmazok, $f|_A$ integrálható A-n és $f|_B$ integrálható B-n. Ekkor f integrálható $A \cup B$-n is és*

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f.$$

Bizonyítás. Legyenek $\Phi = \{A_1, \ldots, A_n\} \in \mathcal{F}(A)$, $\Psi = \{B_1, \ldots, B_m\} \in \mathcal{F}(B)$ tetszőleges felosztások. Ekkor

$$\Gamma := \{A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m\} \in \mathcal{F}(A \cup B),$$

továbbá

$$s_f(\Phi) + s_f(\Psi) = s_f(\Gamma) \leq \underline{\int_{A\cup B}} f \leq \overline{\int_{A\cup B}} f \leq = S_f(\Gamma) = S_f(\Phi) + S_f(\Psi).$$

Ebből a bal oldal szuprémumát, a jobb oldal infimumát véve minden $\Phi \in \mathcal{F}(A)$ és $\Psi \in \mathcal{F}(B)$ felosztásra kapjuk, hogy

$$\int_A f + \int_B f = \underline{\int_A} f + \underline{\int_B} f \leq \underline{\int_{A\cup B}} f \leq \overline{\int_{A\cup B}} f \leq \overline{\int_A} f + \overline{\int_B} f = \int_A f + \int_B f,$$

amiből az állítás következik. □

Ezen tétel fontos következménye, hogy minden integrál tekinthető téglán vett integrálnak.

13.11. Tétel. *Legyen $T \subset \mathbb{R}^p$ tégla, $H \subset T$ mérhető halmaz, $f \in R(H)$. Ekkor az*

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in H; \\ 0, & x \in T \setminus H \end{cases}$$

módon definiált $\tilde{f} : T \to \mathbb{R}$ függvény integrálható T-n és

$$\int_T \tilde{f} = \int_H f.$$

Bizonyítás. Mivel H és $T \setminus H$ mérhető, egymásba nem nyúló halmazok, ezért alkalmazható az előző tétel, amiből

$$\int_T \tilde{f} = \int_H \tilde{f} + \int_{T\setminus H} \tilde{f} = \int_H f.$$

□

A 13.8 Tétel segítségével igazolható az alábbi

13.12. Állítás. *Legyenek $B \subset A$ mérhető halmazok, f integrálható A-n. Ekkor $f|_B$ integrálható B-n.*

Az egyváltozós esetben láttuk, hogy minden $f \in C[a,b]$ folytonos függvény Riemann-integrálható (ld. a 7.23 Tételt), és a bizonyításban f egyenletes folytonosságát használtuk fel. Ennek megfelelően p dimenzióban fel kell tenni a H értelmezési tartomány mérhetősége mellett a kompaktságát.

13.13. Tétel. *Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ mérhető sorozatkompakt (vagyis korlátos és zárt) halmaz, $f : H \to \mathbb{R}$ folytonos. Ekkor f Riemann-integrálható H-n.*

Bizonyítás. A 13.8 Tételt fogjuk felhasználni. Legyen $\varepsilon > 0$ adva. Mivel a feltételek miatt a 11.18 Tétel szerint f egyenletesen is folytonos H-n, azért $\frac{\varepsilon}{m_p(H)} > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{m_p(H)}, \text{ ha } d_2(x,y) < \delta,$$

ahol d_2 az p dimenziós euklideszi távolságot jelöli. Válasszunk H-nak egy olyan $\Phi = \{H_1, \dots, H_n\}$ felosztását, amelyben $\operatorname{diam} H_i < \delta$, $i = 1, \dots, n$ (ilyen létezik, pl. vehetünk $\frac{1}{2^k}$ oldalú rácsszerű felosztást, ahol $\frac{\sqrt{p}}{2^k} < \delta$). Ekkor a feltétel szerint

$$\Omega_f(\Phi) = \sum_{i=1}^{n} \sup\{f(x) - f(y) : x, y \in H_i\} \cdot m_p(H_i) \le \frac{\varepsilon}{m_p(H)} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_p(H_i) = \varepsilon,$$

amivel az állítást beláttuk. □

A következő fontos tételek arról szólnak, hogy mi köze egy korlátos halmaz mértékének az integrálhoz.

13.14. Tétel. *Legyen $H \subset T \subset \mathbb{R}^p$, ahol H tetszőleges (korlátos) halmaz, T tégla. Jelölje*

$$\chi_H(x) := \begin{cases} 1, & x \in H; \\ 0, & x \in T \setminus H, \end{cases} \tag{13.1}$$

a H halmaz karakterisztikus függvényét *T-n. Ekkor*

$$\underline{m}_p(H) = \underline{\int_T} \chi_H, \quad \overline{m}_p(H) = \overline{\int_T} \chi_H.$$

Bizonyítás. A felső integrálra-külső mértékre vonatkozó állítást bizonyítjuk, a másik hasonlóan megy. Legyen $\varepsilon > 0$ adva. A külső mérték definíciója szerint található olyan $k \in \mathbb{N}$, hogy

$$m_p(\overline{H}_k) \le \overline{m}_p(H) + \varepsilon.$$

Világos, hogy ha az $\mathbb{R}^p$ tér $\frac{1}{2^k}$ oldalú kockákra való felbontásának elemeit elmetsszük a T téglával, a kapott $\Phi = \{F_1, \dots, F_n\}$ rendszer a T egy (rácsszerű) felosztását adja, így

$$\overline{\int_T} \chi_H \le \sum_{i=1}^{n} (\sup_{F_i} \chi_H) \cdot m_p(F_i) = \sum_{i: F_i \cap H \neq \emptyset} 1 \cdot m_p(F_i) + \sum_{i: F_i \cap H = \emptyset} 0 \cdot m_p(F_i) \tag{13.2}$$

$$= \sum_{i: F_i \cap H \neq \emptyset} m_p(F_i) \le m_p(\overline{H}_k) \le \overline{m}_p(H) + \varepsilon. \tag{13.3}$$

Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges volt, ezért

$$\overline{\int_T} \chi_H \le \overline{m}_p(H).$$

A másik irányú egyenlőtlenség bizonyításához tekintsük az $\mathbb{R}^p$ egy tetszőleges, $\frac{1}{2^k}$ oldalú rácsfelbontásának elemeit! Jelölje a T téglának az ebből származó rácsszerű felosztását $\Psi = \{G_1, \dots, G_m\}$. Mivel a G_i halmazok mind mérhetők, ezért

$$\overline{m}_p(H) \le \overline{m}_p\Big(\bigcup_{i: G_i \cap H \neq \emptyset} G_i\Big) = \sum_{i: G_i \cap H \neq \emptyset} m_p(G_i) = \sum_{i: G_i \cap H \neq \emptyset} 1 \cdot m_p(G_i) + \sum_{i: G_i \cap H = \emptyset} 0 \cdot m_p(G_i) = S_{\chi_H}(\Psi),$$

amiből

$$\overline{m}_p(H) \le \overline{\int_T} \chi_H.$$

$\square$

13.15. Következmény. *Egy $H \subset T$ (korlátos) halmaz pontosan akkor mérhető, ha a χ_H karakterisztikus függvénye Riemann-integrálható T-n. Ekkor*

$$m_p(H) = \int_T \chi_H.$$

13.16. Tétel (Az integrál geometriai jelentése)**.** *Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ mérhető. Egy $f : H \to \mathbb{R}^+$ függvény pontosan akkor Riemann-integrálható, ha*

$$\text{subgraph}(f) := \{(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}) : (x_1, \dots, x_p) \in H,\ 0 \le x_{p+1} \le f(x_1, \dots, x_p)\} \subset \mathbb{R}^{p+1}$$

Jordan-mérhető. Ekkor

$$\int_H f = m_{p+1}\left(\text{subgraph}(f)\right).$$

Bizonyítás. Az $\int_H f$ szám definíció szerint tetszőleges közelíthető oly módon, hogy a H halmaznak vesszük egy rácsszerű felbontását, és ezen az alsó, illetve felső közelítő összeget. Ezen közelítő összegek tulajdonképpen olyan $p+1$ dimenziós téglatestek unióinak (vagyis, olyan mérhető halmazoknak) a mértékét adják, melyek alulról, illetve felülről közelítik az $m_{p+1}(\mathrm{subgraph}(f))$ számot. Ebből az állítás következik. A részletek meggondolását az olvasóra bízzuk. □

13.2. Fubini tétele

A következőkben az integrálszámítás egy fontos alaptételét, az integrálás sorrendjének felcserélhetőségét bizonyítjuk 2 dimenzióban. A tétel téglán (téglalapon) vett integrálról szól – de a 13.11 Tétel alapján tudjuk, hogy ez nem jelent megszorítást.

13.17. Tétel (Fubini tétele)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $[a,b]$ és $[c,d]$ korlátos és zárt intervallumok, jelölje $[a,b] \times [c,d]$ a megfelelő téglalapot.*
(A) *változat. Tegyük fel, hogy f-re teljesülnek az alábbi feltételek:*

$$(A)\begin{cases} f \in R([a,b] \times [c,d]), \ \textit{és} \\ \forall x \in [a,b] \ \textit{esetén az} \ y \mapsto f(x,y),\ y \in [c,d] \ \textit{ún. „szekciófüggvény”} \\ \ \textit{Riemann-integrálható} \ [c,d]\textit{-n.} \end{cases}$$

Ekkor

$$\varphi(x) := \int_c^d f(x,y)dy, \quad x \in [a,b]$$

jelöléssel φ Riemann-integrálható $[a,b]$-n, emellett

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f = \int_a^b \varphi = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx.$$

(B) *változat. Tegyük fel, hogy f-re teljesülnek az alábbi feltételek:*

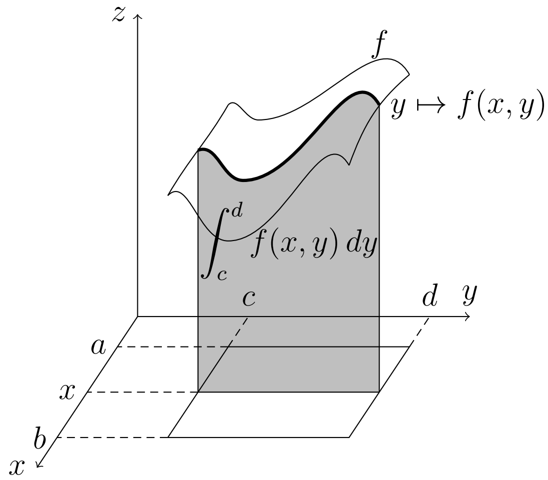
$$(B)\begin{cases} f \in R([a,b] \times [c,d]), \ \textit{és} \\ \forall y \in [c,d] \ \textit{esetén az} \ x \mapsto f(x,y),\ x \in [a,b] \ \textit{ún. „szekciófüggvény”} \\ \ \textit{Riemann-integrálható} \ [a,b]\textit{-n.} \end{cases}$$

Ekkor

$$\psi(y) := \int_a^b f(x,y)dx, \quad y \in [c,d]$$

jelöléssel ψ Riemann-integrálható $[c,d]$-n, emellett

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f = \int_c^d \psi = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$



13.2. ábra. Szekciófüggvény integrálja

13.18. Következmény. *Ha f-re teljesülnek az (A) és (B) változat feltételei, akkor*

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy,$$

vagyis az x és y szerinti integrálás sorrendje felcserélhető, és az így kapott integrálok értékei megegyeznek a függvény kétdimenziós integráljával.

13.19. *Megjegyzés.* Az (A) ill. (B) változat feltételei mindig teljesülnek, ha f folytonos $[a,b]\times[c,d]$-n, ld. a 13.13 Tétel.

Fubini-tétel (A) változat bizonyítása. Legyen $\Phi := \{J_1,\ldots,J_n\} \in \mathcal{F}([a,b])$ az $[a,b]$ intervallum egy tetszőleges felosztása, $\Psi := \{K_1,\ldots,K_m\} \in \mathcal{F}([c,d])$ a $[c,d]$ intervallum egy tetszőleges felosztása. Ekkor

$$\Phi \times \Psi := \{J_i \times K_l : i = 1,\ldots,n, l = 1,\ldots,m\} \in \mathcal{F}([a,b]\times[c,d])$$

az $[a,b]\times[c,d]$ tégla egy (mondhatjuk rácsszerű) felosztását adja.

Könnyen látható, hogy az (A) pontban definiált φ függvényre, $x \in J_i$ esetén

$$\varphi(x) = \int_c^d f(x,y)dy \geq \sum_{l=1}^m \left(\inf_{y\in K_l} f(x,y)\right)\cdot|K_l| \geq \sum_{l=1}^m \left(\inf_{(x,y)\in J_i\times K_l} f(x,y)\right)\cdot|K_l|,$$

tehát

$$\inf_{J_i} \varphi \geq \sum_{l=1}^m \left(\inf_{J_i\times K_l} f\right)\cdot|K_l|.$$

Ebből

$$s_\varphi(\Phi) = \sum_{i=1}^{n} \left(\inf_{J_i} \varphi \right) \cdot |J_i| \geq \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} \left(\inf_{J_i \times K_l} f \right) \cdot |K_l| \cdot |J_i| = s_f(\Phi \times \Psi).$$

Hasonlóan belátható, hogy

$$S_\varphi(\Phi) \leq S_f(\Phi \times \Psi),$$

tehát

$$s_f(\Phi \times \Psi) \leq s_\varphi(\Phi) \leq S_\varphi(\Phi) \leq S_f(\Phi \times \Psi).$$

A kapott egyenlőtlenségeket felhasználva, továbbá f Riemann-integrálhatósága alapján könnyen látható, hogy

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f = \sup_{\Phi\in\mathcal{F}([a,b]),\Psi\in\mathcal{F}([c,d])} s_f(\Phi \times \Psi) \leq \sup_{\Phi\in\mathcal{F}([a,b])} s_\varphi(\Phi) = \underline{\int_a^b} \varphi,$$

másrészt

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f = \inf_{\Phi\in\mathcal{F}([a,b]),\Psi\in\mathcal{F}([c,d])} S_f(\Phi \times \Psi) \geq \inf_{\Phi\in\mathcal{F}([a,b])} S_\varphi(\Phi) = \overline{\int_a^b} \varphi.$$

Mindebből az állítás következik.

A (B) változat analóg módon bizonyítható. □

13.20. *Megjegyzés.* Fubini tétele általánosítható tetszőleges $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvényre. Pl. $p = 3$ esetén egy $f \in R([a,b] \times [c,d] \times [s,q])$ függvény integrálja megfelelő feltételek mellett előáll 3 darab egydimenziós integrál „egymásutánjaként”.

13.21. Példa (Olyan függvényre, melyre nem alkalmazható a Fubini-tétel)**.** Legyen $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{y^2}, & 0 < x < y < 1; \\ -\frac{1}{x^2}, & 0 < y < x < 1; \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Ekkor

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^y \frac{1}{y^2}dx + \int_y^1 \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{y} + \left[\frac{1}{x} \right]_{x=y}^{x=1} \right) dy = 1.$$

Másrészt

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dydx = \int_0^1 \left(\int_0^x \left(-\frac{1}{x^2} \right) dy + \int_x^1 \frac{1}{y^2}dy \right) dx = \int_0^1 \left(-\frac{1}{x} + \left[-\frac{1}{y} \right]_{y=x}^{y=1} \right) dx = -1.$$

Az eredmény nem meglepő, hiszen f nem korlátos $[0,1] \times [0,1]$-en.

13.22. Példa (Olyan függvényre, melyre nem teljesül a Fubini-tétel)**.** Ebben a példában egy olyan függvényt mutatunk, mely integrálható a $[0,1] \times [0,1]$ négyzeten, viszont a Fubini-tétel másik feltétele nem teljesül rá, mivel az $y \mapsto f(\frac{1}{2}, y)$ nem integrálható $[0,1]$-en. Jelölje D a Dirichlet-függvényt és legyen $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} 0, & x \neq \frac{1}{2}, \\ D(y), & x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

A kívánt feltételek nyilván teljesülnek.

Fubini tételét alkalmazhatjuk egydimenziós integrálok kiszámítására is.

13.23. Példa. Számítsuk ki az

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx$$

integrál értékét! Ez ugyan egy improprius integrál, de belátható, hogy ilyen típusú integrálra is alkalmazható a Fubini-tétel. Az $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := x^y$ hozzárendeléssel megadott függvény Riemann-integrálható, hiszen korlátos, és a $(0,0)$ pont kivételével folytonos.

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 x^y dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 \mathrm{e}^{y \ln x} dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{\ln x} \mathrm{e}^{y \ln x} \right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx.$$

Fubini tétele alapján

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 x^y dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 x^y dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{y+1} x^{y+1} \right]_{x=0}^{x=1} dy = \int_0^1 \frac{1}{y+1} dy = \ln 2.$$

Tehát

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx = \ln 2.$$

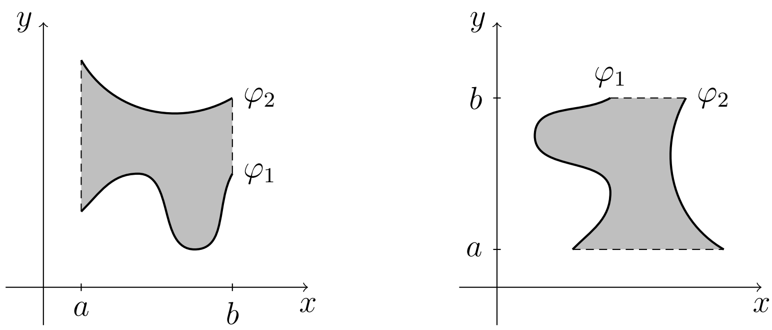
A Fubini-tétel következménye az alábbi két állítás.

13.24. Definíció. Legyenek $\varphi_1, \varphi_2 \in C[a,b]$ folytonos függvények, $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ minden $x \in [a,b]$ esetén. (Kétdimenziós) *normáltartomány* alatt a következő alakú korlátos és zárt (sorozatkompakt) halmazokat értjük:

$$H = \{(x,y) \in [a,b] \times \mathbb{R} : \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\} \quad y \text{ irányú normáltartomány} \tag{13.4}$$

vagy

$$H = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times [a,b] : \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)\} \quad x \text{ irányú normáltartomány.} \tag{13.5}$$



13.3. ábra. Normáltartományok

13.25. Állítás. *Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ (13.4) (y irányú) vagy (13.5) (x irányú) normáltartomány, $f : H \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor a (13.4) esetben*

$$\int_H f = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx,$$

a (13.5) esetben

$$\int_H f = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

Bizonyítás. Tekintsük az első esetet! Ekkor $H \subset [a,b] \times [c,d]$, ahol pl. $c = \min_{[a,b]} \varphi_1$, $d = \max_{[a,b]} \varphi_2$. Definiáljuk

$$\tilde{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in H; \\ 0, & (x,y) \in ([a,b] \times [c,d]) \setminus H. \end{cases}$$

Az állítás a 13.11 és a 13.17 Tételekből következik. A másik H esete hasonlóan meggondolható. □

13.26. Példa.

1. r sugarú félkör területe

$$T = \int_H 1 = \int_0^r \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} 1\,dx\,dy = \int_0^r 2\sqrt{r^2-y^2}\,dy$$
$$= \int_0^{2\pi} 2\cos^2\alpha\,d\alpha = \int_0^{2\pi} (\cos 2\alpha + 1)\,d\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

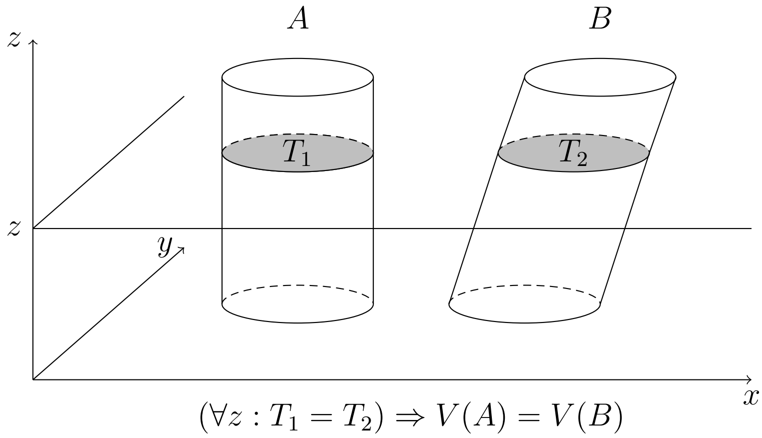
2. r sugarú félgömb térfogata

$$V = \int_H 1 = \int_0^r \left(\int_K 1 \right) dz = \int_0^r (r^2 - z^2)\pi\,dz = \frac{2}{3}r^3\pi.$$

13.27. Állítás (Cavalieri-elv)**.** *Legyenek $A, B \subset \mathbb{R}^2 \times [0, +\infty)$ 3 dimenziós mérhető halmazok, és tegyük fel, hogy minden $z \in [0, +\infty)$ esetén a z magasságban vett, xy síkkal párhuzamos síkmetszetük területe megegyezik, vagyis minden $z \in [0, +\infty)$ esetén*

$$\varphi_A(z) := m_2\left(\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in A\right\}\right) = m_2\left(\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y, z) \in B\right\}\right) = \varphi_B(z).$$

Ekkor $m_3(A) = m_3(B)$, vagyis a két halmaz mértéke is megegyezik.



13.4. ábra. Cavalieri-elv

Bizonyítás. Legyen $T := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [0, c]$ olyan tégla, melybe A és B is belefoglalható. Definiáljuk A és B karakterisztikus függvényét T-n:

$$\chi_A(x, y, z) := \begin{cases} 1, & (x, y, z) \in A; \\ 0, & (x, y, z) \in T \setminus A. \end{cases}$$

$$\chi_B(x, y, z) := \begin{cases} 1, & (x, y, z) \in B; \\ 0, & (x, y, z) \in T \setminus B. \end{cases}$$

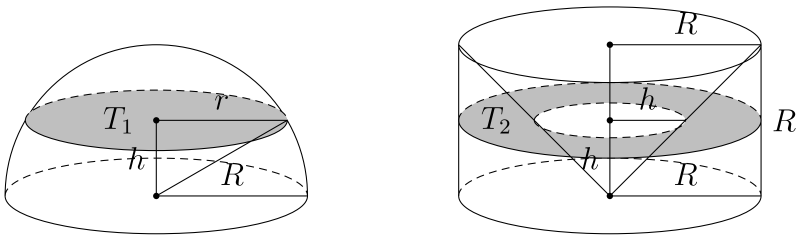
A 13.15 Következmény és a 13.17 Fubini-tétel alapján

$$\begin{aligned} m_3(A) &= \int_T \chi_A = \int_0^c \left(\int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} \chi_A(x, y, z)\, dx\, dy \right) dz = \int_0^c \varphi_A(z)\, dz \\ &= \int_0^c \varphi_B(z)\, dz = \int_0^c \left(\int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} \chi_B(x, y, z)\, dx\, dy \right) dz = \int_T \chi_B = m_3(B). \end{aligned}$$

$\square$

13.28. Példa (Félgömb térfogata)**.** Az r sugarú félgömb térfogata megegyezik annak a testnek a térfogatával, melyet úgy kapunk, hogy egy r alapsugarú, r magasságú hengerből kiveszünk egy r alapsugarú, r magasságú kúpot. Azaz

$$V(\text{félgömb}) = r^2\pi r - \frac{1}{3}r^2\pi r = \frac{2}{3}r^3\pi.$$



$T_1 = r^2\pi = (R^2 - h^2)\pi$ $\qquad$ $T_2 = R^2\pi - h^2\pi = (R^2 - h^2)\pi$

13.5. ábra. Félgömb térfogata

14. fejezet

Differenciálegyenletek

14.1. Motiváció, példák

A természetben és a minket körülvevő világ szinte bármely területén találkozhatunk olyan jelenségekkel, amelyek térben és (vagy) időben zajlanak le. Az ilyen jelenségeket/folyamatokat a matematikában a *differenciálegyenletek* „nyelvén” írhatjuk le a leghatékonyabban. Az alábbiakban néhány konkrét példát mutatunk erre.

Valójában már a középiskolai fizika tanulmányaink során találkoztunk differenciálegyenletekkel. Lássunk erre két példát!

14.1. Példa. Képzeljük el, hogy egy autó egyenes vonalú egyenletes mozgást végez! Tegyük fel, hogy a számegyenesen az x_0 pontból indul, és állandó, v sebességgel halad! Határozzuk meg az autó $x(t)$ helyzetét a t időpontban! Világos, hogy az autó t idő alatt vt utat tett meg, így

$$x(t) = x_0 + vt.$$

Mi a helyzet, ha az autó sebessége függ az időtől, és a $v(t)$ függvény írja le? Ekkor a 6.1. szakaszban látottak alapján pillanatnyi sebessége $x'(t)$, tehát

$$x'(t) = v(t) \tag{14.1}$$

$$x(0) = x_0 \tag{14.2}$$

A (14.1) egy úgynevezett *(integrálható) közönséges differenciálegyenlet*, hiszen integrálással megkaphatjuk az összes x megoldását. A (14.2) feltétel neve *kezdeti feltétel* (vagy mellékfeltétel). A differenciálegyenlethez hozzávéve a kezdeti feltételt kapjuk az ún. *kezdetiérték-feladatot.* Ennek megoldása

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(s)\,ds.$$

14.2. Példa. Egy másik példában képzeljük el, hogy a napsütésben 30° Celsiusra felmelegedett italunkat szeretnénk 15° Celsiusra lehűteni a 10°-os hűtőben. Hány percre tegyük be? Ha $T(t)$ jelöli az ital hőmérsékletét a t időpillanatban, akkor Newton lehűlési törvénye szerint az ital hőmérsékletváltozása arányos a közeg (hűtő) és az ital hőmérsékletének különbségével (ha az ital sokkal melegebb a hűtőnél, akkor gyorsan hűl, ha nagyjából azonos hőmérsékletűek, akkor lassan hűl). Matematikailag:

$$\begin{aligned} T'(t) &= k(T_{\text{hűtő}} - T(t)) \\ T(0) &= 30, \end{aligned} \tag{14.3}$$

ahol $T_{\text{hűtő}} = 10$. A (14.3) első sora egy ún. *elsőrendű lineáris közönséges differenciálegyenlet.*

Csak felsorolásszereűen megemlítünk néhány további példát, melyek matematikai megoldása differenciálegyenletre vezethet: radioaktív bomlás, szaporodás (biológia), keverési folyamatok (kémia), pénzügyi folyamatok, stb.

14.2. Szétválasztható változójú (szeparábilis) differenciálegyenletek

Motivációs példa:

14.3. Példa (Radioaktív anyag bomlása (vagy szaporodás))**.** Tegyük fel, hogy egy radioaktív anyag bomlását vizsgáljuk! Jelölje az anyag mennyiségét a t időpontban $y(t)$. Ismert, hogy az anyag bomlási sebessége arányos a még meglévő anyag mennyiségével, azaz $y' = ky$, ahol $k < 0$, hiszen bomlásról van szó, ezért $y' < 0$. Az egyenlet megoldásának menete a következő. Világos, hogy az $y \equiv 0$ függvény megoldás. Tegyük fel most, hogy $y \neq 0$. Ekkor

$$\begin{aligned} y'(t) &= k \cdot y(t) \\ \frac{y'(t)}{y(t)} &= k \\ \ln|y(t)| &= k \cdot t + \ln c, \quad c \in \mathbb{R}^+ \quad / \exp(\cdot) \\ |y(t)| &= c \cdot \mathrm{e}^{kt}, \quad c \in \mathbb{R}^+ \\ y(t) &= c \cdot \mathrm{e}^{kt}, \quad c \in \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-. \end{aligned}$$

Mivel azonban az $y \equiv 0$ is megoldás, ezért az össze megoldás leírható az alábbi képlettel:

$$y(t) = c \cdot \mathrm{e}^{kt}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

14.4. Állítás. *Minden olyan differenciálható $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényhez, melyre $y' = k \cdot y$, létezik $c \in \mathbb{R}$ konstans, hogy*

$$y(t) = c \cdot \mathrm{e}^{kt}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Valójában, $c = y(0)$, tehát $y(t) = y(0) \cdot \mathrm{e}^{kt}, \quad t \in \mathbb{R}$.

Bizonyítás. Legyen

$$\varphi(t) := y(t) \cdot \mathrm{e}^{-kt}.$$

Ekkor

$$\varphi'(t) = y'(t) \cdot \mathrm{e}^{-kt} - ky(t) \cdot \mathrm{e}^{-kt} = ky(t) \cdot \mathrm{e}^{-kt} - ky(t) \cdot \mathrm{e}^{-kt} = 0,$$

tehát φ konstans. □

Általánosítva a fenti problémát, legyen $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges intervallum. Keressük azokat az $y : I \to \mathbb{R}$, az I intervallumon értelmezett differenciálható függvényeket, melyekre teljesül, hogy

$$y'(x) = f(x)y(x), \quad (x \in I) \tag{14.4}$$

ahol $f \in C(I)$ adott függvény. Világos, hogy ha F egy primitív függvénye f-nek (minden folytonos függvénynek van primitív függvénye, ld. a 7.63 Tételt), akkor

$$y(x) := c \cdot \mathrm{e}^{F(x)}, \quad x \in I$$

megoldás tetszőleges c valós szám esetén. A fenti 14.4 Állítás bizonyításával analóg módon látható, hogy csak ilyen alakú megoldások léteznek.

14.5. Példa. Tekintsük az alábbi egyenletet!

$$y'(x) = x \cdot y(x)$$

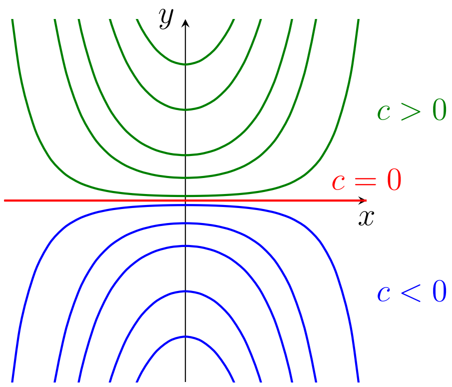
Az eddigiekben látottak alapján a megoldások $y(x) = c \cdot \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}, \quad c \in \mathbb{R}$ alakúak, néhányat a 14.1. ábrán mutatunk be. Ezen példa megoldására mutatunk egy „fizikus módszert” is. Írjuk át y'-t dy/dx alakúvá, majd „szorozzunk át” dx-szel (bármi is legyen az...) Ezután gyűjtsük egyik oldalra az y-tól, másik oldalra a csak x-től függő tagokat (ez megtehető az egyenlet szétválasztható volta miatt), és integráljuk mindkét oldalt. Kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} y' &= xy \\ \frac{dy}{dx} &= xy \\ dy &= xy\,dx \\ \frac{1}{y}\,dy &= x\,dx \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int x\,dx$$
$$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$
$$|y| = \mathrm{e}^c \cdot \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}, \quad c \in \mathbb{R}$$
$$y = \pm\mathrm{e}^c \cdot \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Mivel az $y \equiv 0$ is megoldás, ezért az összes megoldás

$$y(x) = c \cdot \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$



14.1. ábra. Az $y'(x) = xy(x)$ egyenlet megoldásai: $ce^{\frac{x^2}{2}}$

Kezdetiérték-feladat megoldása
Keresünk olyan differenciálható $y : I \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre

$$y'(x) = f(x) \cdot y(x), \quad x \in I$$
$$y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}.$$

Tudjuk, hogy a megoldások

$$y(x) = c \cdot \mathrm{e}^{F(x)}, \quad c \in \mathbb{R}$$

alakúak, ahol F a f egy primitív függvénye. A kezdeti feltétel miatt

$$y(x_0) = c \cdot \mathrm{e}^{F(x_0)} = y_0,$$

amiből

$$c = y_0 \cdot \mathrm{e}^{-F(x_0)},$$

így a kezdetiérték-feladat megoldása

$$y(x) = y_0 \cdot \mathrm{e}^{F(x)-F(x_0)}.$$

14.6. Példa.

$$\begin{cases} y'(x) = x \cdot y(x), \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Ekkor a 14.5 Példa megoldásai közül csak az $y(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$ a megoldás.

Térjünk most rá a szétválasztható változójú (vagy szeparábilis) differenciálegyenletek általános alakjára.

14.7. Definíció. Keressük azokat az $y : I \to J$ intervallumon értelmezett differenciálható függvényeket, melyekre teljesül, hogy

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x)),$$

ahol $f \in C(I)$, $g \in C(J)$. Az ilyen típusú egyenleteket *szétválasztható változójú (vagy szeparábilis) differenciálegyenlet*nek hívjuk.

Az ilyen egyenletek megoldása a következő módon történik. Tegyük fel, hogy $0 \notin \mathcal{R}(g)$. Ekkor

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x).$$

Ha G az $\frac{1}{g}$ egy primitív függvénye, vagyis $G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(t)}\, dt$, akkor mindkét oldalt integrálva

$$G(y(x)) = c + \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt.$$

Szerencsés esetben ebből $y(x)$ ki is fejezhető expliciten. A későbbiekben látni fogjuk (ld. implicitfüggvény-tétel), hogy bár y sok esetben nem fejezhető ki expliciten, mégis a fenti ún. implicit egyenlet (megfelelő feltételek mellett) meghatároz egy y differenciálható függvényt az x_0 pont körül.

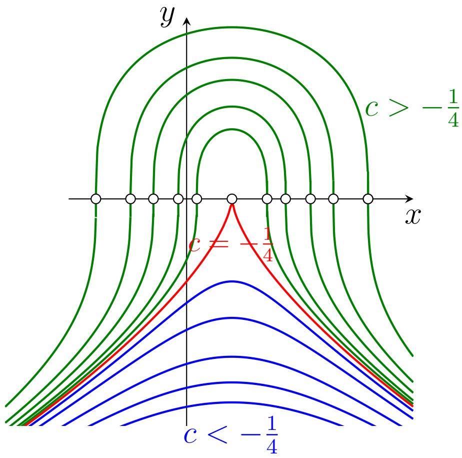
14.8. Példa.

$$y^2(x) \cdot y'(x) = 1 - 2x$$

A megoldások a 14.2. ábrán láthatók.

14.3. Szétválaszthatóra visszavezethető egyenletek

Számos olyan differenciálegyenlettel találkozhatunk, melyek első ránézésre ugyan nem a szétválasztható változójú típusba tartoznak, de megfelelő transzformációval ilyen típusú egyenletre vezethetők vissza. Nézzünk most két egyszerű példát! Ezekben a differenciálegyenleteknél szokásos módon az $y(x)$ függvény jelöléséből elhagyjuk az x argumentumot.



14.2. ábra. Az $y^2(x)y'(x) = 1 - 2x$ egyenlet megoldásai: $\sqrt[3]{3(x - x^2 + c)}$

14.9. Példa (Homogén fokszámú egyenlet)**.**

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

ahol f folytonos. Vezessük be a $z := \frac{y}{x}$ új ismeretlen függvényt! Ekkor $y = zx$, így $y' = z + xz'$, tehát az egyenlet

$$z + xz' = f(z),$$

amiből

$$z' = \frac{f(z) - z}{x}.$$

Ez egy szeparábilis egyenlet. Ezt megoldva z-re, az $y = zx$ összefüggésből megkapjuk az y-t is.

14.10. Példa.

$$y' = f(y + x),$$

ahol f folytonos. Vezessük be a $z := y + x$ új ismeretlen függvényt! Ekkor $z' = y' + 1$, tehát

$$z' - 1 = f(z),$$

ami egy szétválasztható egyenlet.

14.4. Elsőrendű lineáris differenciálegyenlet

Motivációs példaként lásd az első szakaszban bemutatott 14.2 Példát!

14.11. Definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges intervallum. Keressük azokat az $y : I \to \mathbb{R}$, az I intervallumon értelmezett differenciálható függvényeket, melyekre teljesül, hogy

$$y'(x) = f(x)y(x) + g(x),$$

ahol $f, g \in C(I)$ adott függvények. Az ilyen típusú egyenleteket *elsőrendű lineáris differenciálegyenlet*nek hívjuk. Szokás még a

$$y' + fy = g$$

alakú felírás is. Ha $g \neq 0$, akkor az egyenlet *inhomogén* elsőrendű lineáris differenciálegyenlet. Ha $g = 0$, akkor az egyenlet *homogén* elsőrendű lineáris differenciálegyenlet, ami egyben szétválasztható változójú.

A linearitás azt jelenti, hogy f és g csak az x változótól függ (tehát y-tól nem).

Az ilyen egyenletek megoldási menete a következő. Megszorozva az egyenlet mindkét oldalát egy tetszőleges ρ differenciálható függvénnyel, kapjuk, hogy

$$y'(x)\rho(x) - \rho(x)f(x)y(x) = \rho(x)g(x).$$

Ha elérjük, hogy

$$\rho(x)f(x) = -\rho'(x) \tag{14.5}$$

legyen, akkor a kapott egyenlet

$$[y(x)\rho(x)]' = \rho(x)g(x)$$

alakúvá egyszerűsödik. A (14.4) megoldása alapján, az (14.5) egyenletre

$$\rho(x) = \mathrm{e}^{-F(x)}$$

egy jó megoldás, ahol F az f egy primitív függvénye. Ebből, mivel $\rho \cdot g \in C(I)$, vagyis Riemann-integrálható is,

$$\begin{aligned}
[y(x)\rho(x)]' &= \rho(x)g(x) \\
y(x)\rho(x) &= c + \int_{x_0}^{x} \rho(t)g(t)\,dt \\
y(x) &= c \cdot \mathrm{e}^{F(x)} + \mathrm{e}^{F(x)} \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-F(t)} g(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Innen

$$y(x) = c \cdot \mathrm{e}^{F(x)} + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{F(x)-F(t)} g(t)\,dt, \tag{14.6}$$

ahol $x_0 \in I$ tetszőleges.

Ha kezdeti érték is adva van, vagyis $y(x_0) = y_0$, a fenti megoldóképletben legyen x_0 ez a kezdőpont, és $c := y_0 \cdot \mathrm{e}^{-F(x_0)}$. Ekkor

$$y(x_0) = y_0 \cdot \mathrm{e}^{-F(x_0)} \cdot \mathrm{e}^{F(x_0)} + \mathrm{e}^{F(x_0)} \int_{x_0}^{x_0} \mathrm{e}^{-F(t)} g(t)\, dt = y_0.$$

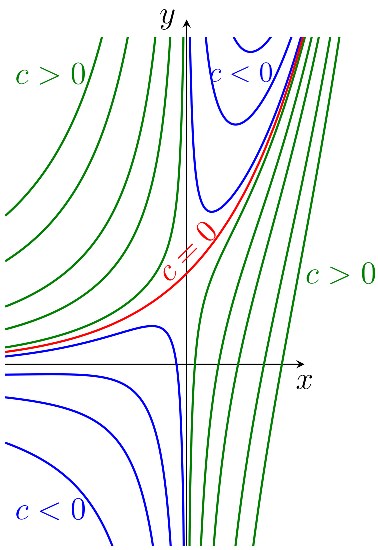
14.12. Példa.

$$y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \frac{x+1}{x} \cdot \mathrm{e}^x \quad (x \neq 0)$$

Világos, hogy az I intervallum, ahol az egyenletet vizsgáljuk, az $I = \mathbb{R}^+$ vagy $I = \mathbb{R}^-$. Az első esetben $F(x) = -\ln x$, a második esetben $F(x) = \ln x$. A (14.6) megoldóképlet alapján tehát $I = \mathbb{R}^+$ esetben

$$y(x) = c \cdot \mathrm{e}^{-\ln x} + \int_0^x \mathrm{e}^{-\ln x + \ln t} \cdot \frac{t+1}{t} \cdot \mathrm{e}^t\, dt = \frac{c}{x} + \frac{1}{x} \cdot x\mathrm{e}^x = \frac{c}{x} + \mathrm{e}^x, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Az $I = \mathbb{R}^-$ esetben hasonló alakra jutunk. A megoldások a 14.3. ábrán láthatók.



14.3. ábra. Az $y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \frac{x+1}{x} e^x$ egyenlet megoldásai: $e^x + \frac{c}{x}$

14.13. Példa.

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{y(x)}{x} = \frac{x+1}{x} \cdot \mathrm{e}^x, \\ y(1) = \mathrm{e}. \end{cases}$$

Ekkor a 14.12 Példa megoldásai közül csak az $y(x) = \mathrm{e}^x$, $\mathcal{D}(y) = (0, +\infty)$ a megoldás.

14.5. Elsőrendű egyenletek geometriai jelentése

Az elsőrendű közönséges differenciálegyenletek általános alakja

$$y' = f(x, y), \tag{14.7}$$

ahol $f : I \times J \to \mathbb{R}$ adott függvény (I és J intervallumok), és keressük y-t.

Most az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, és legyen y tetszőleges megoldás. Ekkor a (14.7) egyenlet azt jelenti, hogy az y megoldásnak minden x pontban előírjuk a deriváltját, ami geometriailag a függvénygrafikon érintőjének meredekségét adja meg. Az f függvény valójában a sík minden (x, y) pontjában meghatároz egy irányt, amit megrajzolva kapjuk az úgynevezett *iránymezőt*. Így a (14.7) differenciálegyenletet úgy is megoldhatjuk, hogy olyan y függvényeket keresünk, melyek grafikonjának érintői éppen az iránymezőre illeszkednek.

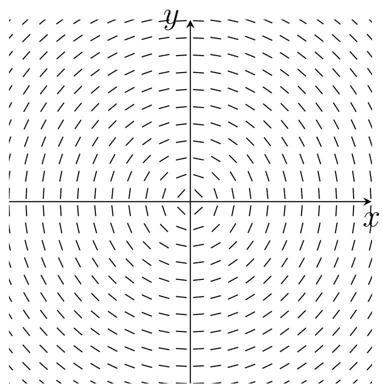
14.14. Példa.

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Az iránymező az $y = x$ egyenes pontjaiban -1, az $y = -x$ egyenes pontjaiban 1, az $x = 0$ egyenesen 0, az $y = 0$ egyenesen pedig „∞” meredekségű irányokat határoz meg. Ezen irányok berajzolása után jól látható (ld. a 14.4. ábrát), hogy körvonalak illeszkednek az iránymezőre, ezért a megoldások

$$y(x) = \pm\sqrt{c - x^2}, \quad c \in \mathbb{R}^+$$

alakúak.



14.4. ábra. Az $y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$ egyenlet iránymezője

14.6. Másodrendű lineáris egyenletek

14.15. Példa (Harmonikus rezgőmozgás)**.** Tegyük fel, hogy egy m tömegű test egy rugón függve mozog, a súrlódástól tekintsünk el. A test egyensúlyi helyzetéből való kitérése a t időpontban legyen $x(t)$. Hooke törvénye alapján ismert, hogy a testet visszatérítő erő arányos a kitéréssel, az arányossági tényező pedig a D direkciós vagy rugóállandó. Newton második törvénye szerint az erő, jelen esetben tehát $-D\cdot x$, a tömeg és a gyorsulás (vagyis x'') szorzata. Így $-Dx = mx''$, amiből

$$x'' + \frac{D}{m}x = 0.$$

A $\frac{D}{m}$ konstanst szokás ω_0^2-el helyettesíteni, így

$$x'' + \omega_0^2 x = 0$$

a *harmonikus rezgőmozgás egyenlete.*

Hasonlóan írható le az ingamozgás is.

14.16. Állítás. *Ha* $x'' + \omega_0^2 x = 0$*, akkor léteznek* c_1, c_2 *valós számok, hogy*

$$x(t) = c_1 \sin(\omega_0 t) + c_2 \cos(\omega_0 t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bizonyítás. Tekintsük a

$$g(t) := x(t) - \frac{x'(0)}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) - x(0)\cos(\omega_0 t), \quad t \in \mathbb{R}$$

hozzárendeléssel definiált függvényt! Egyszerű számolással ellenőrizhető, hogy a

$$h := (g')^2 + g^2$$

függvény deriváltja minden t pontban 0, ezért h konstans függvény. Másrészt, g definíciójából adódik, hogy

$$g'(0) = g(0) = 0,$$

így $h \equiv 0$, amiből $g \equiv 0$. Tehát $c_1 := \frac{x'(0)}{\omega_0}$ és $c_2 := x(0)$ jó választás. □

14.17. *Megjegyzés.* Ha

$$x(t) = c_1 \sin(\omega_0 t) + c_2 \cos(\omega_0 t), \quad t \in \mathbb{R},$$

akkor szokás bevezetni az

$$A := \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \varphi := \arcsin \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}$$

jelöléseket. Ezekkel

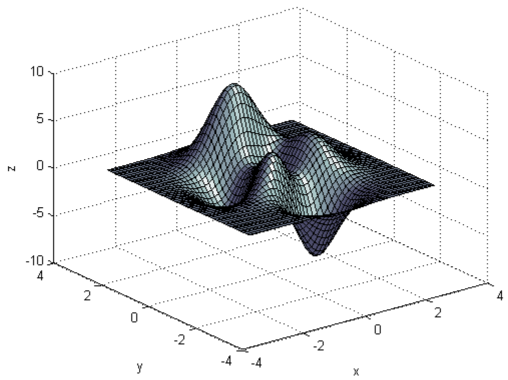
$$x(t) = A\cos\varphi \sin(\omega_0 t) + A \sin\varphi \cos(\omega_0 t) = A\sin(\varphi + \omega_0 t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ez azt jelenti, hogy a rugó A amplitúdójú (vagyis maximális kitérésű), $\frac{2\pi}{\omega_0}$ periódusú periodikus mozgást végez.

15. fejezet

Többváltozós differenciálszámítás I.

[1] Többváltozós függvényekkel kapcsolatban eddig a határérték, folytonosság és integrálhatóság fogalmaival ismerkedtünk meg. A következőkben többváltozós függvények differenciálszámításával foglalkozunk. A könnyebb érthetőség kedvéért az egyes témaköröket először $\mathbb{R}^2$-ből $\mathbb{R}$-be képező függvényekre tárgyaljuk, majd az eredményeket általánosan is kimondjuk $\mathbb{R}^p$-ből $\mathbb{R}$-be képező függvényekre. Emlékeztetőül, egy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény grafikonja



15.1. ábra. Kétváltozós függvény grafikonja

$$\mathrm{graph}(f) = \{(x, y, z) : (x, y) \in \mathcal{D}(f),\ z = f(x, y)\} \subset \mathbb{R}^3$$

[1]A jegyzet hátralévő részében szorosan a Laczkovich–T. Sós [LTS07] irodalmat követem.

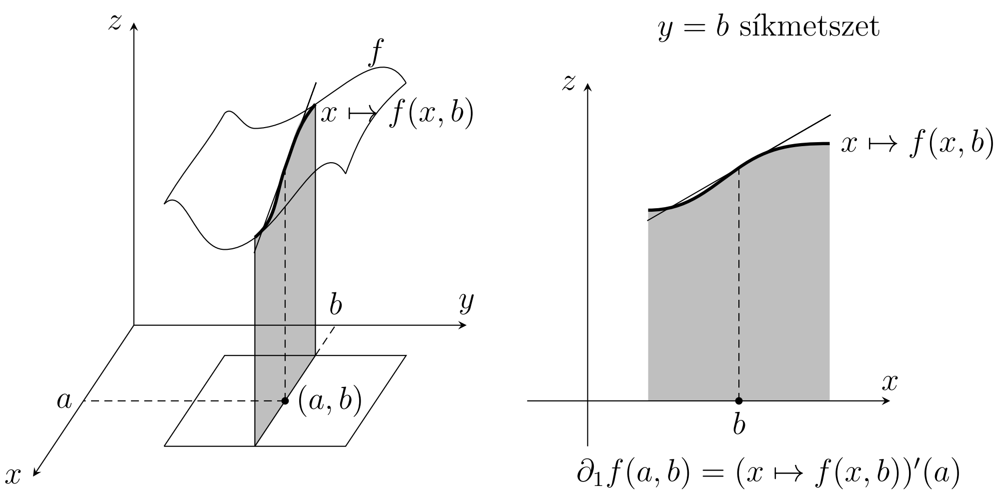
15.1. Parciális derivált

15.1.1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eset

15.1. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Az f függvény *első változó szerinti parciális deriváltja létezik* (a, b)*-ben*, ha

$$\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} \in \mathbb{R}.$$

Ekkor a fenti határértéket nevezzük az f függvény *első változó szerinti parciális deriváltjának* (a, b)*-ben*, és jelöljük: $\partial_1 f(a, b)$ (vagy $D_1 f(a, b)$ vagy $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ vagy $f'_x(a, b)$ stb.) Itt valójában arról van szó, hogy az (a, b) pont második koordinátáját lerögzítjük, és az így kapott $x \mapsto f(x, b)$ egyváltozós függvényt deriváljuk a-ban.

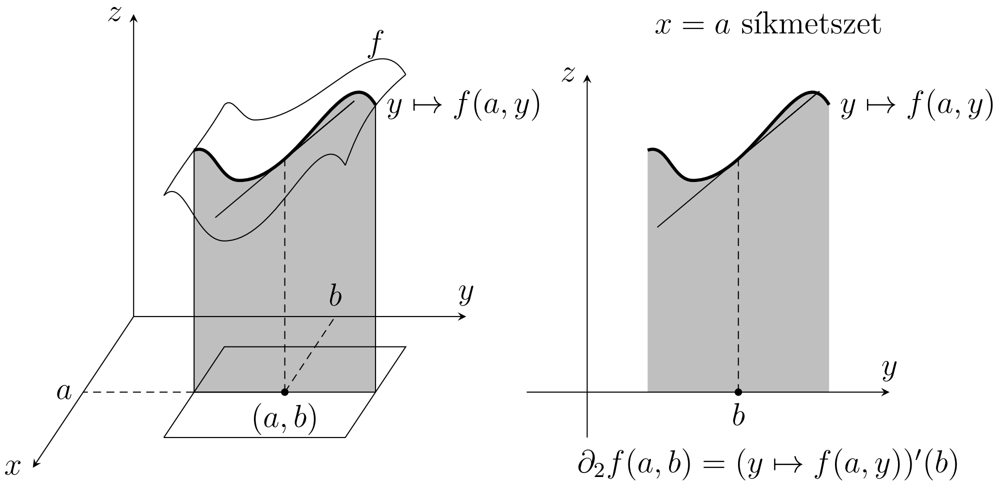


15.2. ábra. Első változó szerinti parciális derivált

15.2. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Az f függvény *második változó szerinti parciális deriváltja létezik* (a, b)*-ben*, ha

$$\exists \lim_{y \to b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h} \in \mathbb{R}.$$

Ekkor a fenti határértéket nevezzük az f függvény *második változó szerinti parciális deriváltjának* (a, b)*-ben*, és jelöljük: $\partial_2 f(a, b)$ (vagy $D_2 f(a, b)$ vagy $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ vagy $f'_y(a, b)$ stb.) Itt valójában arról van szó, hogy az (a, b) pont első koordinátáját lerögzítjük, és az így kapott $y \mapsto f(a, y)$ egyváltozós függvényt deriváljuk b-ben.



15.3. ábra. Második változó szerinti parciális derivált

15.3. Definíció. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény *első, ill. második parciális deriváltfüggvénye* $\partial_1 f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ill. $\partial_2 f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{D}(\partial_1 f) = \{(x, y) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f) : \exists \partial_1 f(x, y)\}, \quad (\partial_1 f)(x, y) := \partial_1 f(x, y)$$
$$\mathcal{D}(\partial_2 f) = \{(x, y) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f) : \exists \partial_2 f(x, y)\}, \quad (\partial_2 f)(x, y) := \partial_2 f(x, y)$$

15.1.2. $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ eset

A fentiek könnyen általánosíthatók p változós függvényekre. Például:

15.4. Definíció (19.54)**.** Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $a = (a_1, \ldots, a_p) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$, $i \in \{1, \ldots, p\}$. Az f függvény *i-edik változó szerinti parciális deriváltja létezik a-ban*, ha

$$\exists \lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, \ldots a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_p) - f(a_1, \ldots, a_p)}{x_i - a_i} \in \mathbb{R}.$$

Ekkor a fenti határértéket nevezzük az f függvény *i-edik változó szerinti parciális deriváltjának a-ban*, és jelöljük: $\partial_i f(a)$ vagy $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ vagy $f'_{x_i}(a, b)$ stb. Itt tulajdonképpen az történik, hogy az a pont összes koordinátáját lerögzítjük az i-edik kivételével, és az így kapott $x_i \mapsto f(a_1, \ldots a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_p)$ egyváltozós függvényt deriváljuk a_i-ben.

15.2. Differenciálhatóság

15.2.1. Bevezető

Két-, illetve többváltozós függvények differenciálhatóságát (amit szokás a parciális deriválttól való jobb megkülönböztethetőség céljából *totális differenciálhatóság*nak is nevezni) nem tudjuk egyszerűen az egyváltozós függvények eredeti, különbségi hányadoson alapuló differenciálhatóság-fogalmából definiálni. Ugyanis, vektorok körében nem értelmezhető az osztás. Ezért szükségünk lesz a differenciálhatóságnak a 6. Fejezetben levezetett ekvivalens megfogalmazásaira, ezen belül is leginkább a (6.4) Weierstrass-féle definícióra, amelyeket az alábbiakban idézünk fel.

15.5. Definíció. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény *differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban*, ha

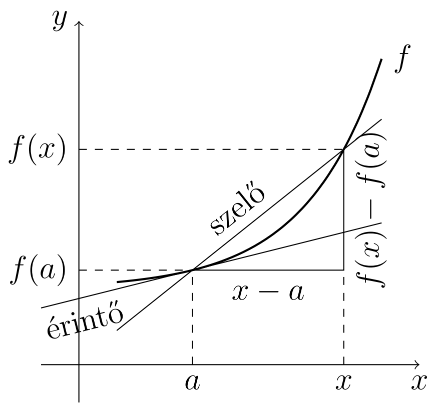
$$\exists \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a) \cdot (x - a)}{x - a} = 0 \tag{15.1}$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \varepsilon(x) \cdot (x - a), \quad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0. \tag{15.2}$$



15.4. ábra. Egyváltozós függvény deriváltja a-ban

15.6. *Megjegyzés.* Az

$$y = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

a függvény *a pontbeli érintőjének* egyenlete (ld. a 6.6 Definíciót).

15.7. Definíció (Ld. lineáris algebra)**.** Az $\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *(homogén) lineáris függvény*, ha $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, hogy

$$\ell(x, y) = \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Itt $\alpha_1 = \ell(1,0)$, $\alpha_2 = \ell(0,1)$. Ezért úgy is fogalmazhatunk, hogy $\ell : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lineneáris függvény, ha létezik egyetlen $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ sorvektor, amellyel

$$\ell(x,y) = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \langle \alpha, (x,y) \rangle.$$

Itt az első szorzás mint mátrix-szorzás értendő, ahol az $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ egy sorból álló mátrix az ℓ lineáris leképezés standard bázisban felírt mátrixa. Mivel a lineáris leképezéseket gyakran azonosítjuk a (standard bázisban felírt) mátrixukkal, ezért ℓ-et is azonosíthatjuk az α vektorral.

15.2.2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eset

15.8. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény, $(a,b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Azt mondjuk, hogy f *differenciálható az* (a,b) *pontban*, ha létezik olyan $\ell = \ell_{(a,b)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lineáris függvény, melyre

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - \ell(x-a, y-b)}{|(x-a, y-b)|} = 0 \tag{15.3}$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{|f(x,y) - f(a,b) - \ell(x-a, y-b)|}{|(x-a, y-b)|} = 0 \tag{15.4}$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x,y) = f(a,b) + \ell(x-a, y-b) + \varepsilon(x,y) \cdot |(x-a, y-b)|, \quad \lim_{(x,y)\to(a,b)} \varepsilon(x,y) = 0 \tag{15.5}$$

Ekkor az ℓ lineáris leképezést hívjuk az f függvény (a,b) pontbeli *derivált*jának. Itt a (15.3) kitétel a (15.1) egyváltozós differenciálhatósági definíció, a (15.5) pedig a (15.2) egyenlőség analógja (ez utóbbi esetben az $f'(a) \in \mathbb{R}$ szám tekinthető egy $f'(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lineáris leképezésnek, ahol a függvény az ezzel a számmal való szorzás).

15.9. Tétel. *Ha f differenciálható (a,b)-ben, akkor folytonos is (a,b)-ben.*

Bizonyítás. A (15.5) egyenlet alapján könnyen ellenőrizhető, hogy $\exists \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$, tehát f folytonos (a,b)-ben (itt felhasználjuk, hogy lineáris függvények folytonosak, ld. a 11.8 Példát). $\square$

15.10. Tétel. *Ha f differenciálható (a,b)-ben, akkor f-nek léteznek a parciális deriváltjai (a,b)-ben, és a 15.8 Definícióban*

$$\ell(x,y) = \partial_1 f(a,b) \cdot x + \partial_2 f(a,b) \cdot y.$$

Bizonyítás. Tekintsük a differenciálhatóság (15.3) definícióját és rögzítsük le $y = b$-t! Ekkor $\ell(x,y) = \alpha_1 \cdot x + \alpha_2 \cdot y$ jelöléssel kapjuk, hogy

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x,b) - f(a,b) - \alpha_1 \cdot (x-a)}{|x-a|} = 0,$$

amiből a 15.1 Definíció alapján következik, hogy $\exists \partial_1 f(a,b) = \alpha_1$. A $\exists \partial_2 f(a,b) = \alpha_2$ bizonyítása hasonlóan adódik. □

Fontos, hogy ez a tétel nem megfordítható.

15.11. Példa. Az

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ vagy } y = 0, \\ 1, & \text{különben} \end{cases}$$

függvénynek léteznek a parciális deriváltjai $(0,0)$-ban, $\partial_1 f(0,0) = \partial_2 f(0,0) = 0$ (hiszen az $x \mapsto f(x,0)$ és az $y \mapsto f(0,y)$ függvények azonosan 0-k), de a függvény még csak nem is folytonos $(0,0)$-ban.

15.12. Következmény. *Ha f differenciálható (a,b)-ben, akkor a derivált egyértelmű.*

Az alábbi következmény azt fogalmazza meg, hogy a parciális deriváltak létezése mellett mi szükséges a differenciálhatósághoz.

15.13. Következmény. *Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény, $(a,b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Az f pontosan akkor differenciálható az (a,b) pontban, ha ott léteznek a parciális deriváltjai $\partial_1 f(a,b)$ és $\partial_2 f(a,b)$, továbbá*

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} \frac{f(x,y) - f(a,b) - \partial_1 f(a,b) \cdot (x-a) - \partial_2 f(a,b) \cdot (y-b)}{|(x-a, y-b)|} = 0 \tag{15.6}$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} \frac{|f(x,y) - f(a,b) - \partial_1 f(a,b) \cdot (x-a) - \partial_2 f(a,b) \cdot (y-b)|}{|(x-a, y-b)|} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x,y) = f(a,b) + \partial_1 f(a,b) \cdot (x-a) + \partial_2 f(a,b) \cdot (y-b) + \varepsilon(x,y) \cdot |(x-a, y-b)|, \quad \lim_{(x,y) \to (a,b)} \varepsilon(x,y) = 0$$

15.14. Definíció. Ha f differenciálható (a,b)-ben, akkor az

$$f'(a,b) := (\partial_1 f(a,b), \partial_2 f(a,b)) \in \mathbb{R}^2$$

vektort a függvény (a,b)-beli *deriváltvektorának* vagy *gradiensének* nevezzük. Egyéb jelölései: $\operatorname{grad} f(a,b)$, $\nabla f(a,b)$.
A fentiek alapján világos, hogy az ℓ lineáris leképezés mint f deriváltja azonosítható ezzel a vektorral.

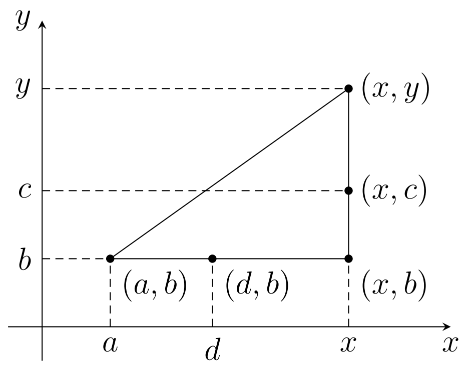
Az eredeti definíciót sajnos ritkán tudjuk használni konkrét függvények differenciálhatóságának eldöntésére. Az alábbiakban egy, a gyakorlatban sokszor alkalmazható elégséges feltételt bizonyítunk.

15.15. Tétel (Differenciálhatóság elégséges feltétele)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény, $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$, és tegyük fel, hogy a $\partial_1 f$ és $\partial_2 f$ parciális deriváltfüggvények léteznek az (a, b) pont egy környezetében és* folytonosak *(a, b)-ben. Ekkor f differenciálható (a, b)-ben.*

Bizonyítás. Legyen $\varepsilon > 0$ rögzítve. Megmutatjuk, hogy létezik $\delta > 0$, hogy ha $|(x, y) - (a, b)| < \delta$, akkor

$$|f(x, y) - f(a, b) - \partial_1 f(a, b) \cdot (x - a) - \partial_2 f(a, b) \cdot (y - b)| < \varepsilon \cdot |(x - a, y - b)|, \quad (15.7)$$

amivel a 15.13 Következmény alapján az állítást beláttuk. A bizonyítás menete, hogy



15.5. ábra. Folytonos parciális deriváltak és differenciálhatóság, bizonyítás

a (15.7) egyenlőtlenség bal oldalán a háromszög-egyenlőtlenség segítségével „becsempésszük” a 15.5. ábrán látható (x, b) pontot, pontosabban az $f(x, b)$ függvényértéket, és a

$$|f(x, y) - f(x, b) - \partial_2 f(a, b) \cdot (y - b)|\,, \text{ ill. } |f(x, b) - f(a, b) - \partial_1 f(a, b) \cdot (x - a)|$$

kifejezésekről igazoljuk, hogy elegendően kicsik.

A $\partial_1 f$ és $\partial_2 f$ parciális deriváltfüggvények folytonossága miatt létezik $\delta > 0$, hogy ha $|(x, y) - (a, b)| < \delta$, akkor

$$|\partial_1 f(x, y) - \partial_1 f(a, b)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ és } |\partial_2 f(x, y) - \partial_2 f(a, b)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (15.8)$$

Rögzítsünk le egy $|(x, y) - (a, b)| < \delta$ tulajdonságú (x, y) pontot és alkalmazzuk a $t \mapsto f(x, t)$ függvényre a 6.34 egyváltozós Lagrange-féle középértéktételt a $[b, y]$ (vagy $[y, b]$) szakaszon! Eszerint létezik $c = c(x, y) \in [b, y]$ pont, melyre

$$f(x, y) - f(x, b) = \partial_2 f(x, c) \cdot (y - b). \quad (15.9)$$

Alkalmazva most a $t \mapsto f(t,b)$ függvényre az egyváltozós Lagrange-féle középértéktételt az $[a,x]$ (vagy $[x,a]$) szakaszon kapjuk, hogy létezik $d = d(x,y) \in [a,x]$ pont, melyre

$$f(x,b) - f(a,b) = \partial_1 f(d,b) \cdot (x-a). \tag{15.10}$$

A feltételekből adódik, hogy

$$|(x,c) - (a,b)| < \delta \text{ és } |(d,b) - (a,b)| < \delta$$

is teljesül, amiből (15.8) alapján

$$|\partial_2 f(x,c) - \partial_2 f(a,b)| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ és } |\partial_1 f(d,b) - \partial_1 f(a,b)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{15.11}$$

A (15.9), (15.10) és (15.11) összefüggések felhasználásával

$$\begin{aligned}
&|f(x,y) - f(a,b) - \partial_1 f(a,b) \cdot (x-a) - \partial_2 f(a,b) \cdot (y-b)| \\
&\leq |f(x,y) - f(x,b) - \partial_2 f(a,b) \cdot (y-b)| + |f(x,b) - f(a,b) - \partial_1 f(a,b) \cdot (x-a)| \\
&= |\partial_2 f(x,c) \cdot (y-b) - \partial_2 f(a,b) \cdot (y-b)| + |\partial_1 f(d,b) \cdot (x-a) - \partial_1 f(a,b) \cdot (x-a)| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} \cdot |y-b| + \frac{\varepsilon}{2} \cdot |x-a| < \varepsilon \cdot |(x-a, y-b)|,
\end{aligned}$$

amivel a bizonyítás kész. □

15.16. Definíció. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt *kétváltozós polinomfüggvénynek* (vagy *polinomnak*) nevezzük, ha az $f(x,y)$ függvényérték $c_{n,m} \cdot x^n \cdot y^m$ ($c_{n,m} \in \mathbb{R},\ n,m \in \mathbb{N}$) alakú tagok véges összegeként áll elő. Más szóval,

$$f(x,y) = \sum_{n,m=1}^{N} c_{n,m} \cdot x^n \cdot y^m, \quad c_{n,m} \in \mathbb{R}.$$

Két kétváltozós polinom hányadosát *kétváltozós racionális törtfüggvénynek* nevezzük.

15.17. Következmény. *A polinomfüggvények mindenütt differenciálhatók (hiszen parciális deriváltjaik is polinomok, és a polinomok folytonosak $\mathbb{R}^2$-en). A racionális törtfüggvények differenciálhatók az értelmezési tartományuk minden pontjában (hiszen parciális deriváltjaik is racionális törtfüggvények, és a racionális törtfüggvények folytonosak $\mathbb{R}^2$-en).*

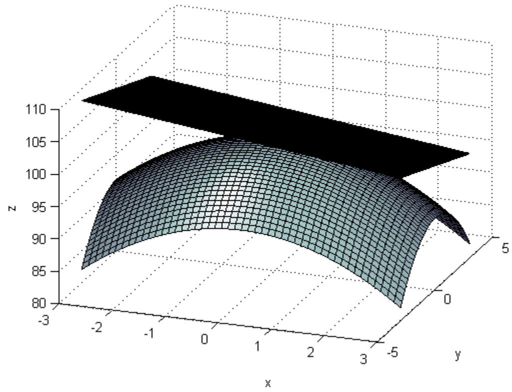
15.18. Definíció. Legyen $(a,b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ és f differenciálható (a,b)-ben. Ekkor az f *függvény (a,b) pontbeli érintősíkja* a

$$z = f(a,b) + \partial_1 f(a,b) \cdot (x-a) + \partial_2 f(a,b) \cdot (y-b)$$

egyenletű sík. Átrendezve,

$$0 = \partial_1 f(a,b) \cdot (x-a) + \partial_2 f(a,b) \cdot (y-b) + (-1)(z - f(a,b)),$$

tehát az érintősík az $\mathbb{R}^3$ tér egy $(a,b,f(a,b))$ ponton átmenő $(\partial_1 f(a,b), \partial_2 f(a,b), -1)$ normálvektorú síkja.



15.6. ábra. Az $f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$ függvény egy érintősíkja

15.19. *Megjegyzés.* A derivált definíciójából adódik, hogy az érintősík „elég közel" van a függvény grafikonjához, hiszen

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{|f(x,y) - (f(a,b) + \partial_1 f(a,b)\cdot(x-a) + \partial_2 f(a,b)\cdot(y-b))|}{|(x-a, y-b)|} = 0,$$

ahol a számlálóban az $f(x,y)$ és az érintősík megfelelő pontjának távolsága szerepel.

15.2.3. Iránymenti derivált, Lagrange-középértéktétel

15.20. Definíció. Legyen $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ tetszőleges vektor. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény $(a,b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontbeli v irányú *iránymenti deriváltja* létezik, ha

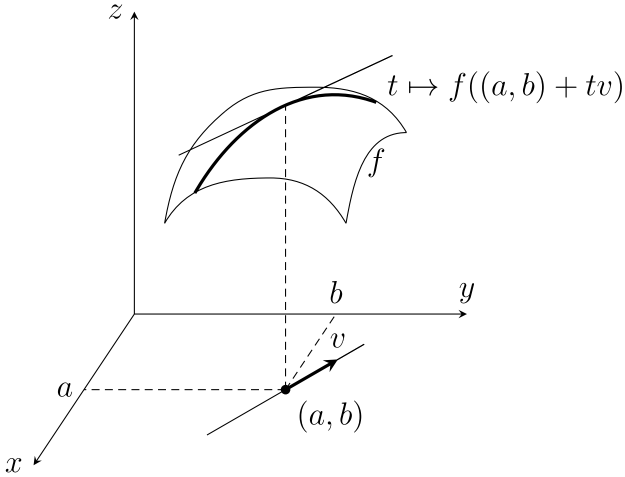
$$\exists \lim_{t\to 0} \frac{f((a,b) + t\cdot(v_1,v_2)) - f(a,b)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv_1, b+tv_2) - f(a,b)}{t} \in \mathbb{R}.$$

Ekkor a fenti határértéket nevezzük az f függvény *v irányú iránymenti deriváltjának (a,b)-ben*, és jelöljük: $\partial_v f(a,b)$ (vagy $D_v f(a,b)$ vagy $\frac{\partial f}{\partial v}(a,b)$). Itt valójában arról van szó, hogy a $t \mapsto f((a,b) + t\cdot(v_1,v_2))$ egyváltozós függvényt deriváljuk 0-ban.

Amennyiben $|v| = 1$, akkor $\partial_v f(a,b)$ azt jelenti, hogy f-et megszorítjuk az (a,b) ponton átmenő, v irányvektorú egyenesre, és a kapott egyváltozós függvény deriváljuk $t = 0$-ban.

15.21. *Megjegyzés.* A parciális deriváltak valójában speciális iránymenti deriváltak:

$$\partial_1 f(a,b) = \partial_{(1,0)} f(a,b), \quad \partial_1 f(a,b) = \partial_{(0,1)} f(a,b)$$



15.7. ábra. Iránymenti derivált

15.22. Tétel. *Ha egy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $(a,b) \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ pontban, akkor ebben a pontban létezik minden $v = (v_1, v_2)$ irány menti deriváltja $\partial_v f(a,b)$, továbbá*

$$\begin{aligned}\partial_v f(a,b) &= \langle f'(a,b), v\rangle = \langle (\partial_1 f(a,b), \partial_2 f(a,b)), (v_1, v_2)\rangle \\ &= \partial_1 f(a,b)\cdot v_1 + \partial_2 f(a,b)\cdot v_2.\end{aligned}$$

Úgy is fogalmazhatunk, hogy $\partial_v f(a,b)$ értéke nem más, mint az $f'(a,b)$ lineáris leképezés alkalmazva a v vektorra.

Bizonyítás. A bizonyításban az egyszerűség kedvéért (a,b) helyett írjunk a-t, (x,y) helyett pedig x-et. Ekkor a 15.13 Következmény alapján f differenciálhatósága a-ban azt jelenti, hogy létezik olyan ε függvény, melyre

$$f(\mathsf{x}) = f(\mathsf{a}) + \langle f'(\mathsf{a}), \mathsf{x}-\mathsf{a}\rangle + \varepsilon(\mathsf{x})\cdot|\mathsf{x}-\mathsf{a}|, \quad \lim_{\mathsf{x}\to\mathsf{a}} \varepsilon(\mathsf{x}) = 0.$$

Írjunk x helyébe $\mathsf{a}+tv$-t! Ekkor

$$f(\mathsf{a}+tv) = f(\mathsf{a}) + \langle f'(\mathsf{a}), tv\rangle + \varepsilon(\mathsf{a}+tv)\cdot|t|\cdot|v|.$$

Mivel a skaláris szorzás lineáris, ezért

$$\frac{f(\mathsf{a}+tv)-f(\mathsf{a})}{t} = \langle f'(\mathsf{a}), v\rangle \pm \varepsilon(\mathsf{a}+t\cdot v)\cdot|v|. \tag{15.12}$$

Elvégezve a $t \to 0$ határátmenetet kapjuk, hogy

$$\partial_v f(\mathsf{a}) = \langle f'(\mathsf{a}), v\rangle.$$

□

15.23. Példa. Olyan függvényre, amelynek minden v irányú deriváltja létezik a $(0,0)$-ban, de mégcsak nem is folytonos a $(0,0)$-ban.

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } y = x^2,\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy a függvényt bármely, az orgión átmenő egyenesre megszorítva a kapott egyváltozós függvény az origó egy környezetében azonosan 0, így $\partial_v f(0,0) = 0$.

15.24. Definíció. Legyenek $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ pontok a síkon. Az $[a,b]$ *szakasz* az

$$[a,b] := \{a + t(b-a) : t \in [0,1]\} = \{(1-t)a + tb : t \in [0,1]\}$$

ponthalmaz. Hasonlóan értelmezhető az (a,b) nyílt szakasz.

15.25. Tétel (Lagrange-féle középértéktétel)**.** *Legyen az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $[a,b]$ szakaszon és differenciálható az (a,b) szakasz pontjaiban, $a, b \in \mathbb{R}^2$. Ekkor*

1. *az $F(t) := f(a + t(b-a))$, $t \in [0,1]$ függvény differenciálható $(0,1)$-en és*

$$F'(t) = \langle f'(a + t(b-a)), b - a\rangle, \quad t \in (0,1);$$

2. *létezik olyan $c \in [a,b]$ pont, melyre*

$$f(b) - f(a) = \langle f'(c), b-a\rangle = \partial_1 f(c) \cdot (b_1 - a_1) + \partial_2 f(c) \cdot (b_2 - a_2).$$

Bizonyítás. 1. Legyen $t \in (0,1)$ rögzítve. Azt kell belátnunk, hogy

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \langle f'(a + t(b-a)), b-a\rangle.$$

Definíció szerint $F(t+h) = f(a + (t+h) \cdot (b-a)) = f(a + t(b-a) + h(b-a))$. Legyen $\tilde{a} := a + t(b-a) \in [a,b]$, $v := b - a$. Ekkor a belátandó állítás

$$\exists \lim_{h \to 0} \frac{f(\tilde{a} + hv) - f(\tilde{a})}{h} = \langle f'(\tilde{a}), v\rangle,$$

ami adódik a 15.22 Tételből.

2. Az 1. pont jelölésével $f(b) = F(1)$, $f(a) = F(0)$. Mivel F folytonos $[0,1]$-en és differenciálható $(0,1)$-en, ezért az egyváltozós 6.34 Lagrange-féle középértéktétel szerint létezik $u \in (0,1)$, melyre

$$f(b) - f(a) = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = F'(u) = \langle f'(a + u(b-a)), b-a\rangle$$

az 1. pont alapján. Ebből $c := a + u(b-a) \in [a,b]$ jelöléssel következik az állítás. $\square$

15.2.4. $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ eset

A fentiek természetes módon általánosíthatók a p változós esetre.

15.26. Definíció (Ld. lineáris algebra)**.** Az $\ell : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *(homogén) lineáris függvény*, ha $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$, hogy

$$\ell(x) = \alpha_1 \cdot x_1 + \dots + \alpha_p \cdot x_p, \quad x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p.$$

(Itt $\alpha_1 = \ell(1, 0, \dots, 0), \dots, \alpha_p = \ell(0, \dots, 0, 1)$.) Más szóval, létezik egyértelműen $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^{1\times p}$ egysoros mátrix (vektor), melyre $\ell(x) = \langle a, x\rangle$.

15.27. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény, $a = (a_1, \dots, a_p) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Azt mondjuk, hogy f *differenciálható az a pontban*, ha létezik olyan $\ell = \ell_a : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ lineáris függvény, melyre

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - \ell(x - a)}{|x - a|} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x\to a} \frac{|f(x) - f(a) - \ell(x - a)|}{|x - a|} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x) = f(a) + \ell(x - a) + \varepsilon(x) \cdot |x - a|, \ \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$$

Ekkor az ℓ lineáris leképezést hívjuk az f függvény a pontbeli *derivált*jának.

15.28. Tétel. *Ha $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ differenciálható a-ban, akkor folytonos is a-ban.*

15.29. Tétel. *A 15.27 Definícióban*

$$\ell(x) = \partial_1 f(a) \cdot x_1 + \dots + \partial_p f(a) \cdot x_p,$$

tehát a derivált egyértelmű.

15.30. Definíció. Ha f differenciálható a-ban, akkor az

$$f'(a) := (\partial_1 f(a), \dots, \partial_p f(a)) \in \mathbb{R}^p$$

vektort a függvény a-beli *deriváltvektorának* vagy *gradiensének* nevezzük, ami azonosítható a deriválttal. További jelölések: $\operatorname{grad} f(a)$, $\nabla f(a)$.

15.31. Tétel (Differenciálhatóság elégséges feltétele)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$, és tegyük fel, hogy a $\partial_1 f, \dots, \partial_p f$ parciális deriváltfüggvények mind értelmezve vannak az a pont egy környezetében és* folytonosak *a-ban. Ekkor f differenciálható a-ban.*

15.32. Definíció. Legyen $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ és f differenciálható a-ban. Ekkor az f *függvény a pontbeli érintő hipersíkja* a

$$x_{p+1} = f(a) + \partial_1 f(a) \cdot (x_1 - a_1) + \cdots + \partial_p f(a) \cdot (x_p - a_p)$$

egyenletű hipersík. Átrendezve,

$$0 = \partial_1 f(a) \cdot (x_1 - a_1) + \cdots + \partial_p f(a) \cdot (x_p - a_p) + (-1)(x_{p+1} - f(a)),$$

tehát az érintő hipersík az $\mathbb{R}^{p+1}$ tér egy $(a_1, \ldots, a_p, f(a))$ ponton átmenő $(\partial_1 f(a), \ldots, \partial_p f(a), -1)$ normálvektorú hipersíkja.

15.33. Definíció. Legyen $v \in \mathbb{R}^p$ tetszőleges vektor. Az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontbeli v irányú *iránymenti deriváltja* létezik, ha

$$\exists \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t} \in \mathbb{R}.$$

Ekkor a fenti határértéket nevezzük az f függvény *v irányú iránymenti deriváltjának a-ban*, és jelöljük: $\partial_v f(a)$ (vagy $D_v f(a)$ vagy $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$). Itt valójában arról van szó, hogy a $t \mapsto f(a + tv)$ egyváltozós függvényt deriváljuk 0-ban.

15.34. Tétel. *Ha egy $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban, akkor ebben a pontban létezik minden $v \in \mathbb{R}^p$ irány menti deriváltja $\partial_v f(a)$, továbbá*

$$\begin{aligned} \partial_v f(a) &= \langle f'(a), v \rangle = \langle (\partial_1 f(a), \ldots, \partial_p f(a)), (v_1, \ldots, v_p) \rangle \\ &= \partial_1 f(a) \cdot v_1 + \cdots + \partial_p f(a) \cdot v_p \end{aligned}$$

15.35. Definíció. Legyenek $a, b \in \mathbb{R}^p$ pontok a síkon. Az $[a, b]$ *(általánosított) szakasz* az

$$[a, b] := \{a + t(b - a) : t \in [0, 1]\} = \{(1 - t)a + tb : t \in [0, 1]\}$$

ponthalmaz. Hasonlóan értelmezhető az (a, b) nyílt szakasz.

15.36. Tétel (Lagrange-féle középértéktétel)**.** *Legyen az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $[a, b]$ szakaszon és differenciálható az (a, b) szakasz pontjaiban, $a, b \in \mathbb{R}^p$. Ekkor*

1. *az $F(t) := f(a + t(b - a))$, $t \in [0, 1]$ függvény differenciálható* $(0, 1)$*-en és*

$$F'(t) = \langle f'(a + t(b - a)), b - a \rangle, \quad t \in (0, 1);$$

2. *létezik olyan $c \in [a, b]$ pont, melyre*

$$f(b) - f(a) = \langle f'(c), b - a \rangle = \partial_1 f(c) \cdot (b_1 - a_1) + \cdots + \partial_p f(c) \cdot (b_p - a_p).$$

15.3. A Young-tétel

Egy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény másodrendű parciális deriváltjait az első, ill. második parciális deriváltfüggvények további parciális deriváltjaiból nyerjük. A következő definíciót az egyszerűség kedvéért deriváltfüggvényekre, és nem pontbeli deriváltakra mondjuk ki.

15.37. Definíció. Tegyük fel, hogy egy $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ parciális deriváltfüggvényei is parciálisan deriválhatók mindkét változó szerint. Ekkor f *másodrendű parciális deriváltfüggvényei*:

$$\partial_{11} f := \partial_1(\partial_1 f),\ \partial_{12} f := \partial_1(\partial_2 f),\ \partial_{21} f := \partial_2(\partial_1 f),\ \partial_{22} f := \partial_2(\partial_2 f).$$

Szokásos jelölések még: $D_{11} f$, $\partial_1^2 f$, stb.

Felmerül a kérdés, hogy vajon $\partial_{12} f = \partial_{21} f$ teljesül-e általában. Az alábbi példa mutatja, hogy nem.

15.38. Példa (G. Peano, 1858-1932 olasz matematikustól)**.** A

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

függvény esetén $\partial_{12} f(0,0) \neq \partial_{21} f(0,0)$. Ugyanis,

$$\partial_1 f(x,y) = \begin{cases} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$\partial_2 f(x,y) = \begin{cases} x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

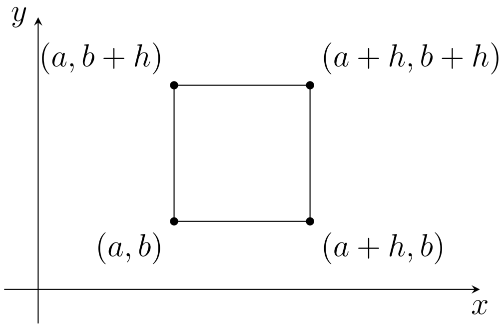
Ebből látható, hogy $\partial_1 f(0,y) = -y$, tehát $\partial_{21} f(0,0) = -1$, másrészt $\partial_2 f(x,0) = x$, tehát $\partial_{12} f(0,0) = 1$.

Young tétele elégséges feltételt ad arra, hogy mikor cserélhető fel az egyes változók szerinti deriválás sorrendje.

15.39. Tétel (Young)**.** *Ha az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény $\partial_1 f$ és $\partial_2 f$ parciális deriváltfüggvényei értelmezve vannak az $(a,b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pont egy környezetében és* differenciálhatók *az (a,b) pontban, akkor*

$$\partial_{12} f(a,b) = \partial_{21} f(a,b).$$

15.40. Lemma.



15.8. ábra. Young-tétel bizonyítása

1. *Ha a $\partial_1 f$ parciális deriváltfüggvény értelmezve van az $(a,b) \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ pont egy környezetében és differenciálható az (a,b) pontban, akkor*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b+h)-f(a+h,b)-f(a,b+h)+f(a,b)}{h^2} = \partial_{21} f(a,b). \tag{15.13}$$

2. *Ha a $\partial_2 f$ parciális deriváltfüggvény értelmezve van az $(a,b) \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ pont egy környezetében és differenciálható az (a,b) pontban, akkor*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b+h)-f(a+h,b)-f(a,b+h)+f(a,b)}{h^2} = \partial_{12} f(a,b). \tag{15.14}$$

Bizonyítás. Az 1. pontot bizonyítjuk, a 2. teljesen hasonlóan megy. A differenciálhatóság 15.13 Következménybeli definícióját felírva a $\partial_1 f$ függvényre (a,b)-ben kapjuk, hogy

$$\partial_1 f(x,y) = \partial_1 f(a,b) + \partial_{11} f(a,b)\cdot(x-a) + \partial_{21} f(a,b)\cdot(y-b) + \varepsilon(x,y)\cdot|(x-a,y-b)|, \tag{15.15}$$

ahol $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \varepsilon(x,y) = 0$. Rögzített $h > 0$ esetén jelölje

$$u_h(x) := f(x,b+h) - f(x,b) \tag{15.16}$$

egyváltozós függvényt. Ekkor a lemma állításában szereplő kifejezésre

$$f(a+h,b+h)-f(a+h,b)-f(a,b+h)+f(a,b) = u_h(a+h) - u_h(a). \tag{15.17}$$

Mivel f az első változója szerint differenciálható (a,b) egy környezetében, ezért kis h esetén u_h is differenciálható az a pont egy környezetében. Alkalmazzuk egy ilyen u_h-ra az egyváltozós Lagrange-középértéktételt $[a, a+h]$-n! Eszerint létezik $\alpha = \alpha(h) \in [a, a+h]$, melyre

$$u_h(a+h) - u_h(a) = u_h'(\alpha)\cdot h = (\partial_1 f(\alpha, b+h) - \partial_1 f(\alpha, b))\cdot h \tag{15.18}$$

az u_h (15.16) definíciója alapján. Most írjuk fel a (15.15) egyenlőséget (x,y) helyett $(\alpha, b+h)$-ra ill. (α, b)-re! Ebből

$$\begin{aligned}\partial_1 f(\alpha, b+h) &= \partial_1 f(a,b) + \partial_{11} f(a,b)\cdot(\alpha - a) + \partial_{21} f(a,b)\cdot h + \varepsilon(\alpha, b+h)\cdot|(\alpha-a,h)|;\\ \partial_1 f(\alpha, b) &= \partial_1 f(a,b) + \partial_{11} f(a,b)\cdot(\alpha - a) + \partial_{21} f(a,b)\cdot 0 + \varepsilon(\alpha, b)\cdot|\alpha-a|.\end{aligned} \tag{15.19}$$

Összevetve a (15.17), (15.18) és (15.19) egyenlőségeket kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&\frac{f(a+h,b+h) - f(a+h,b) - f(a,b+h) + f(a,b)}{h^2} = \frac{u_h(a+h) - u_h(a)}{h^2}\\ &= \frac{\partial_1 f(\alpha, b+h) - \partial_1 f(\alpha, b)}{h}\\ &= \partial_{21} f(a,b) + \varepsilon(\alpha, b+h)\cdot\frac{|(\alpha-a,h)|}{h} - \varepsilon(\alpha,b)\cdot\frac{|\alpha-a|}{h}.\end{aligned}$$

Mivel $|\alpha - a| \le h$, ezért az utolsó két tagban a törtek korlátosak, $h \to 0$ esetén $\alpha = \alpha(h) \to a$, így $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \varepsilon(x,y) = 0$ miatt $\lim_{h\to 0} \varepsilon(\alpha, b+h) = \lim_{h\to 0} \varepsilon(\alpha, b) = 0$. Ebből

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b+h) - f(a+h,b) - f(a,b+h) + f(a,b)}{h^2} = \partial_{21} f(a,b),$$

és ezt kellett belátnunk. □

Bizonyítás. (Young-tételé) Mivel a Young-tétel feltételei alapján a Lemma mindkét pontjának feltétele teljesül, ezért szükségképpen $\partial_{12} f(a,b) = \partial_{21} f(a,b)$. □

15.41. Definíció. Legyen f differenciálható az $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pont egy környezetében. Ha f parciális deriváltfüggvényei differenciálhatók az (a,b) pontban, akkor azt mondjuk, hogy f *kétszer differenciálható* az (a,b) pontban.

A definícióból nyilvánvaló, hogy ha f kétszer differenciálható (a,b)-ben, akkor teljesül rá a Young-tétel.

15.4. A Taylor-polinom

A továbbiakban az egyváltozós függvényekre megismert Taylor-polinom fogalmát (ld. a 6.64 Definíciót) általánosítjuk többváltozós esetre.

15.42. Definíció. Legyen az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható az $(a,b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban. Ekkor az f függvény (a,b) pontbeli első *Taylor-polinomja*

$$T^f_{1,(a,b)}(x,y) = f(a,b) + \partial_1 f(a,b)\cdot(x-a) + \partial_2 f(a,b)\cdot(y-b)$$

az a legfeljebb elsőfokú polinomfüggvény, melynek grafikonja az érintősík.

A (15.6) képlet alapján

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - T^f_{1,(a,b)}(x,y)}{|(x-a, y-b)|} = 0,$$

amit úgy is mondhatunk, hogy az első Taylor-polinom *elsőrendben közelíti* f*-et*, mivel a nevezőben az $(x-a, y-b)$ vektor hosszának első hatványa szerepel (ezt egyváltozóban is meggondoltuk, ld. a (6.4) Weierstrass-féle formulát.

15.43. Definíció. Legyen az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $(a,b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban. Ekkor az f függvény (a,b) pontbeli második *Taylor-polinomja*

$$\begin{aligned}
&T^f_{2,(a,b)}(x,y) = f(a,b) + \partial_1 f(a,b) \cdot (x-a) + \partial_2 f(a,b) \cdot (y-b) + \\
&+ \frac{1}{2!}\big(\partial_{11} f(a,b) \cdot (x-a)^2 + \partial_{21} f(a,b) \cdot (x-a) \cdot (y-b) + \partial_{12} f(a,b) \cdot (x-a) \cdot (y-b) \\
&+ \partial_{22} f(a,b) \cdot (y-b)^2\big)
\end{aligned}$$

egy legfeljebb másodfokú polinomfüggvény.

Jelölés Legyen az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható az $(a,b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban. Jelölje $\mathrm{d}^1 f(a,b) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és $\mathrm{d}^2 f(a,b) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ az alábbi (kétváltozós) függvényeket:

$$\begin{aligned}
\big(\mathrm{d}^1 f(a,b)\big)(x,y) &:= \partial_1 f(a,b) \cdot x + \partial_2 f(a,b) \cdot y; \\
\big(\mathrm{d}^2 f(a,b)\big)(x,y) &:= \partial_{11} f(a,b) \cdot x^2 + \partial_{21} f(a,b) \cdot x \cdot y + \partial_{12} f(a,b) \cdot x \cdot y + \partial_{22} f(a,b) \cdot y^2 \\
&= \partial_{11} f(a,b) \cdot x^2 + 2\partial_{21} f(a,b) \cdot x \cdot y + \partial_{22} f(a,b) \cdot y^2
\end{aligned}$$

Ezzel a jelöléssel

$$T^f_{2,(a,b)}(x,y) = f(a,b) + (\mathrm{d}^1 f(a,b))(x-a, y-b) + \frac{1}{2!}(\mathrm{d}^2 f(a,b))(x-a, y-b) \qquad (15.20)$$

Ez nagyon hasonlít az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények második Taylor-polinomjának alakjához, ami

$$T^f_{2,a}(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{1}{2} f''(a) \cdot (x-a)^2.$$

15.44. Tétel.

$$T^f_{2,(a,b)}(a,b) = f(a,b), \quad \partial_i T^f_{2,(a,b)}(a,b) = \partial_i f(a,b), \quad \partial_{ij} T^f_{2,(a,b)}(a,b) = \partial_{ij} f(a,b), \ i,j = 1,2.$$

Továbbá, ha p *olyan legfeljebb másodfokú polinomfüggvény, melyre a fentiek teljesülnek, akkor* $p = T^f_{2,(a,b)}$.

Bizonyítás. A tétel első része egyszerű számolással ellenőrizhető. A második részt nem bizonyítjuk. $\square$

A következő tétel az egyváltozós 6.67 Következmény megfelelője.

15.45. Tétel. *Legyen az* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *függvény kétszer differenciálható az* $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ *pontban. Ekkor*

1.
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x, y) - T^f_{2,(a,b)}(x, y)}{|(x - a, y - b)|^2} = 0; \tag{15.21}$$

2. *Ha* p *olyan legfeljebb másodfokú polinomfüggvény, melyre* (15.21) *teljesül, akkor* $p = T^f_{2,(a,b)}$.

Bizonyítás. Az 1. pontot bizonyítjuk, a 2-t nem. Jelölje $g(x, y) := f(x, y) - T^f_{2,(a,b)}(x, y)$. A 15.44 Tétel szerint

$$g(a, b) = 0,\ \partial_i g(a, b) = 0,\ \partial_{ij} g(a, b) = 0, \quad i, j = 1, 2. \tag{15.22}$$

Mivel f és $T^f_{2,(a,b)}$ differenciálható az (a, b) egy környezetében, így g is. Legyen (x, y) ebből a környezetből, és alkalmazzuk g-re a 15.25 Lagrange-középértéktételt az $[(a, b), (x, y)]$ szakaszon! Eszerint létezik $c = (c_1, c_2) \in [(a, b), (x, y)]$, melyre

$$g(x, y) = g(x, y) - g(a, b) = \partial_1 g(c) \cdot (x - a) + \partial_2 g(c) \cdot (y - b). \tag{15.23}$$

Mivel f kétszer differenciálható (a, b)-ben, $T^f_{2,(a,b)}$ pedig akárhányszor differenciálható a síkon (hiszen polinom), ezért g is kétszer differenciálható (a, b)-ben. Definíció szerint és (15.22) alapján

$$\begin{aligned}
\partial_1 g(x, y) &= \partial_1 g(a, b) + \partial_{11} g(a, b) \cdot (x - a) + \partial_{21} g(a, b) \cdot (y - b) + \varepsilon_1(x, y) \cdot |(x - a, y - b)| \\
&= \varepsilon_1(x, y) \cdot |(x - a, y - b)| \\
\partial_2 g(x, y) &= \partial_2 g(a, b) + \partial_{12} g(a, b) \cdot (x - a) + \partial_{22} g(a, b) \cdot (y - b) + \varepsilon_2(x, y) \cdot |(x - a, y - b)| \\
&= \varepsilon_2(x, y) \cdot |(x - a, y - b)|.
\end{aligned}$$

Ezeket felírva (x, y) helyett $c = (c_1, c_2)$-re kapjuk, hogy

$$\partial_1 g(c) = \varepsilon_1(c) \cdot |(c_1 - a, c_2 - b)|, \quad \partial_2 g(c) = \varepsilon_2(c) \cdot |(c_1 - a, c_2 - b)|.$$

A kapott kifejezéseket a (15.23) egyenlőségbe helyettesítve

$$g(x, y) = \varepsilon_1(c) \cdot |(c_1 - a, c_2 - b)| \cdot (x - a) + \varepsilon_2(c) \cdot |(c_1 - a, c_2 - b)| \cdot (y - b).$$

A c pont választása miatt $(x,y) \to (a,b)$ esetén $c = (c_1, c_2) \to (a,b)$. Továbbá, nyilván $|(c_1 - a, c_2 - b)| \le |(x-a, y-b)|$, $|x-a| \le |(x-a,y-b)|$ és $|y-b| \le |(x-a,y-b)|$. Ezek alapján

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y) - T^f_{2,(a,b)}(x,y)}{|(x-a,y-b)|^2} = \lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{g(x,y)}{|(x-a,y-b)|^2} \\
&= \lim_{(x,y)\to(a,b)} \left(\varepsilon_1(c) \cdot \frac{|(c_1-a,c_2-b)| \cdot (x-a)}{|(x-a,y-b)|^2} + \varepsilon_2(c) \cdot \frac{|(c_1-a,c_2-b)| \cdot (y-b)}{|(x-a,y-b)|^2} \right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

mivel az utolsó két tagban a törtek korlátosak és $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \varepsilon_1(x,y) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} \varepsilon_2(x,y) = 0$. □

15.46. Példa. Számítsuk ki az $f(x,y) := \cos(x^2+y)$ képlettel definiált függvény második Taylor-polinomját a $(0,0)$-ban, és alkalmazzuk rá a 15.45 Tételt!

Mivel

$$\partial_1 f(x,y) = -2x\sin(x^2+y), \quad \partial_2 f(x,y) = -\sin(x^2+y),$$

továbbá

$$\partial_{1,1} f(x,y) = -2\sin(x^2+y) - 4x^2\cos(x^2+y),$$
$$\partial_{1,2} f(x,y) = \partial_{2,1} f(x,y) = -2x\cos(x^2+y), \partial_{2,2} f(x,y) = -\cos(x^2+y),$$

ezért

$$\partial_1 f(0,0) = \partial_2 f(0,0) = \partial_{1,1} f(0,0) = \partial_{1,2} f(0,0) = \partial_{2,1} f(0,0) = 0, \partial_{2,2} f(0,0) = -1,$$
$$f(0,0) = 1.$$

Így

$$T^f_{2,(0,0)}(x,y) = f(0,0) + (\mathrm{d}^1 f(0,0))(x,y) + \frac{1}{2!}(\mathrm{d}^2 f(0,0))(x,y) = 1 - y^2.$$

A 15.45 Tétel szerint pedig

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(x^2+y) - 1 + y^2}{x^2+y^2} = 0.$$

15.5. Lokális szélsőérték

15.5.1. Lokális szélsőérték és parciális derivált

15.47. Definíció. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvénynek *lokális minimuma, ill. maximuma (lokális szélsőértéke) van az* $(a,b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ *pontban*, ha (a,b)-nek létezik olyan $U = B((a,b),r)$ környezete, hogy

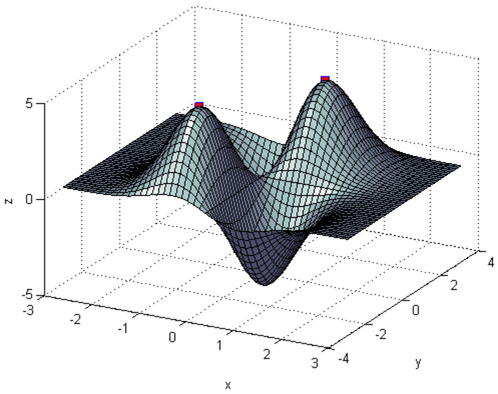
$$f(x,y) \ge f(a,b), \text{ ill. } f(x,y) \le f(a,b) \quad \forall (x,y) \in U.$$

Ekkor az $f(a,b) \in \mathbb{R}$ szám az f *lokális minimuma, ill. maximuma* (a,b)-ben.

Ha

$$f(x,y) > f(a,b), \text{ ill. } f(x,y) < f(a,b) \quad \forall (x,y) \in U \setminus \{(a,b)\}$$

teljesül, akkor f-nek *szigorú lokális minimuma, ill. maximuma (szigorú lokális szélsőértéke) van* (a,b)*-ben.*



15.9. ábra. Lokális maximum

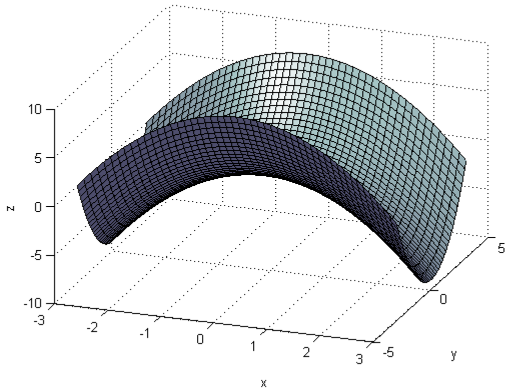
15.48. Tétel (Lokális szélsőérték szükséges feltétele)**.** *Ha az* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *függvénynek az* $(a,b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ *pontban lokális szélsőértéke van, és léteznek a parciális deriváltjai* (a,b)*-ben, akkor*

$$\partial_1 f(a,b) = \partial_2 f(a,b) = 0.$$

Bizonyítás. Könnyen látható, hogy ha az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvénynek az $(a,b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban lokális szélsőértéke van, akkor az $x \mapsto f(x,b)$, ill. $y \mapsto f(a,y)$ egyváltozós függvényeknek is lokális szélsőértéke van a-ban ill. b-ben. Az állítás a 15.1 és a 15.2 Definíciókból, valamint az egyváltozós differenciálszámítás keretében tanultakból adódik (ld. a 6.30 Tételt). □

15.49. Példa. Az $f(x,y) = \operatorname{sgn}(xy)$ függvényre $\partial_1 f(0,0) = \partial_2 f(0,0) = 0$ (hiszen az $x \mapsto f(x,0)$ és az $y \mapsto f(0,y)$ függvények azonosan 0-k), mégsincs lokális szélsőértéke $(0,0)$-ban.

15.50. Példa. Az $f(x,y) = y^2 - x^2$ (nyeregfelület) függvényre $\partial_1 f(0,0) = \partial_2 f(0,0) = 0$, mégsincs lokális szélsőértéke $(0,0)$-ban. Ugyanis, könnyen látható, hogy a függvény a $(0,0)$ pont (origó) tetszőleges környezetében felvesz pozitív és negatív értékeket is.



15.10. ábra. $f(x, y) = y^2 - x^2$

15.51. Tétel. *Legyen f az A korlátos és zárt halmazon értelmezett folytonos függvény, és tegyük fel, hogy f-nek léteznek a parciális deriváltjai* $\operatorname{int} A$ *pontjaiban. Ekkor f-nek van legkisebb és legnagyobb értéke, és ezeket vagy ∂A-n veszi fel, vagy* $\operatorname{int} A$ *egy olyan pontjában, ahol $\partial_1 f(a, b) = \partial_2 f(a, b) = 0$.*

Bizonyítás. Láttuk (ld. a 11.14 Általánosított Weierstrass-tétel), hogy f-nek van legkisebb és legnagyobb értéke A-n. A tétel így a 15.48 Tételből adódik. □

15.5.2. Kétszer differenciálható függvény lokális szélsőértéke, konvexitása

A továbbiakban célunk, hogy – az egyváltozós esethez hasonlóan – elégséges feltételt adjunk kétszer differenciálható függvények lokális szélsőértékének létezésére ill. konvexitására. Ehhez szükségünk lesz a kvadratikus alak fogalmára.

15.52. Definíció. Legyen $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ polinom. Azt mondjuk, hogy q *kvadratikus alak*, ha

$$q(x, y) = c_{11}x^2 + c_{21}xy + c_{12}yx + c_{22}y^2. \tag{15.24}$$

15.53. *Megjegyzés.* A q *kvadratikus alak* úgynevezett *másodfokú homogén függvény*, azaz

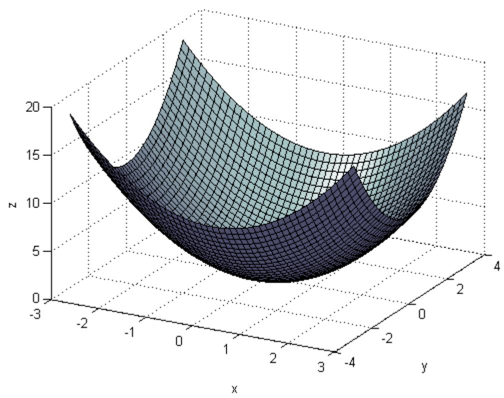
$$q(tx, ty) = t^2 q(x, y), \quad t \in \mathbb{R}.$$

15.54. Példa. Kvadratikus alakra: f kétszer differenciálható (a, b)-ben, $q = \mathrm{d}^2 f(a, b)$

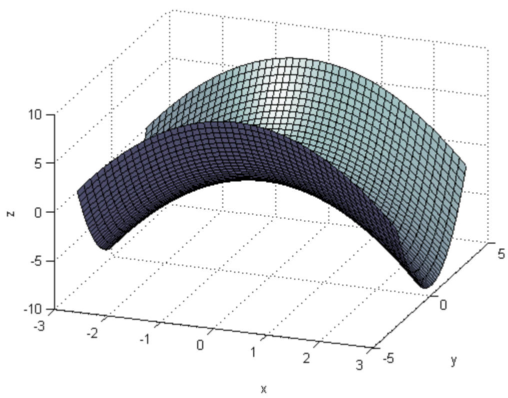
$$\left(\mathrm{d}^2 f(a, b)\right)(x, y) = \partial_{11} f(a, b) \cdot x^2 + \partial_{21} f(a, b) \cdot x \cdot y + \partial_{12} f(a, b) \cdot x \cdot y + \partial_{22} f(a, b) \cdot y^2. \tag{15.25}$$

15.55. Definíció. Egy $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kvadratikus alak *pozitív, ill. negatív definit*, ha minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ esetén $q(x, y) > 0$, ill. $q(x, y) < 0$. A kvadratikus alakot *pozitív, ill. negatív szemidefinit*nek hívjuk, ha az előbbiekben egyenlőség is meg van engedve. Egy $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kvadratikus alak *indefinit*, ha felvesz pozitív és negatív értékeket is.

15.56. Példa. Pozitív definit kvadratikus alak: $q(x, y) = x^2 + y^2$, negatív definit kvadratikus alak: $q(x, y) = -x^2 - y^2$, pozitív szemidefinit kvadratikus alak: $q(x, y) = x^2$, negatív szemidefinit kvadratikus alak: $q(x, y) = -x^2$, indefinit kvadratikus alak: $q(x, y) = y^2 - x^2$.



15.11. ábra. Pozitív definit kvadratikus alak, $q(x, y) = x^2 + y^2$



15.12. ábra. Indefinit kvadratikus alak, $q(x, y) = y^2 - x^2$

15.57. *Megjegyzés.* A fenti definícióban a feltételek teljesülését elég egy abszolút értékű (hosszú) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vektorokra megkövetelni (a homogenitás miatt).

Továbbá, lineáris algebrából ismeretes, hogy egy q kvadratikus alak definitsége a (15.24) egyenletben szereplő együtthatókból képezett szimmetrikus

$$C := \begin{pmatrix} c_{11} & \frac{c_{12}+c_{21}}{2} \\ \frac{c_{12}+c_{21}}{2} & c_{22} \end{pmatrix}$$

mátrix definitségével egyezik meg. Mivel C jelen esetben 2×2 mátrix, ezért a következők érvényesek. Ha $\det C > 0$ és $c_{11} > 0$, akkor C *pozitív definit*, ha $\det C > 0$ és $c_{11} < 0$, akkor C *negatív definit.* Ha $\det C = 0$, akkor C *(pozitív vagy negatív) szemidefinit*, ha $\det C < 0$, akkor C *indefinit.* (A $\det C > 0$, $c_{11} = 0$ eset nem fordulhat elő.)

Az alábbi tétel arról szól, hogy ha egy függvény kétszer differenciálható (a, b)-ben, akkor a $\mathrm{d}^2 f(a, b)$ kvadratikus alak definitsége hasonló szerepet játszik a lokális szélsőérték létezésében, mint egyváltozós függvények esetén az adott pontbeli második derivált előjele.

15.58. Tétel (Lokális szélsőérték létezése)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható az $(a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban, és tegyük fel, hogy $\partial_1 f(a, b) = \partial_2 f(a, b) = 0$.*

1. *Ha f-nek (a, b)-ben lokális minimuma, ill. maximuma van, akkor a (15.25) egyenlőségben definiált $\mathrm{d}^2 f(a, b)$ kvadratikus alak pozitív, ill. negatív szemidefinit.*

2. *Ha a (15.25) egyenlőségben definiált $\mathrm{d}^2 f(a, b)$ kvadratikus alak pozitív, ill. negatív definit, akkor f-nek (szigorú) lokális minimuma, ill. maximuma van (a, b)-ben.*

3. *Ha a $\mathrm{d}^2 f(a, b)$ kvadratikus alak indefinit, akkor f-nek nincs lokális szélsőértéke (a, b)-ben.*

Bizonyítás. A bizonyítás során az egyszerűség kedvéért (a, b) helyett a-t, (x, y) helyett pedig x-et írunk. Mindkét pont bizonyítása a (15.21) Taylor-formulán alapul, mely a (15.20) jelölés valamint a $\partial_1 f(a, b) = \partial_2 f(a, b) = 0$ feltétel felhasználásával az alábbi alakot ölti:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(a)(x - a)}{|x - a|^2} = 0. \tag{15.26}$$

Mindkét pontban a lokális minimum esetét bizonyítjuk, a lokális maximum esete hasonlóan megy.

1. Indirekt tegyük fel, hogy $\mathrm{d}^2 f(a)$ nem pozitív szemidefinit, tehát található olyan $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $|x_0| = 1$ vektor, melyre $\mathrm{d}^2 f(a)(x_0) < 0$. Legyen

$$\varepsilon := -\frac{\mathrm{d}^2 f(a)(x_0)}{2} > 0.$$

A (15.26) határérték alapján ε-hoz létezik $\delta_1 > 0$, hogy ha $0 < |x-a| < \delta_1$, akkor

$$\frac{\left|f(x) - f(a) - \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(a)(x-a)\right|}{|x-a|^2} < \varepsilon = -\frac{\mathrm{d}^2 f(a)(x_0)}{2}. \tag{15.27}$$

Másrészt, mivel f-nek a-ban lokális minimuma van, ezért létezik olyan $\delta_2 > 0$, hogy ha $|x-a| < \delta_2$, akkor $f(x) \geq f(a)$. Legyen $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ és $0 < t < \delta$ tetszőleges. Ekkor az $x := a + t \cdot x_0$ pontra $|x - a| = t < \delta$ teljesül. Erre felírva a (15.27) egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$\left|f(a + t \cdot x_0) - f(a) - \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(a)(t \cdot x_0)\right| < -\frac{\mathrm{d}^2 f(a)(x_0)}{2} \cdot t^2.$$

Ebből, felhasználva a 15.53 Megjegyzést,

$$f(a + t \cdot x_0) - f(a) < t^2 \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(a)(x_0) - \frac{\mathrm{d}^2 f(a)(x_0)}{2} \cdot t^2 = 0,$$

ami ellentmond $f(a + t \cdot x_0) \geq f(a)$-nak.

2. Tegyük fel, hogy a $\mathrm{d}^2 f(a)$ kvadratikus alak pozitív definit. Mivel $\mathrm{d}^2 f(a)$ egy (kétváltozós) polinom, így folytonos az egész síkon, ezért az (általánosított) Weierstrass-tétel szerint az

$$S := \left\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\right\}$$

kompakt halmazon van minimuma – ez legyen $m := \min_S \mathrm{d}^2 f(a) > 0$, a feltétel alapján. A (15.26) határérték alapján $\varepsilon := \frac{m}{2}$-höz létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $0 < |x-a| < \delta$, akkor

$$\frac{\left|f(x) - f(a) - \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(a)(x-a)\right|}{|x-a|^2} < \varepsilon = \frac{m}{2},$$

amiből

$$-f(x) + f(a) < \frac{m}{2} \cdot |x-a|^2 - \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(a)(x-a).$$

A 15.53 Megjegyzés felhasználásával, m definíciója szerint

$$\mathrm{d}^2 f(a)(x-a) = |x-a|^2 \cdot \mathrm{d}^2 f(a)\left(\frac{x-a}{|x-a|}\right) \geq m \cdot |x-a|^2.$$

Így

$$-f(x) + f(a) < \frac{m}{2} \cdot |x-a|^2 - \frac{1}{2}\mathrm{d}^2 f(a)(x-a) \leq \frac{m}{2} \cdot |x-a|^2 - \frac{1}{2} m \cdot |x-a|^2 = 0,$$

vagyis ha $0 < |x-a| < \delta$, akkor $f(a) < f(x)$, tehát f-nek szigorú lokális minimuma van a-ban.

3. Ez az 1. pontból rögtön adódik. $\square$

15.59. *Megjegyzés.* A 15.57 Megjegyzés alapján $\mathrm{d}^2 f(a,b)$ definitsége eldönthető a

$$\begin{pmatrix} \partial_{11} f(a,b) & \partial_{21} f(a,b) \\ \partial_{12} f(a,b) & \partial_{22} f(a,b) \end{pmatrix}$$

(a feltételek alapján szimmetrikus) mátrix definitségéből.

15.60. *Megjegyzés.* A fenti tétel egyik állítása sem megfordítható! (Ld. egyváltozós eset.)

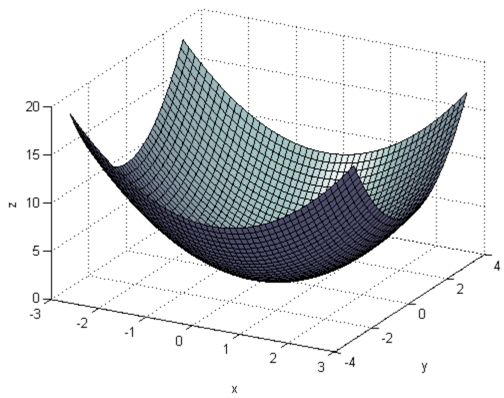
Térjünk most rá a konvexitásra!

15.61. Definíció. Azt mondjuk, hogy a $G \subset \mathbb{R}^2$ halmaz *konvex*, ha minden olyan szakaszt tartalmaz, melynek végpontjai G-ben vannak.

15.62. Definíció. Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény *konvex (konkáv)* a $G \subset \mathcal{D}(f)$ konvex halmazon, ha minden $x_1, x_2 \in G$ esetén az egyváltozós $t \mapsto f(1-t)x_1 + tx_2)$ függvény konvex (konkáv) $[0,1]$-en, vagyis minden $x_1, x_2 \in G$ esetén

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \le (\ge)(1-t)f(x_1) + tf(x_2), \quad \forall t \in [0,1].$$

Szemléletesen: f tetszőleges szakaszra megszorítva konvex (konkáv).



15.13. ábra. Kétváltozós konvex függvény, $f(x,y) = x^2 + y^2$

A következő tétel az egyváltozós 6.54 Tétel általánosítása.

15.63. Tétel. *Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható a $G \subset \mathcal{D}(f)$ konvex nyílt halmazon. Az f függvény akkor és csak akkor konvex (konkáv) G-n, ha minden $(a,b) \in G$ esetén a $\mathrm{d}^2 f(a,b)$ kvadratikus alak pozitív (negatív) szemidefinit.*

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk – a 15.58 Tétel bizonyításában használt technikák felhasználásával igazolható. $\square$

15.6. $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ eset

Az eddigiekben tárgyaltak megfelelően általánosíthatók $\mathbb{R}^2$ helyett $\mathbb{R}^p$-re ($p \geq 2$). Ezek közül az alábbiakban a Taylor-polinommal kapcsolatosak általánosításáról lesz szó.

15.64. Definíció. Egy $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ *pontbeli k-adrendű* $\partial_{i_1 \ldots i_k} f(a)$, $1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq p$ ($k \geq 2$) parciális deriváltjai úgy kaphatók, hogy a $k-1$-edrendű $\partial_{i_1 \ldots i_{k-1}} f$, $1 \leq i_1, \ldots, i_{k-1} \leq p$ parciális deriváltfüggvényeket deriváljuk valamelyik változó szerint a-ban.

Egy $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény a pontbeli kétszeres differenciálhatóságát ugyanúgy definiáljuk, mint $p = 2$ esetben (differenciálható a egy környezetében, és minden parciális deriváltja differenciálható a-ban.)

15.65. Definíció. Egy $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvényről azt mondjuk, hogy *k-szor differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$* ($k \geq 3$) pontban, ha $k-1$-szer differenciálható az a pont egy környezetében, továbbá minden $k-1$-edrendű parciális deriváltja differenciálható a-ban.

15.66. Tétel. *Ha az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény n-szer differenciálható a-ban, akkor tetszőleges $1 \leq i_1, \ldots, i_n \leq p$ indexek esetén*

$$\partial_{i_1 \ldots i_n} f(a) = \partial_{j_1 \ldots j_n} f(a),$$

ahol $j_1, \ldots, j_n$ az $i_1, \ldots, i_n$ indexek egy permutációja.

Bizonyítás. Tetszőleges permutációból eljuthatunk egy másikba egymás melletti indexek felcseréléseivel, így az állítás a 15.39 Young-tételből következik. □

15.67. Definíció. Legyen az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény n-szer differenciálható a-ban. Ekkor az f függvény *a pont körüli n-edik Taylor-polinomja*

$$T^f_{n,a}(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{p} \partial_i f(a) \cdot (x_i - a_i) + \frac{1}{2!} \sum_{i_1, i_2 = 1}^{p} \partial_{i_1 i_2} f(a) \cdot (x_{i_1} - a_{i_1})(x_{i_2} - a_{i_2})$$
$$+ \cdots + \frac{1}{n!} \sum_{i_1 \ldots i_n = 1}^{p} \partial_{i_1 \cdots i_n} f(a) \cdot (x_{i_1} - a_{i_1}) \cdot \cdot (x_{i_n} - a_{i_n}), \quad x \in \mathbb{R}^p$$

legfeljebb n-edfokú polinomfüggvény. Bevezetve a

$$(\mathrm{d}^k f(a))(x) := \sum_{i_1, \ldots i_k = 1}^{p} \partial_{i_1 \cdots i_k} f(a) \cdot x_{i_1} \cdots x_{i_k}$$

jelölést, a Taylor-polinom az alábbi alakba írható:

$$T^f_{n,a}(x) = f(a) + (\mathrm{d}^1 f(a))(x - a) + \frac{1}{2!}(\mathrm{d}^2 f(a))(x - a) + \cdots + \frac{1}{n!}(\mathrm{d}^n f(a))(x - a).$$

Itt $\mathrm{d}^k f(a)$ az úgynevezett *k-adik differenciál*. Ez egy k-adfokú homogén polinom, azaz

$$(\mathrm{d}^k f(a))(tx) = t^k (\mathrm{d}^k f(a))(x), \quad x \in \mathbb{R}^p.$$

15.68. Tétel (Taylor-fomula Lagrange-maradéktaggal)**.** *Legyen az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény $n+1$-szer differenciálható az $[a, x]$ szakasz pontjaiban, $a, x \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Ekkor van olyan $c \in [a, x]$ pont, melyre*

$$f(x) = T^f_{n,a}(x) + \frac{1}{(n+1)!} (\mathrm{d}^{n+1} f(c))(x - a).$$

Ennek segítségével igazolható az alábbi általános tétel, mely szerint f n-edik Taylor-polinomja n-edrendben közelíti f-et az a pont környezetében.

15.69. Tétel. *Legyen az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ függvény n-szer differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban. Ekkor*

1.
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T^f_{n,a}(x)}{|x - a|^n} = 0;$$

2. Ha p olyan legfeljebb n-edfokú polinomfüggvény, melyre (15.21) *teljesül, akkor $p = T^f_{n,a}$.*

Ez a tétel a 6.67 Következmény p változós megfelelője.

16. fejezet

Többváltozós differenciálszámítás II.

16.1. $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvények differenciálhatósága

Felidézzük a koordinátafüggvény 11. Fejezetben szereplő definícióját.

16.1. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, $i \in \{1, \dots, q\}$. Az f függvény *i-edik koordinátafüggvénye*

$$f_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}, \quad f_i(x) = [f(x)]_i, \quad x \in \mathcal{D}(f),$$

ahol $[f(x)]_i \in \mathbb{R}$ jelöli az $f(x) \in \mathbb{R}^q$ vektor i-edik koordinátáját. Így $f = (f_1, \dots, f_q)$.

16.2. Definíció (Ld. lineáris algebra)**.** Az $\ell : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ *lineáris leképezés*, ha $\ell(x+y) = \ell(x) + \ell(y)$ és $\ell(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot \ell(x)$ teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}^p$, $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén.

Ismeretes, hogy ha az $\mathbb{R}^p$ és $\mathbb{R}^q$ vektortereket a szokásos bázissal látjuk el, akkor minden ℓ lineáris leképezéshez *egyértelműen* hozzárendelhető egy $A = (a_{ij})_{q \times p}$ $q \times p$-es mátrix, melyre $\ell(x) = A \cdot x$ minden $x \in \mathbb{R}^p$-re, tehát A-t a továbbiakban azonosíthatjuk ℓ-el. Az A mátrix i-edik sorában éppen az $A_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, $A_i(x) = a_{i1}x_1 + \dots + a_{ip}x_p$ i-edik koordinátafüggvény (egy lineáris függvény) együtthatói állnak. Az A mátrix j-edik oszlopában pedig éppen az $A(e_j) \in \mathbb{R}^q$, $e_j = (0, \dots, 1, 0, \dots) \in \mathbb{R}^p$ j-edik bázisvektor képének koordinátái állnak.

16.3. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvény, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$. Azt mondjuk, hogy f *differenciálható az a pontban*, ha létezik olyan $A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ lineáris leképezés (azaz $q \times p$-es mátrix), melyre

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{|x-a|} = 0_{\mathbb{R}^q} \tag{16.1}$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - f(a) - A(x-a)|}{|x-a|} = 0 \tag{16.2}$$

$$\Updownarrow$$

$$f(x) = f(a) + A(x-a) + \varepsilon(x) \cdot |x-a|, \quad \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0_{\mathbb{R}^q} \tag{16.3}$$

Ekkor az A lineáris leképezést (vagy a vele azonosított mátrixot) nevezzük az f függvény a pontbeli *derivált*jának.

16.4. Tétel. *Az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvény akkor és csak akkor differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban, ha f minden f_i $(i \in \{1, \ldots, q\})$ koordinátafüggvénye differenciálható a-ban. Ekkor a (16.1) kifejezésben szereplő $A \in \mathbb{R}^{q \times p}$ mátrix (i, j)-edik eleme $\partial_j f_i(a)$, $i = 1, \ldots, q$, $j = 1, \ldots, p$, vagyis*

$$A = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \partial_2 f_1(a) & \ldots & \partial_p f_1(a) \\ \partial_1 f_2(a) & \partial_2 f_2(a) & \ldots & \partial_p f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_q(a) & \partial_2 f_q(a) & \ldots & \partial_p f_q(a) \end{pmatrix}. \tag{16.4}$$

Bizonyítás. Világos, hogy a (16.1) határértékben

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - A(x-a)}{|x-a|} = 0_{\mathbb{R}^q} \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f_i(x) - f_i(a) - A_i(x-a)}{|x-a|} = 0 \in \mathbb{R} \; \forall i = 1, \ldots, q.$$

Mivel A linearitása esetén A_i lineáris, ill. megfordítva, ha A_i lineáris minden i-re, akkor a belőlük mint koordinátafüggvényekből képezett A függvény is lineáris, a tétel első részét a 15.27 Definíció alapján beláttuk.

Szintén a fenti ekvivalencia alapján kapjuk, hogy a mátrix alakja szükségképpen (16.4), hiszen a 15.29 Tétel szerint az egyes A_i koordinátafüggvényeket meghatározó együtthatók éppen $(\partial_1 f_i(a), \ldots, \partial_p f_i(a))$. $\square$

16.5. Következmény. *Ha az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvény differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban, akkor a (16.1) kifejezésben szereplő A mátrix egyértelmű,* (16.4) *alakú, és neve: az f függvény a pontbeli* Jacobi-mátrixa. *Jelölés: $A = f'(a)$.*

16.6. Tétel.

1. *Ha f differenciálható a-ban, akkor f folytonos a-ban.*
2. *Ha minden $i = 1, \ldots, q$, $j = 1, \ldots, p$, esetén a $\partial_j f_i$ parciális deriváltfüggvények léteznek a egy környezetében és folytonosak a-ban, akkor f differenciálható a-ban.*

Bizonyítás. 1. A 16.4 Tétel szerint minden f_i koordinátafüggvény differenciálható a-ban, így a 15.28 Tétel alapján folytonos is a-ban. A 11.10 Állítás szerint ekkor f folytonos a-ban.

2. A 15.31 Tételből következik, hogy minden f_i koordinátafüggvény differenciálható a-ban, így a 16.4 Tétel alapján nyerjük az állítást. $\square$

16.2. Differenciálási szabályok

A következő állítás annak az általánosítása, hogy egyváltozós esetben a lineáris ($a \cdot \mathrm{id}$) függvények deriváltja konstans.

16.7. Állítás. *Ha $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ egy lineáris leképezés, a hozzá tartozó mátrix A, akkor f minden $x \in \mathbb{R}^p$ pontban differenciálható, és $f'(x) = A$, $x \in \mathbb{R}^p$.*

Bizonyítás. Egyszerűen következik abból, hogy

$$\lim_{x\to a} \frac{|f(x) - f(a) - A(x-a)|}{|x-a|} = \lim_{x\to a} \frac{|A(x) - A(a) - A(x-a)|}{|x-a|} = \lim_{x\to a} \frac{0}{|x-a|} = 0.$$

□

16.8. Tétel. *Ha az $f, g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvények differenciálhatók az $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f) \cap \operatorname{int}\mathcal{D}(g)$ pontban, akkor $f + g$ és $\lambda \cdot f$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) is differenciálható a-ban, és*

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a), \quad (\lambda \cdot f)'(a) = \lambda \cdot f'(a).$$

Bizonyítás. Könnyen ellenőrizhető a differenciálhatóság definíciójából. □

16.9. Tétel (Kompozíciófüggvény differenciálhatósága)**.** *Legyen $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ differenciálható az $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}(g)$ pontban, $f : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^s$ differenciálható a $g(a) \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ pontban. Ekkor $f \circ g$ differenciálható az $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f \circ g)$ pontban, és*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

A jobb oldalon egy $s \times q$-as és egy $q \times p$-es mátrix szorzata áll, ami egy $s \times q$-as mátrix, és a bal oldalon is egy ilyen típusú mátrix van. A szorzat a megfelelő lineáris leképezések kompozíciójával azonosítható.

16.10. Lemma. *Minden $A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ lineáris leképezéshez található olyan $K \in \mathbb{R}^+$ szám, melyre*

$$|A(x) - A(y)| = |A(x-y)| \le K \cdot |x-y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^p.$$

Bizonyítás. Pl. $K = \sqrt{\sum_{ij} a_{ij}^2}$ megfelelő, egyszerű számolással ellenőrizhető. □

Bizonyítás. (Tételé) A bizonyítás az egyváltozós eset mintájára történik, ld. a 6.20 Tételt. Jelölje $A := g'(a)$, $B := f'(g(a))$. Ekkor a differenciálhatóság (16.3) definíciója alapján léteznek olyan ε és η függvények, hogy

$$g(x) = g(a) + A(x-a) + \varepsilon(x) \cdot |x-a|, \tag{16.5}$$
$$f(y) = f(g(a)) + B(y - g(a)) + \eta(y) \cdot |y - g(a)|, \tag{16.6}$$

és $\lim_{x\to a}\varepsilon(x) = 0$, $\lim_{y\to g(a)}\eta(y) = \eta(g(a)) = 0$ (η folytonossága is feltehető). Mivel g differenciálható, ezért folytonos is a-ban, így létezik olyan $\delta > 0$, hogy ha $|x-a| < \delta$, akkor $g(x) \in \mathcal{D}(f)$ (itt kihasználtuk, hogy $g(a) \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$), tehát $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f\circ g)$ teljesül. Ilyen x-ekre tehát $y = g(x)$ helyettesíthető a (16.6) egyenlőségben, így felhasználva a (16.5) egyenlőséget, kapjuk

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(g(a)) + B\left(A(x-a) + \varepsilon(x)\cdot|x-a|\right) + \eta(g(x))\cdot|g(x)-g(a)| \\ &= f(g(a)) + (B\circ A)(x-a) + B(\varepsilon(x))\cdot|x-a| + \eta(g(x))\cdot|A(x-a)+\varepsilon(x)\cdot|x-a||, \end{aligned}$$

ahol kihasználtuk a B linearitását. Ahhoz, hogy $(f\circ g)'(a)$ létezik és $B\circ A$-val egyenlő, elég belátni, hogy

$$r(x) := B(\varepsilon(x))\cdot|x-a| + \eta(g(x))\cdot|A(x-a)+\varepsilon(x)\cdot|x-a||$$

jelöléssel létezik olyan θ függvény, melyre

$$|r(x)| \le \theta(x)\cdot|x-a| \text{ és } \lim_{x\to a}\theta(x) = 0.$$

A 16.10 Lemma alapján létezik olyan $K > 0$, melyre $|A(x-a)| \le K\cdot|x-a|$, így

$$|r(x)| \le (|B(\varepsilon(x))| + |\eta(g(x))|\cdot(K + |\varepsilon(x)|))\cdot|x-a| := \theta(x)\cdot|x-a|.$$

Ha $x\to a$, akkor $\varepsilon(x)\to 0$, és mivel B lineáris, így folytonos is, ezért $B(\varepsilon(x))\to B(0) = 0$. Felhasználva g folytonosságát a-ban és a $\lim_{y\to g(a)}\eta(y) = \eta(g(a)) = 0$ összefüggést kapjuk, hogy $\lim_{x\to a}\eta(g(x)) = 0$. Ebből $\lim_{x\to a}\theta(x) = 0$ következik, és ezt akartuk belátni. $\square$

16.11. Következmény. *Legyen $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ differenciálható az $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}(g)$ pontban, $f : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ ($s = 1$ eset) differenciálható a $g(a) \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$ pontban. Ekkor $F = f\circ g$ (ahol $F(x) = f(g_1(x),\dots,g_q(x))$, $x \in \mathcal{D}(f\circ g)$) differenciálható a-ban, és minden $j = 1,\dots,p$ esetén*

$$\partial_j F(a) = \sum_{i=1}^{q}(\partial_i f)(g(a))\cdot\partial_j g_i(a).$$

Ez a képlet könnyebben megjegyezhető, ha f változóit $y_1,\dots,y_q$-val jelöljük, és $g_1,\dots,g_q$ helyett is $y_1,\dots,y_q$-t írunk. Ezzel a jelöléssel a fenti képlet a következő alakot ölti:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial y_2}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_q}\cdot\frac{\partial y_q}{\partial x_j},$$

amelyet szokás láncszabály*nak is nevezni.*

16.12. Következmény. *Ha $f, g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ ($q = 1$) függvények differenciálhatók az $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)\cap\operatorname{int}\mathcal{D}(g)$ pontban, akkor $f\cdot g$ és $g(a) \ne 0$ esetén $\frac{f}{g}$ is differenciálható a-ban.*

Bizonyítás. Legyen $T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^2$, $T(x) := (f(x), g(x))$, valamint $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\varphi(x, y) := x \cdot y$. Világos, hogy $f \cdot g = \varphi \circ T$. Mivel T koordinátafüggvényei f és g differenciálhatók a-ban, így a 16.4 Tétel szerint T is az. Ezenkívül φ differenciálhatósága következik abból, hogy polinom. Ezért a 16.9 Tétel alapján $f \cdot g$ is differenciálható.

Az $\frac{f}{g}$ esetében $\varphi(x, y) := \frac{x}{y}$-t kell választani, amely racionális törtfüggvény lévén az $y \neq 0$ halmazon differenciálható. Az állítás az előbbihez hasonlóan adódik. $\square$

16.3. Integráltranszformáció

Térjünk most vissza a többváltozós integrálszámításhoz! A Jacobi-mátrix segítségével általánosíthatjuk az egyváltozós helyettesítéses integrálásról tanultakat. Ehhez szükségünk lesz az alábbi tételre a Jordan-mérték és a lineáris leképezések kapcsolatáról.

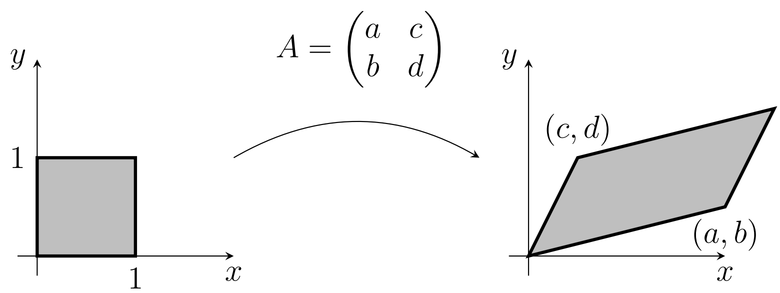
16.13. Tétel. *Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ mérhető, $A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ lineáris leképezés. Ekkor $A(H)$ (vagyis a H halmaz A leképezéssel vett képe) is mérhető, és*

$$m(A(H)) = m(H) \cdot |\det A|.$$

A bizonyításhoz gondoljuk meg először a következő állítást.

16.14. Lemma. *Ha $H = [0, 1] \times [0, 1]$ egységnégyzet, $A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ lineáris leképezés, akkor*

$$m(A(H)) = |\det A|.$$



$$m(A([0, 1] \times [0, 1])) = |ad - bc| = |\det A|$$

16.1. ábra. Egységnégyzet lineáris transzformációjának területe

Bizonyítás. Ha a paralelogramma (hegyes)szögét α jelöli, akkor területe

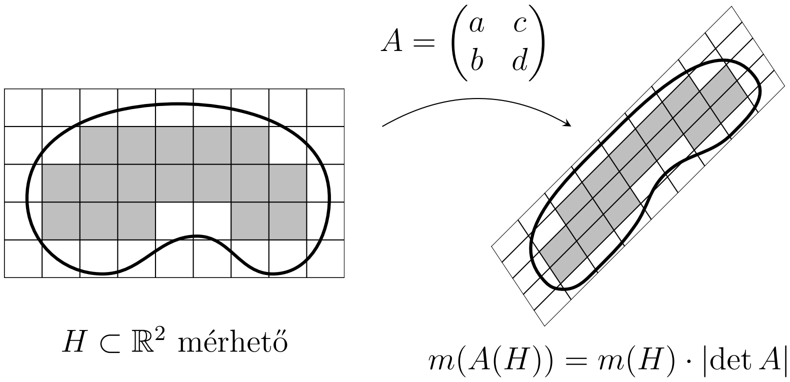
$$\begin{aligned} |(a, b)| \cdot |(c, d)| \cdot \sin\alpha &= |(a, b)| \cdot |(c, d)| \cdot \sqrt{1 - \cos^2\alpha} \\ &= \sqrt{|(a, b)|^2 \cdot |(c, d)|^2 - |\langle (a, b), (c, d)\rangle|^2} = |ad - bc| = |\det A|. \end{aligned}$$

$\square$

16.15. Következmény. *Ha $H \subset \mathbb{R}^p$ tetszőleges, koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalú négyzet, $A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ lineáris leképezés, akkor*

$$m(A(H)) = m(H) \cdot |\det A|.$$

Bizonyítás. Következik a fenti lemmából, valamint abból, hogy a Jordan-mérték additív és eltolásinvariáns, ld. a 12. Fejezetet. □



16.2. ábra. Lineáris leképezés és terület

Bizonyítás. (Tételé) Tekintsük a 16.2. ábrát! Készítsük el a 12. Fejezetben látott módon adott n-re a $H \subset \mathbb{R}^2$ halmazhoz tartozó $\underline{H}_n$ és $\overline{H}_n$ halmazokat. A 16.15 Következmény alapján az ezen halmazokat alkotó négyzetek A-val vett képei paralelogrammák, melyek területe $\frac{1}{4^n}|\det A|$. A Jordan-mérték tulajdonságai és a 16.15 Következmény alapján ezért

$$m(A(\underline{H}_n)) = m(\underline{H}_n) \cdot |\det A| \text{ és } m(A(\overline{H}_n)) = m(\overline{H}_n) \cdot |\det A|.$$

Továbbá,

$$m(\underline{H}_n) \cdot |\det A| = m(A(\underline{H}_n)) = \underline{m}(A(\underline{H}_n)) \leq \underline{m}(A(H)) \tag{16.7a}$$

$$\leq \overline{m}(A(H)) \leq \overline{m}(A(\overline{H}_n)) = m(A(\overline{H}_n)) = m(\overline{H}_n) \cdot |\det A|. \tag{16.7b}$$

Mivel H mérhető, ezért $n \to \infty$ esetén $m(\underline{H}_n) \to m(H)$ és $m(\overline{H}_n) \to m(H)$. Tehát $n \to \infty$ esetén a (16.7) egyenlőtlenségsorozat két vége ugyanoda tart, így

$$\underline{m}(A(H)) = \overline{m}(A(H)),$$

vagyis $A(H)$ mérhető. Továbbá, szintén a (16.7) alapján

$$m(A(H)) = m(H) \cdot |\det A|,$$

és ezt akartuk belátni. □

Most rátérünk az többváltozós helyettesítéses integrálásra, vagyis az integráltranszformációra.

16.16. Definíció. Az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ függvény *folytonosan differenciálható* az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban, ha f differenciálható az a pont egy környezetében, és koordinátafüggvényeinek parciális deriváltjai folytonosak a-ban.

16.17. Tétel (Integráltranszformáció)**.** *Legyen $H \subset \mathbb{R}^p$ mérhető halmaz, $g : H \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható és injektív* $\operatorname{int} H$*-ban. Ekkor $g(H)$ is mérhető, és ha $f : g(H) \to \mathbb{R}$ korlátos, akkor*

$$\int_{g(H)} f = \int_H (f \circ g) \cdot |\det g'|$$

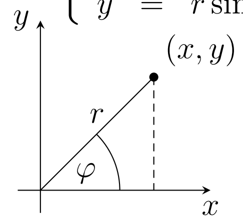
(az egyik oldal pontosan akkor létezik, ha a másik, és ekkor egyenlők).

Bizonyítás. A bizonyítás lényege, hogy a folytonosan differenciálható g függvény az $a \in \operatorname{int} H$ pont egy környezetében „jól” közelíthető a $g'(a)$ lineáris leképezéssel. A $g(H)$ halmazon vett integrált pedig közelíthetjük a $g(H)$ halmaznak egy olyan felosztásához tartozó közelítőösszeggel, ahol a felosztáshoz tartozó K_i halmazok mértékei a 16.13 Tétel alapján

$$m(K_i) \approx m(g^{-1}(K_i)) \cdot |\det g'(\xi_i)|,$$

ahol $g^{-1}(K_i)$ a K_i halmaz g leképezéssel vett inverzképe, $\xi_i \in g^{-1}(K_i)$. Mindezek precízzé tehetők, a részleteket itt nem közöljük. □

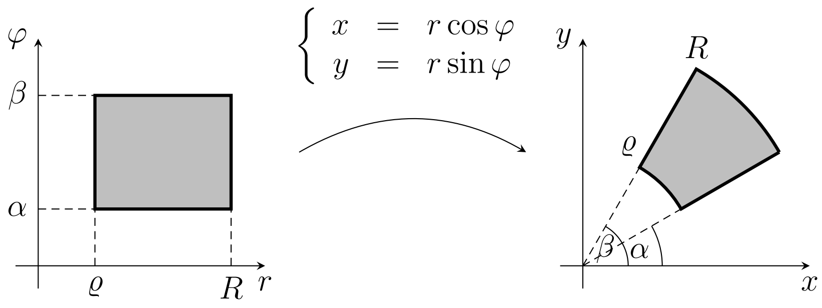
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$



16.3. ábra. Polárkoordináták

16.18. Példa. Legyen $g(r, \varphi) := (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, $(r, \varphi) \in H$ az ún. *polártranszformáció.* Ekkor

$$\det g' = \left| \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} \right|$$
$$= r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r.$$

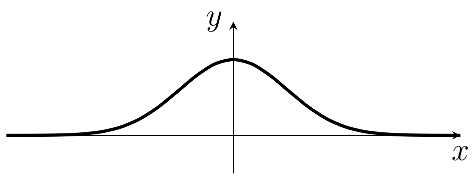


16.4. ábra. Polártranszformáció

16.19. Példa. Számítsuk ki a

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,dx$$

integrál értékét (ld. a 7.86 Feladatot)!



16.5. ábra. Az $f(x) = e^{-x^2}$ függvény grafikonja („haranggörbe")

Legyen $R > 0$. A 13.17 Fubini-tétel alapján

$$\begin{aligned}\left(\int_0^R \mathrm{e}^{-x^2}\,dx\right)^2 &= \left(\int_0^R \mathrm{e}^{-x^2}\,dx\right)\cdot\left(\int_0^R \mathrm{e}^{-y^2}\,dy\right)\\ &= \int_0^R\int_0^R \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{-y^2}\,dx\,dy = \int_{[0,R]\times[0,R]} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.\end{aligned}$$

Jelölje K_R az első síknegyedbe eső R sugarú körlapot, vagyis

$$K_R := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le R,\ x,y\ge 0\}.$$

Ezzel

$$\int_{K_R} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \le \int_{[0,R]\times[0,R]} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \le \int_{K_{2R}} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Polártranszformációt alkalmazva,

$$\int_{K_R} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^R\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-r^2} r\,dr = \frac{\pi}{4}(1-\mathrm{e}^{-R^2}).$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$\int_{K_{2R}} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \frac{\pi}{4}(1-\mathrm{e}^{-4R^2}).$$

Összegezve,

$$\frac{\pi}{4}(1-\mathrm{e}^{-R^2}) \le \left(\int_0^R \mathrm{e}^{-x^2}\,dx\right)^2 \le \frac{\pi}{4}(1-\mathrm{e}^{-4R^2}).$$

Elvégezve az $R \to \infty$ határátmenetet, az egyenlőtlenségsorozat két vége $\frac{\pi}{4}$-hez tart, a középső kifejezés pedig a keresett integrál négyzetéhez. Ez alapján

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

17. fejezet

Inverz- és implicitfüggvények

17.1. Inverzfüggvény-tételkör

Az egyváltozós differenciálszámításból ismert (ld. a 6.22 Tételt), hogy ha egy invertálható, folytonos f függvény esetén $\exists f'(a) \neq 0$, akkor $\exists (f^{-1})'(f(a)) = 1/f'(a)$. Nézzük most ennek az állításnak a többváltozós megfelelőjét!

17.1. Tétel (Inverzfüggvény differenciálhatósága)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban, és legyen az $f'(a)$ $(p \times p)$ mátrix invertálható. Tegyük fel, hogy létezik olyan $g : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ folytonos függvény, mely $f(a)$ egy környezetében van értelmezve, és ott $f(g(x)) = x$, $g(f(a)) = a$. Ekkor g differenciálható $f(a)$-ban, és*

$$g'(f(a)) = [f'(a)]^{-1}.$$

Bizonyítás. A bizonyítás során tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy $a = f(a) = 0$ (a továbbiakban az egyszerűség kedvéért $0_{\mathbb{R}^p}$ helyett 0-t írunk). Ugyanis, ha ez nem így volna, akkor f helyett a $\tilde{f}(x) := f(x + a) - f(a)$ függvényt tekintve, a bizonyítás $\tilde{f}$-re érvényes, és ebből egyszerűen meggondolható f-re is.

Ezután két lépésben járunk el.

I. Tegyük fel, hogy $f'(0) = I$ az $\mathbb{R}^p$ identitás-leképezése. Azt kell belátnunk, hogy ha a 0 egy környezetében $f(g(x)) = x$, g folytonos, akkor $\exists g'(0) = I$. Az f 0 pontbeli differenciálhatósága és $f(0) = 0$ alapján

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0) - I(x - 0)}{|x - 0|} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - x}{|x|} = 0.$$

Mivel $\lim_{x \to 0} g(x) = g(0) = 0$ és $g \neq 0$ a 0 egy kipontozott környezetében ($f(g(x)) = x$ miatt), ezért a fenti határértékben a kompozíciófüggvény határértékéről szóló tétel szerint írhatunk x helyett $g(x)$-et, vagyis

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(g(x)) - g(x)}{|g(x)|} = \lim_{x \to 0} \frac{x - g(x)}{|g(x)|} = 0. \tag{17.1}$$

Ahhoz, hogy a $\exists g'(0) = I$ állítást belássuk, az kell, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0) - I(x-0)}{|x-0|} = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - x}{|x|} = 0. \tag{17.2}$$

Egyszerű átalakítással kapjuk, hogy a 0 egy kipontozott környezetében

$$\frac{g(x) - x}{|x|} = \frac{g(x) - x}{|g(x)|} \cdot \frac{|g(x)|}{|x|}.$$

Felhasználva a (17.1) határértéket, elég belátni, hogy a 0 egy elég kicsi kipontozott környezetében $\frac{|g(x)|}{|x|}$ korlátos. A (17.1) határérték alapján, $\varepsilon = 1/2$-hez létezik olyan $\delta > 0$, hogy $0 < |x| < \delta$ esetén

$$\frac{|g(x) - x|}{|g(x)|} < \frac{1}{2},$$

amiből

$$|g(x)| \leq |g(x) - x| + |x| < \frac{1}{2}|g(x)| + |x| \Rightarrow \frac{|g(x)|}{|x|} < \frac{1}{2}\frac{|g(x)|}{|x|} + 1,$$

így $0 < |x| < \delta$ esetén $\frac{|g(x)|}{|x|} < 2$. Ezzel a kívánt (17.2) határértéket beláttuk, így $\exists g'(0) = I$.

II. Ha $f'(0) = A$ egy tetszőleges invertálható mátrix, akkor definiálja $\tilde{f} := A^{-1} \circ f$. A 16.9 Tétel és a 16.7 Állítás alapján

$$\tilde{f}'(0) = (A^{-1})'(f(0)) \cdot f'(0) = A^{-1} \cdot A = I.$$

Ezért $\tilde{f}$-ra alkalmazható az *I*. rész bizonyítása a $\tilde{g} := g \circ A$ függvénnyel, hiszen

$$\tilde{f}(\tilde{g}(x)) = A^{-1}(f(g(Ax))) = A^{-1}(Ax) = x.$$

Így kapjuk, szintén a 16.9 Tétel és a 16.7 Állítás alapján,

$$I = \tilde{g}'(0) = (g \circ A)'(0) = g'(A(0)) \cdot A'(0) = g'(0) \cdot A.$$

Ebből $g'(0) = A^{-1}$ következik. □

Az alábbi tétel annak az egyváltozós differenciálszámításból ismert állításnak a megfelelője, hogy ha $f'(a) \neq 0$, akkor f-nek a-ban nem lehet lokális szélsőértéke (ld. a 6.30 Tételt).

17.2. Tétel (Lokális injektivitás)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ $(p \leq q)$ folytonosan differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban, és tegyük fel, hogy az $f'(a) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ lineáris leképezés injektív (vagyis, az $f'(a)$ $q \times p$ mátrix rangja p). Ekkor f is injektív az a pont egy környezetében.*

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk. □

17.3. Tétel (Lokális szürjektivitás)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ $(p \geq q)$ folytonosan differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban, és tegyük fel, hogy az $f'(a) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ lineáris leképezés szürjektív (vagyis, az $f'(a)$ $q \times p$ mátrix rangja q). Ekkor az $\mathcal{R}(f)$ értékkészlet tartalmazza az $f(a)$ pont egy környezetét.*

Bizonyítás. A bizonyításnak csak egy alapötletét ismertetjük. Legyen b „elég közel" $f(a)$-hoz, és definiálja $h(x) := b - f(x) + x$. Belátható, hogy h kontrakció a $\overline{B}(a, \delta)$ zárt gömbön (megfelelő δ-ra). A Banach-féle fixponttétel alapján így h-nak létezik egyetlen $x^* \in \overline{B}(a, \delta)$ fixpontja, melyre

$$h(x^*) = b - f(x^*) + x^* = x^*,$$

amiből $f(x^*) = b$, tehát $b \in \mathcal{R}(f)$. □

17.4. Következmény (Nyílt leképezés tétele)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ $(p \geq q)$ folytonosan differenciálható a $\mathcal{D}(f)$ halmazon, és tegyük fel, hogy minden $x \in \mathcal{D}(f)$ esetén az $f'(x) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ lineáris leképezés szürjektív (vagyis, az $f'(x)$ $q \times p$ mátrix rangja q). Ekkor az $\mathcal{R}(f)$ értékkészlet nyílt halmaz.*

Láttuk, hogy ha egy egyváltozós függvény deriváltja egy intervallumon pozitív/negatív, akkor ott a függvény szigorúan monoton (ld. a 6.41 Tételt). Ebből az is következik, hogy ezen az intervallumon a függvénynek létezik inverzfüggvénye – úgy is mondhatjuk, hogy lokálisan invertálható. Ez az eset áll fenn például akkor, ha a függvény folytonosan differenciálható, és valamely pontban a deriváltja nem 0, hiszen akkor a pont egy környezetében is állandó előjelű a derivált. Most (bizonyítás nélkül) kimondjuk ezen állítás többváltozós megfelelőjét.

17.5. Tétel (Inverzfüggvény-tétel)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ pontban, és tegyük fel, hogy az $f'(a) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ lineáris leképezés injektív (vagyis,* $\det f'(a) \neq 0$*). Ekkor létezik olyan $\delta > 0$ és $\eta > 0$, hogy*

1. *$\forall\, x \in B(f(a), \delta)$ esetén $\exists!\ \varphi(x) \in B(a, \eta) : f(\varphi(x)) = x$;*
2. *a $\varphi : B(f(a), \delta) \to B(a, \eta)$ függvény differenciálható $B(f(a), \delta)$-n;*
3. *$f'(x)$ injektív (vagyis,* $\det f'(x) \neq 0$*) minden $x \in B(a, \eta)$ esetén és*

$$\varphi'(f(x)) = [f'(x)]^{-1}, \quad x \in B(a, \eta).$$

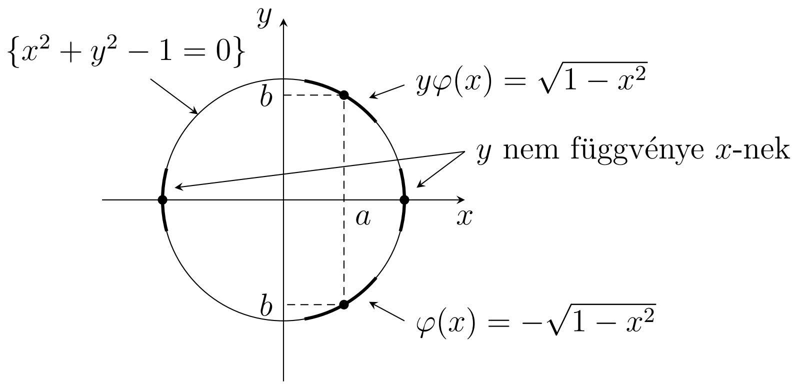
Bizonyítás. Nem bizonyítjuk. A tétel 3. pontjában szereplő képlet a 17.1 Tételben szereplő képlettel azonos. □

17.2. Implicitfüggvény-tételek, Lagrange-multiplikátorok

[1] *Probléma*

A gyakorlatban sokszor előfordul (pl. differenciálegyenletek megoldásánál), hogy egy $f(x, y) = 0$ alakú összefüggésből szeretnénk kifejezni y-t mint az x függvényét. Felmerül a kérdés, hogy ez mikor tehető meg? Vagyis: mikor van olyan φ függvény, hogy $f(x, \varphi(x)) = 0\ \forall x \in \mathcal{D}(\varphi)$? Milyen feltételekkel lesz φ differenciálható, és kiszámítható-e a deriváltja?

Ezekre a kérdésekre ad választ az ún. egyváltozós implicitfüggvény-tétel. Mielőtt a tételt kimondanánk, nézzünk meg néhány egyszerű példát!



17.1. ábra. Egyváltozós implicitfüggvény-tétel példa

17.6. Példa. Legyen

$$f(x, y) := x^2 + y^2 - 1.$$

Világos, hogy az $f(x, y) = 0$ egyenletet kielégítő pontok az (origó középpontú) egységkörvonal pontjai. Ha ebből az egyenletből középiskolás módszerekkel megpróbáljuk x segítségével kifejezni y-t, akkor azt látjuk, hogy a megoldás nem egyértelmű, hiszen a

$$\varphi(x) = \sqrt{1 - x^2} \text{ és } \varphi(x) = -\sqrt{1 - x^2}$$

is megoldás.

Vegyünk most egy (a, b) (egységkörvonalon lévő) pontot, melyre $f(a, b) = 0$, és keressünk olyan φ megoldást, melyre $\varphi(a) = b$! Ha $a \in (-1, 1)$, $b > 0$ (vagyis (a, b) a felső félsíkban fekvő köríven van), akkor világos, hogy a

$$\varphi(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

függvényre $f(x, \varphi(x)) = 0$ és $\varphi(a) = b$. Ha $a \in (-1, 1)$, $b < 0$ (vagyis (a, b) a alsó félsíkban fekvő köríven van), akkor

$$\varphi(x) = -\sqrt{1 - x^2}$$

[1] Az ebben a fejezetben található bizonyítások során az [MFS] jegyzet 11.3 alfejezetét követem.

a megfelelő függvény, melyre $f(x,\varphi(x)) = 0$ és $\varphi(a) = b$.
Mi a helyzet, ha $a = \pm 1$ és $b = 0$? Világos, hogy nem tudunk olyan $K(a)$ és $K(b)$ környezeteket megadni, melyekre $x \in K(a)$ és $y \in K(b)$ esetén az $f(x,y) = 0$ egyenletet kielégítő pontok egy függvény grafikonját alkotnák. Tehát nem létezik a kívánt φ függvény. Vajon mi lehet ennek az oka? Meggondolható, hogy ha $a = \pm 1$ és $b = 0$, akkor $\partial_2 f(a,b) = 2b = 0$, míg az előbbi esetekben, ahol y-t ki tudtuk fejezni x függvényeként, az (a,b) pont egy környezetében $\partial_2 f(a,b) \neq 0$ volt.

17.7. Példa. Tekintsük az alábbi egyenletet!

$$y - \frac{1}{2}\sin y = x.$$

Ha $y = \varphi(x)$ jelöli a megoldófüggvényt, akkor mennyi $\varphi'(1 - \frac{1}{2}\sin 1)$?
Az egyenletből világos, hogy ha $x = 1 - \frac{1}{2}\sin 1$, akkor $\varphi(x) = 1$ kell legyen. Mivel $y = \varphi(x)$, így

$$\begin{aligned}
\varphi(x) - \frac{1}{2}\sin\varphi(x) &= x \quad /' \\
\varphi'(x) - \frac{1}{2}\cos\varphi(x)\cdot\varphi'(x) &= 1 \\
\varphi'(x) &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\cos\varphi(x)} \\
\varphi'(1 - \frac{1}{2}\sin 1) &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}\cos 1}.
\end{aligned}$$

17.8. *Megjegyzés.* A 16.9 Tétel alapján, ha a $f(x,\varphi(x)) = 0$ összefüggést (formálisan) lederiváljuk, akkor a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
\partial_1 f(x,\varphi(x)) + \partial_2 f(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x) &= 0 \\
\varphi'(x) &= -\frac{\partial_1 f(x,\varphi(x))}{\partial_2 f(x,\varphi(x))}
\end{aligned}$$

Az eddigiek precízzé tehetők, erről szól az alábbi tétel.

17.9. Tétel (Egyváltozós implicitfüggvény-tétel)**.** *Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy $f(a,b) = 0$, $(a,b) \in \operatorname{int}\mathcal{D}(f)$. Tegyük fel, hogy f folytonos az (a,b) pont egy környezetében és $\exists \partial_2 f \neq 0$ ebben a környezetben. Ekkor létezik a-nak, ill. b-nek olyan $K(a) \subset \mathbb{R}$ ill. $K(b) \subset \mathbb{R}$ környezete, hogy*

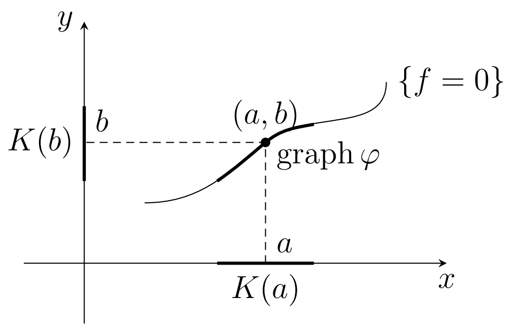
1. *Minden $x \in K(a)$ esetén $\exists!\varphi(x) \in K(b)$, melyre*

$$f(x,\varphi(x)) = 0.$$

2. A $\varphi : K(a) \to K(b)$ ún. implicitfüggvény *folytonos $K(a)$-n, $\varphi(a) = b$.*

3. Ha f folytonosan differenciálható (a, b)-ben, akkor φ differenciálható is az a pontban, és

$$\varphi'(a) = -\frac{\partial_1 f(a, b)}{\partial_2 f(a, b)}.$$



17.2. ábra. Egyváltozós implicitfüggvény-tétel

Megjegyezzük, hogy a tétel csak a φ implicit függvény létezéséről szól, általában nem tudjuk ezt a függvényt előállítani. Ennek ellenére a φ deriváltját ki tudjuk számítani az a pontban!

Bizonyítás. A tételnek csak az 1. részét bizonyítjuk. A 2. és 3. pont bizonyítása a megfelelő technikai részletek kidolgozása után következik az alábbiakból.

A tétel feltélei szerint az $(a, b) \in \mathcal{D}(f)$ pontnak létezik olyan $r > 0$ sugarú $K_r(a, b) \subset \mathcal{D}(f)$ környezete, hogy, például,

$$\forall (x, y) \in K_r(a, b) \text{ esetén } \partial_2 f(x, y) > 0 \tag{17.3}$$

(a $\partial_2 f(x, y) < 0$ eset hasonlóan tárgyalható). Itt kihasználtuk, hogy a $\partial_2 f$ deriváltfüggvény Darboux-tulajdonságú, ld. a 6.40 Tételt. Tekintsük az

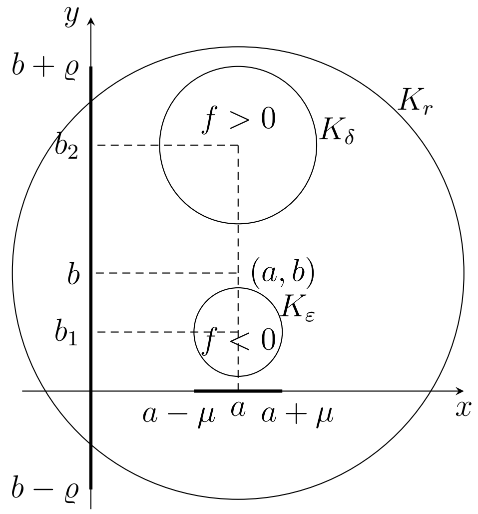
$$f_a : y \mapsto f(a, y)$$

függvényt! Mivel

$$f_a(b) = f(a, b) = 0, \text{ és } (f_a)'(b) = \partial_2 f(a, b) > 0,$$

ezért f_a szigorúan lokálisan növő b-ben, így léteznek olyan $b_1 < b < b_2$ számok, hogy

$$f(a, b_1) = f_a(b_1) < 0 < f_a(b_2) = f(a, b_2),$$



17.3. ábra. Implicitfüggvény-tétel bizonyítása

és feltehető, hogy $(a,b_1),(a,b_2)\in K_r(a,b)$. Az f függvény folytonossága miatt van olyan $\varepsilon>0$ és $\delta>0$, hogy

$$\forall(x',y')\in K_\varepsilon(a,b_1) \text{ és } \forall(x'',y'')\in K_\delta(a,b_2) \text{ esetén } f(x',y')<0<f(x'',y''). \tag{17.4}$$

A ε és δ elegendően kicsire választásával feltehető, hogy

$$K_\varepsilon(a,b_1)\subset K_r(a,b),\ K_\delta(a,b_2)\subset K_r(a,b).$$

Legyen

$$\mu:=\min\{\varepsilon,\delta\},\ \text{ és } K(a):=(a-\mu,a+\mu),$$

vagyis $K(a)$ tartalmazza K_ε és K_δ közül a kisebb sugarú (a 17.3. ábrán K_ε) vetületét az x-tengelyen. Legyen

$$\rho:=\max\{b-(b_1-\varepsilon),b_2+\delta-b\},\ \text{ és } K(b):=(b-\rho,b+\rho),$$

vagyis $K(b)$ tartalmazza K_ε és K_δ közül a nagyobb sugarú (az ábrán K_δ) vetületét az y-tengelyen.

Rögzítsünk most egy tetszőleges $x\in K(a)$ pontot, definiálni fogjuk hozzá a megfelelő $\varphi(x)\in K(b)$ értéket. Legyen

$$f_x: y\mapsto f(x,y),$$

mely f folytonossága következtében egy valós változós folytonos függvény.

A (17.4) alapján

$$f(x,b_1)=f_x(b_1)<0<f_x(b_2)=f(x,b_2),$$

mivel $x \in K(a)$ miatt $(x, b_1) \in K_\varepsilon(a, b_1)$ és $(x, b_2) \in K_\delta(a, b_2)$. Alkalmazva f_x-re a Bolzano-tételt $[b_1, b_2]$-n, létezik olyan $y \in (b_1, b_2)$, amelyre

$$f_x(y) = f(x, y) = 0.$$

Csak egyetlen ilyen y létezik, ugyanis, ha $y^* \neq y$ is olyan lenne, hogy

$$f_x(y^*) = f(x, y^*) = 0,$$

akkor f_x-re alkalmazva a Rolle-tételt $[y, y^*]$-on (vagy $[y^*, y]$-on), létezne olyan c az y és y^* között, hogy

$$(f_x)'(c) = \partial_2 f(x, c) = 0$$

lenne. Ez pedig lehetetlen, hiszen $(x, c) \in K_r(a, b)$, és (17.3) miatt $\partial_2 f(x, c) > 0$ kellene legyen.

Tehát bármely $x \in K(a)$ számhoz egyértelműen rendelhető olyan $y \in K(b)$ szám, hogy $f(x, y) = 0$, azaz létezik olyan

$$\varphi : K(a) \to K(b),\ \varphi(x) := y$$

függvény, hogy

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \ \ \forall x \in K(a).$$

Az egyértelműség miatt $\varphi(a) = b$ is teljesül.

□

A 17.9 Tétel alkalmazásaként nézzünk meg egy állítást, ami (folytonos) lokális inverz létezéséről szól.

17.10. Tétel (Folytonos lokális inverz létezése)**.** *Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható a b pont egy környezetében, itt $g'(y) \neq 0$. Ekkor g-nek létezik a $g(b) = a$ egy $K_\delta(a)$ környezetében értelmezett folytonos (jobb)inverze, φ, melyre $g(\varphi(x)) = x$ minden $x \in K_\delta(a)$.*

Bizonyítás. Definiálja az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt $f(x, y) := x - g(y)$. A feltételek alapján f-re teljesülnek a 17.9 Egyváltozós implicitfüggvény-tétel feltételei az (a, b) pontban, így létezik olyan folytonos $\varphi : K(a) \to K(b)$ függvény, melyre

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \Rightarrow g(\varphi(x)) = x,\ x \in K(a).$$

□

A következő tétel a 17.9 Tétel többváltozós megfelelője, ám bizonyítása egészen más ötleteket kíván.

17.11. Tétel (Többváltozós implicitfüggvény-tétel)**.** *Legyen* $f : \mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{R}^q$ *folytonosan differenciálható a* $c = (a, b) \in \operatorname{int} \mathcal{D}(f)$ *pont egy környezetében, ahol* $a \in \mathbb{R}^p$*,* $b \in \mathbb{R}^q$*, és* $f(c) = f(a, b) = 0_{\mathbb{R}^q}$*. Tegyük fel, hogy az* $f_a : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$*,* $f_a(y) = f(a, y)$ *függvényre* $(f_a)'(b)$ *injektív (vagyis,* $\det f'_a(b) \neq 0$*.) Ekkor létezik olyan* $\delta > 0$ *és* $\eta > 0$*, hogy*

1. $\forall\, x \in B(a, \delta)$ *esetén* $\exists!\ \varphi(x) \in B(b, \eta) : f(x, \varphi(x)) = 0_{\mathbb{R}^q}$*;*
2. *a* $\varphi : B(a, \delta) \to B(b, \eta)$ implicitfüggvény *folytonosan differenciálható* $B(a, \delta)$*-n;*
3. *az* $f^b : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$*,* $f^b(x) = f(x, b)$ *jelöléssel*

$$\varphi'(x) = -\left[f'_a(x)\right]^{-1} \cdot (f^b)'(\varphi(x)), \quad x \in B(a, \delta).$$

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk. □

A következőkben ún. feltételi halmazokon keresünk szélsőértéket.

17.12. Definíció. Legyenek g_1, g_2, ..., $g_q : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ $(q < p)$ függvények, továbbá

$$H := \{x \in \mathbb{R}^p \mid g_1(x) = 0, \ldots, g_q(x) = 0\} \neq \emptyset.$$

Azt mondjuk, hogy az f függvénynek a $g_1 = 0$, ..., $g_q = 0$ feltétel mellett *feltételes szélsőértéke* van az $a \in H$ pontban, ha az a pontban az $f|_H$ függvénynek lokális szélsőértéke van.

Az alábbi, Lagrange-féle multiplikátormódszerről szóló tétel bizonyítása is a 17.9 Egyváltozós implicitfüggvény-tételen múlik.

17.13. Tétel (Lagrange-féle multiplikátormódszer)**.** *Legyenek* $f, g_1, g_2, \ldots, g_q : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ *folytonosan differenciálható függvények,* $q < p$*. Tegyük fel, hogy az* f *függvénynek a* $g_1 = 0$*,* $g_2 = 0$*,...,* $g_q = 0$ *feltétel mellett feltételes szélsőértéke van az* $a \in \mathcal{D}(f)$ *pontban. Tegyük fel továbbá, hogy*

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} \partial_1 g_1(a) & \partial_2 g_1(a) & \ldots & \partial_p g_1(a) \\ \vdots & & & \vdots \\ \partial_1 g_q(a) & \partial_2 g_q(a) & \ldots & \partial_p g_q(a) \end{pmatrix} = q.$$

Ekkor léteznek olyan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q \in \mathbb{R}$ *számok, hogy az*

$$F := f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_q g_q : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$$

függvényre $F'(a) = 0_{\mathbb{R}^p}$*.* F *parciális deriváltjaira felírva:*

$$\begin{aligned} \partial_1 f(a) + \lambda_1 \partial_1 g_1(a) + \cdots + \lambda_q \partial_1 g_q(a) &= 0 \\ \partial_2 f(a) + \lambda_1 \partial_2 g_1(a) + \cdots + \lambda_q \partial_2 g_q(a) &= 0 \\ &\vdots \\ \partial_p f(a) + \lambda_1 \partial_p g_1(a) + \cdots + \lambda_q \partial_p g_q(a) &= 0. \end{aligned}$$

Bizonyítás. A bizonyítást $p = 2$, $q = 1$ és feltételes minimum esetén végezzük el (a feltételes maximum esete hasonlóan gondolható meg), az a helyett pedig (a, b)-t írunk. A feltételek alapján a $g := g_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény folytonosan differenciálható, és az (a, b) pontban $g(a, b) = 0$. Ebben a pontban a rangfeltétel

$$\operatorname{rang}\big(\partial_1 g(a,b), \quad \partial_2 g(a,b)\big) = 1$$

azt jelenti, hogy például $\partial_2 g(a, b) \neq 0$. Ekkor a 17.9 Egyváltozós implicitfüggvény-tétel szerint létezik a-nak $K(a)$ és b-nek $K(b)$ környezete, és létezik olyan $\varphi : K(a) \to K(b)$ differenciálható függvény, amelyre

$$\forall x \in K(a) \text{ esetén } g(x, \varphi(x)) = 0,$$

és $\varphi(a) = b$. Ez azt jelenti, hogy

$$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\} \supset \{(x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in K(a)\} =: H^*. \tag{17.5}$$

Továbbá

$$\varphi'(a) = -\frac{\partial_1 g(a,b)}{\partial_2 g(a,b)}. \tag{17.6}$$

Mivel az $f|_H$ függvénynek lokális minimuma van az $(a, b) \in H$ pontban, ezért létezik $r > 0$, hogy az (a, b) pont $K_r(a, b)$ környezetében

$$\forall (x,y) \in K_r(a,b) \cap H \text{ esetén } f(x,y) \geq f(a,b). \tag{17.7}$$

A (17.5) alapján $x \in K(a)$ esetén $(x, \varphi(x)) \in H^* \subset H$. Felhasználva, hogy φ folytonos $K(a)$-n, meggondolható, hogy létezik olyan $K^*(a) \subset K(a)$ környezet, hogy

$$\forall x \in K^*(a) \text{ esetén } (x, \varphi(x)) \in K_r(a,b) \cap H.$$

Így a (17.7) egyenlőtlenségből

$$\forall x \in K^*(a) \text{ esetén } f(x, \varphi(x)) \geq f(a, \varphi(a)) = f(a,b).$$

Ez azt jelenti, hogy a

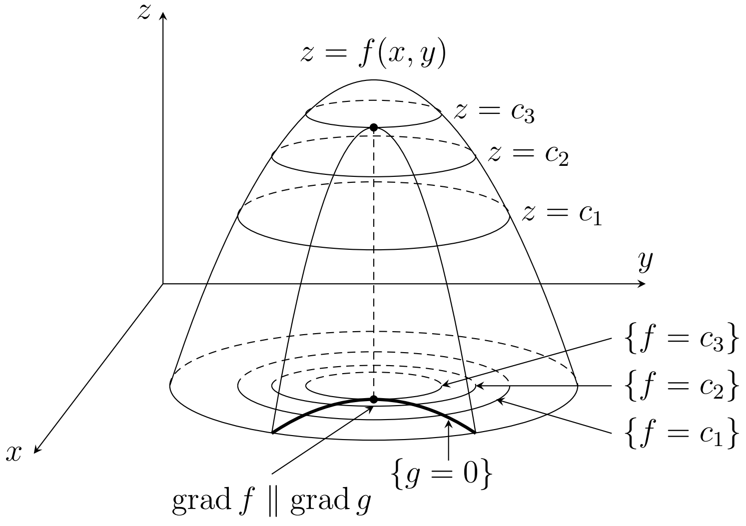
$$h : K^*(a) \to \mathbb{R}, \ h(x) := f(x, \varphi(x))$$

valós függvénynek lokális minimuma van az a pontban. A h függvény differenciálható (hiszen differenciálható függvények kompozíciója), ezért $h'(a) = 0$. A 16.9 Kompozíció-függvény deriválási szabálya alapján

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x, \varphi(x)) \cdot (x', \varphi'(x)) \\ &= \langle \big(\partial_1 f(x,\varphi(x)), \quad \partial_2 f(x, \varphi(x))\big), \big(1, \quad \varphi'(x)\big) \rangle \\ &= \partial_1 f(x, \varphi(x)) + \varphi'(x) \partial_2 f(x, \varphi(x)). \end{aligned}$$

Ezért
$$h'(a) = \partial_1 f(a,b) + \varphi'(a)\partial_2 f(a,b) = 0. \tag{17.8}$$
Behelyettesítve a (17.8) egyenletbe $\varphi'(a)$ értékét a (17.6) összefüggésből kapjuk, hogy
$$\partial_1 f(a,b) - \frac{\partial_2 f(a,b)}{\partial_2 g(a,b)}\partial_1 g(a,b) = 0. \tag{17.9}$$
Válasszuk tehát
$$\lambda := -\frac{\partial_2 f(a,b)}{\partial_2 g(a,b)}.$$
Így
$$\partial_2 f(a,b) + \lambda \partial_2 g(a,b) = 0 \tag{17.10}$$
is teljesül. Vagyis azt kaptuk, hogy ha az f függvénynek feltételes minimuma van a $g = 0$ feltétel mellett az (a,b) pontban, akkor az $F := f + \lambda g$ függvénynek az első változó szerinti parciális deriváltja 0 (ezt mutatja (17.9)), és a második változó szerinti parciális deriváltja is 0 (ezt mutatja (17.10)). Tehát
$$F'(a,b) = \begin{pmatrix} \partial_1 F(a,b), & \partial_2 F(a,b) \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2}.$$
□

A 17.13 Tétel állítását $p = 2$ és $q = 1$ esetben a 17.4. ábrán szemléltetjük. Ha az f



17.4. ábra. Lagrange-féle multiplikátormódszer

függvény szintvonalait levetítjük az xy-síkra, akkor a keresett feltételes szélsőértékhely ott van, ahol a $g = 0$ feltételi halmaz – ábránkon az egyszerűség kedvéért görbe – érinti valamelyik szintvonalat. Ez azt jelenti, hogy a $\operatorname{grad} f$ és $\operatorname{grad} g$ gradiensek párhuzamosak, vagyis lineárisan összefüggőek.

17.14. Példa. Határozzuk meg az $f(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z$ függvény maximumát, ha x, y, z egy háromszög szögei!
Keressük tehát az

$$f(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z$$

függvény maximumát a

$$g(x, y, z) = x + y + z - \pi = 0, \quad 0 < x, y, z < \pi$$

feltétel mellett. A 17.13 Lagrange-féle multiplikátormódszer szerint először ellenőrizzük, milyen pontokban teljesül, hogy

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} \partial_1 g & \partial_2 g & \partial_3 g \end{pmatrix} = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Világos, hogy minden pont ilyen. Továbbá, szélsőértékhelyeken van olyan $\lambda \in \mathbb{R}$ szám, amelyre $f'(x, y, z) + \lambda g'(x, y, z) = 0_{\mathbb{R}^3}$, azaz

$$\begin{aligned} \cos x \sin y \sin z + \lambda &= 0 \\ \sin x \cos y \sin z + \lambda &= 0 \\ \sin x \sin y \cos z + \lambda &= 0. \end{aligned}$$

Ebből $\cos x \sin y \sin z = \sin x \cos y \sin z = \sin x \sin y \cos z = -\lambda$. Mivel a feltétel szerint $\sin x \sin y \sin z \neq 0$, ezért átrendezéssel $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} y = \operatorname{ctg} z$. Tudjuk, hogy $g(x, y, z) = x + y + z - \pi = 0$, ezért $x = y = z = \frac{\pi}{3}$. Vagyis a megoldás a szabályos háromszög.

18. fejezet

Ívhossz, vonalintegrál, primitív függvény

Ebben a fejezetben ismét integrálszámításról lesz szó, mégpedig a fizikában gyakran használatos ún. vektormezők görbe menti integráljáról. Ez a fogalom fizikailag úgy interpretálható mint az a munkavégzés, mely egy pont erőhatás által való mozgatása során történik.

18.1. Görbék

18.1. Definíció. Egy $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ függvényt *görbé*nek nevezünk. $p = 2$ esetben *síkgörbé*ről, $d = 3$ esetben *térgörbé*ről beszélünk. Azt mondjuk, hogy $\gamma(a)$ a görbe *kezdő-*, $\gamma(b)$ a *végpontja.*
Speciális síkgörbe: $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, f(t))$, ahol $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvény.

18.2. *Megjegyzés.* Görbére úgy gondolhatunk mint egy pontszerű test pályájára: minden időpillanatban megadjuk a test helyzetét $\mathbb{R}^p$-ben, ez $\gamma(t) \in \mathbb{R}^p$.

Nagyon fontos, hogy a görbét, melyet függvényként definiáltunk, ne keverjük össze az értékkészlethalmazával – bár inkább ez utóbbi felelne meg a mindennapos szóhasználat „görbe” elnevezésének.

18.3. Definíció. Egy $H \subset \mathbb{R}^p$ halmaz egy *paraméterezése* a $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ görbe, ha $\mathcal{R}(\gamma) = H$.

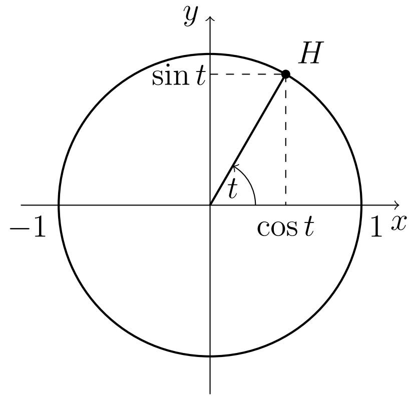
18.4. Példa. A

$$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

halmaznak – vagyis, az egységkörvonalnak – egy paraméterezése a

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

görbe, ld. a 18.1. ábrát. Világos, hogy ha a γ függvényt $[0,2\pi]$-n, $[0,3\pi]$-n, stb. definiáljuk, akkor is ugyanehhez az értékkészlethalmazhoz jutunk, tehát H-nak végtelen sok paraméterezése létezik.

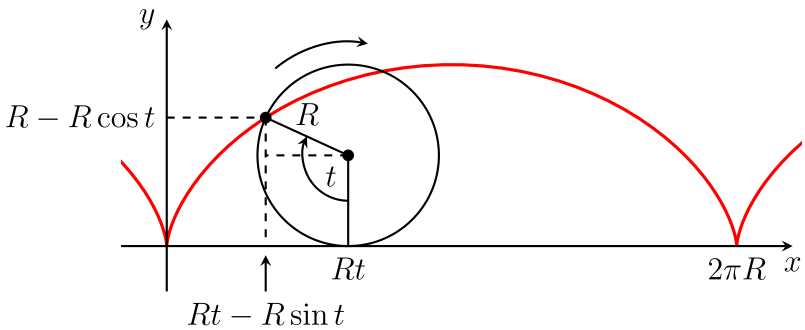


18.1. ábra. A $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ síkgörbe értékkészlete

18.5. Példa. Nevezetes görbe a *ciklois*, melynek paraméterezése

$$\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = (Rt - R\sin t, R - R\cos t),$$

ld. a 18.2. ábrát.



$$\begin{cases} x(t) = Rt - R\sin t, \\ y(t) = R - R\cos t \end{cases}$$

18.2. ábra. Ciklois

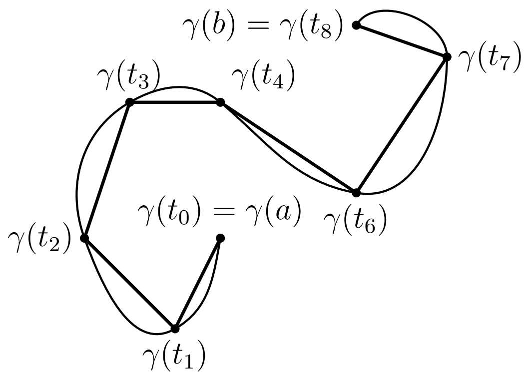
18.6. Definíció. Legyenek $x, y \in \mathbb{R}^p$ tetszőleges pontok. Jelölje $[x,y] \subset \mathbb{R}^p$ az alábbi halmazt, melyet $\mathbb{R}^p$-beli *szakasz*nak hívunk:

$$[x,y] = \{(1-t)\cdot x + t \cdot y : t \in [0,1]\}.$$

Világos, hogy az $[x, y] \subset \mathbb{R}^p$ szakasz egy paraméterezése a

$$\gamma(t) : [0,1] \to \mathbb{R}^p,\ \gamma(t) = (1-t)\cdot x + t \cdot y$$

görbe.
Egy $\mathbb{R}^p$-beli *poligon* (vagy *töröttvonal*) egymáshoz csatlakozó szakaszok uniója.



18.3. ábra. Beírt töröttvonal

A görbe ívhosszát úgy fogjuk definiálni mint a „beírt" poligonjai hosszainak szupremumát.

18.7. Definíció. Egy $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ görbe *ívhossza* az

$$s(\gamma) := \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\right\} \in \overline{\mathbb{R}}. \tag{18.1}$$

Itt $|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| = |[\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)]|$ szakasz hossza.

A $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ görbe *rektifikálható*, ha $s(\gamma) < \infty$, vagyis az ívhossza véges.

18.8. *Megjegyzés.* Fontos látnunk, hogy az ívhossz függ a paraméterezéstől! Például, a

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

görbe ívhossza 2π, a

$$\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

görbéé 4π, bár az értékkészletük ugyanúgy az egységkör (ld. a 18.4 Példát). Tehát, egy görbe képhalmazának ívhosszáról általában nem beszélhetünk.

18.9. Definíció. Egy $H \subset \mathbb{R}^p$ halmaz *egyszerű ív*, ha H-nak létezik bijektív folytonos paraméterezése.

18.10. Példa. Szakaszok, körívek és korlátos, zárt intervallumon értelmezett folytonos függvények grafikonjai mind egyszerű ívek.

18.11. Állítás. *Ha γ_1 és γ_2 ugyanannak az egyszerű ívnek a bijektív folytonos paraméterezései, akkor $s(\gamma_1) = s(\gamma_2)$.*

Bizonyítás. Világos, hogy ha a görbék $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ és $\gamma_2 : [c, d] \to \mathbb{R}^p$, akkor $h = \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1 : [a, b] \to [c, d]$ bijektív, folytonos, tehát szigorúan monoton. Legyen $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ felosztása $[a, b]$-nek. Ekkor h szigorú monotonitása folytán $h(t_0), h(t_1), \ldots, h(t_n)$ a $[c, d]$ intervallum egy felosztását adják: ha h szigorúan monoton növő, akkor ebben a sorrendben, ha h szigorúan monoton fogyó, akkor fordított sorrendben. Másrészt γ_1-nek a $\{t_i\}$ felosztáshoz, γ_2-nek a $\{h(t_i)\}$ felosztáshoz tartozó beírt poligonjai megegyeznek: mindkettő a $\gamma_1(t_i) = \gamma_2(h(t_i))(= \gamma_2(\gamma_2^{-1} \circ \gamma_1(t_i)))$ csúcspontokat köti össze. Ily módon γ_1 minden beírt poligonja egyben γ_2-nek is beírt poligonja, és ez könnyen láthatóan visszafelé is igaz. Ez pedig azt jelenti, hogy a beírt poligonok hosszainak halmaza, így ezek szuprémuma is megegyezik, vagyis $s(\gamma_1) = s(\gamma_2)$. □

A korábban definiált fogalmaknak megfelelően beszélhetünk egy görbe alábbi tulajdonságairól.

18.12. Definíció. A $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ görbe *folytonos/(folytonosan) differenciálható/Lipschitz-tulajdonságú*, ha minden $j = 1, \ldots, p$ esetén a $\gamma_j : [a, b] \to \mathbb{R}$ koordinátafüggvény folytonos/(folytonosan) differenciálható ill. Lipschitz-tulajdonságú.

A 6.38 Megjegyzés alapján ha egy függvény folytonosan differenciálható valamely $[a, b]$ intervallumon, akkor Lipschitz- tulajdonságú is. Ebből következik, hogy ha egy $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ görbe folytonosan differenciálható, akkor Lipschitz-tulajdonságú.

18.13. Tétel. *Ha a $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ görbe Lipschitz-tulajdonságú (pl. folytonosan differenciálható), akkor γ rektifikálható.*

Bizonyítás. A Lipschitz-tulajdonság miatt léteznek olyan $K_j > 0$, $j = 1, \ldots, p$ konstansok, hogy
$$|\gamma_j(y) - \gamma_j(x)| \le K_j \cdot |y - x|, \quad x, y \in [a, b].$$
Legyen $K := \max_{1 \le j \le p} K_j$. Ekkor a (18.1) definícióban szereplő tetszőleges $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ felosztásra
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1}))^2 + \cdots + (\gamma_p(t_i) - \gamma_p(t_{i-1})^2} \\
&\le \sum_{i=1}^{n} \sqrt{K^2 \cdot p \cdot (t_i - t_{i-1})^2} = K \cdot \sqrt{p} \cdot \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \\
&= K \cdot \sqrt{p} \cdot (b - a), \quad x, y \in [a, b].
\end{aligned}$$
Ebből következik, hogy $s(\gamma) \le K \cdot \sqrt{p} \cdot (b - a)$, így γ rektifikálható. □

18.14. Példa. Vigyázat! Folytonos görbe nem feltételenül rektifiálható. Példaként tekintsük az

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

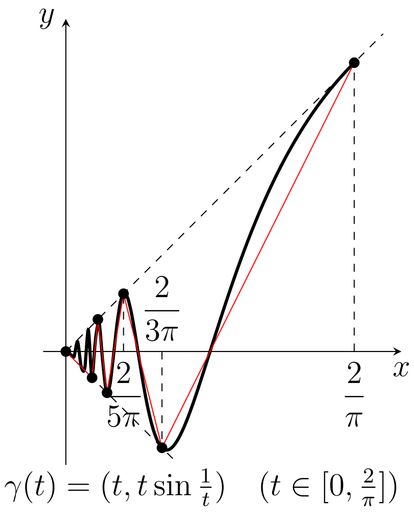
függvény grafikonját a $[0, 2/\pi]$ intervallumon (lásd a 18.4. ábrát)! Ekkor rögzített n esetén véve a $[0, 2/\pi]$ intervallum

$$\{0\} \cup \left\{ \frac{2}{(2k+1)\pi} : k = 0, \dots, n \right\}$$

felosztását a görbének a

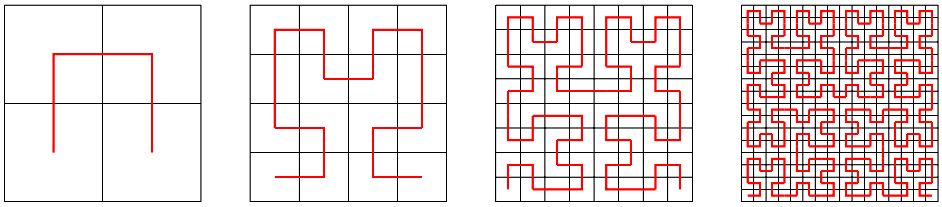
$$(0, 0), \qquad \left(\frac{2}{(2k+1)\pi}, \frac{2}{(2k+1)\pi} \right), \ k = 0, \dots, n$$

csúcspontok által meghatározott beírt poligonját nyerjük. Az ábra alapján könnyen látható, hogy ennek a beírt poligonnak a hossza nagyobb, mint $\sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(2k+1)\pi}$, amely az (5.2) harmonikus sor egy részletösszegének konstansszorosa. Mivel a harmonikus sor divergens, ezért a beírt poligonok hosszainak szuprémuma végtelen.



18.4. ábra. Nem rektifikálható görbe és egy beírt poligonja

18.15. *Megjegyzés.* Szemléletünk azt sugallná, hogy egy folytonos görbét a kezdőpontjától a végpontjáig a „ceruza felemelése nélkül” megrajzolhatunk. A folytonos görbék azonban ennél sokkal bonyolultabbak is lehetnek. Peano konstruált folytonos $\gamma \colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ görbét, amelynek képhalmaza a $[0, 1]^2$ egységnégyzet a síkon. Ezt a görbét természetesen nem tudjuk lerajzolni, de egy hozzá közelítő görbesorozatot mutat a 18.5. ábra.



18.5. ábra. Egységnyégyzetet kitöltő görbe konstrukciója

18.16. Tétel. *Ha a $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ görbe differenciálható és minden $j = 1, \ldots, p$ esetén $\gamma_j' \in R[a, b]$ (pl., ha γ folytonosan differenciálható), akkor*

$$s(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \cdots + (\gamma_p'(t))^2}\, dt. \tag{18.2}$$

Bizonyítás. A tételt csak vázlatosan bizonyítjuk, mégpedig úgy, hogy az $s(\gamma)$ számot a (18.1) definícióban szereplő $\sum_{i=1}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$ összeggel közelítjük valamely $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ felosztásra. Használjuk fel, hogy minden $j = 1, \ldots, p$ esetén γ_j differenciálható. Így az adott felosztás $[t_{i-1}, t_i]$ részintervallumain alkalmazva a 6.34 Lagrange-féle középértéktételt kapjuk, hogy léteznek $c_{1,i}, \ldots, c_{p,i} \in [t_{i-1}, t_i]$ számok, melyekre

$$\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1}) = \gamma_1'(c_{1,i}) \cdot (t_i - t_{i-1}), \ \ldots \ , \gamma_p(t_i) - \gamma_p(t_{i-1}) = \gamma_p'(c_{p,i}) \cdot (t_i - t_{i-1}).$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1}))^2 + \cdots + (\gamma_p(t_i) - \gamma_p(t_{i-1})^2} \\
&= \sum_{i=1}^n \sqrt{\gamma_1'(c_{1,i})^2 \cdot (t_i - t_{i-1})^2 + \cdots + \gamma_p'(c_{p,i})^2 \cdot (t_i - t_{i-1})^2} \\
&= \sum_{i=1}^n \sqrt{\gamma_1'(c_{1,i})^2 + \cdots + \gamma_p'(c_{p,i})^2} \cdot (t_i - t_{i-1}),
\end{aligned}$$

ami az $\int_a^b |\gamma'(t)|$ egy integrál-közelítőösszege. □

18.17. *Megjegyzés.* Szemléletesen, $\gamma'(t)$ a pontszerű test sebességvektora, így a (18.2) képlet szerint a pontszerű test pályájának hossza a sebesség nagyságának (t idő szerinti) integrálja. Ez a középiskolából jól ismert $s = vt$ képlet általánosítása arra az esetre, amikor a sebesség (v) nem állandó, hanem időtől függő.

18.18. *Megjegyzés.* A fenti tétel speciális esete, ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, f(t))$, és így f grafikonjának ívhossza

$$s(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt.$$

(Ld. még a 7.69 Tételt.)

18.19. Példa. A $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$ cikloisgörbe ívhossza:

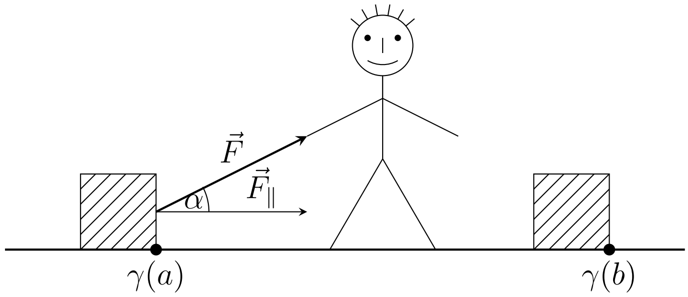
$$\begin{aligned} s(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, dt = \sqrt{2}a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\, dt \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\, dt = 8a. \end{aligned}$$

(Itt felhasználtuk, hogy $\sin|_{[0,\pi]} \geq 0$.)

18.2. Vonalintegrál

Motiváció

Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ adott függvény, melyre gondolhatunk úgy, hogy a tér minden pontjában adott egy vektor. Szokás ezért f-et vektormezőnek is hívni. Fizikailag f-re tekinthetünk úgy, mint egy erőtér: $f(x)$ az $x \in \mathbb{R}^p$ pontban ható erőt adja meg (amelynek iránya és nagysága is van). Például, f lehet nehézségi erő. Képzeljük most el, hogy ebben az erőtérben egy pontszerű test a $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ görbén halad végig. Mekkora munkát végez ekkor a testen az erőtér?



$$W = |\vec{F}_{\|}| \cdot |\gamma(b) - \gamma(a)| = |\vec{F}| \cos\alpha \cdot |\gamma(b) - \gamma(a)| = \langle \vec{F}, \gamma(b) - \gamma(a) \rangle$$

18.6. ábra. Munkavégzés

A görbét közelítsük beírt poligonnal, ekkor a munkavégzés közelítőleg az egyes szakaszokon való munkavégzések összege. Az i-edik szakaszon a munkavégzés közelítőleg egy közbülső pontbeli (pl. $g(c_i)$) erő által az adott szakaszon végzett munka, azaz

$(f(g(c_i))$-nek a szakaszra eső komponensének nagysága$) \times ($a szakasz hossza$)$
$= |f(g(c_i))| \cdot \cos\alpha_i \cdot |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})|$
$= \langle f(g(c_i)), \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \rangle.$

Következésképpen a munkavégzés közelítőleg

$$\sum_{i=1}^{n} \langle f(g(c_i)), \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \rangle.$$

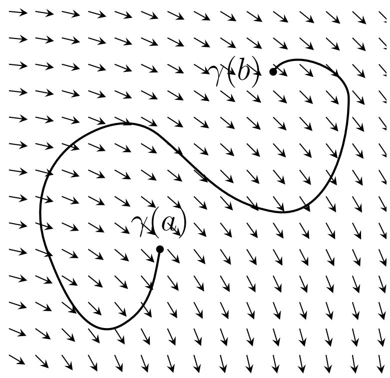
A beírt poligonok finomításával határértékként megkapjuk az f erőtér által a testen végzett munkát. Ez lesz az f vektormező vonalintegrálja a γ görbe mentén. A definíciót a Riemann-összeghez hasonló közelítés segítségével mondjuk ki.

18.20. Definíció. Legyen $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ görbe, $f : \mathcal{R}(\gamma) \to \mathbb{R}^p$. Azt mondjuk, hogy az *$f$ vonalintegrálja a γ görbe mentén* az $I \in \mathbb{R}$ szám, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik az $[a, b]$ intervallumnak olyan $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ felosztása és ehhez $t_{i-1} < c_i < t_i$, $i = 1, \ldots, n$ számok, melyekre

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} \langle f(\gamma(c_i)), \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \rangle \right| < \varepsilon. \tag{18.3}$$

Jelölés:

$$I = \int_\gamma f.$$



18.7. ábra. Görbe és vektormező

18.21. *Megjegyzés.* Legyen $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ görbe, $f : \mathcal{R}(\gamma) \to \mathbb{R}^p$, $h : [c, d] \to [a, b]$ pedig folytonos, szigorúan monoton növő (pl. egy megfelelő eltolt lineáris függvény). Definiálja $\widetilde{\gamma} := \gamma \circ h : [c, d] \to \mathbb{R}^p$. Könnyen látható, hogy ha létezik $\int_\gamma f$, akkor létezik $\int_{\widetilde{\gamma}} f$, és

$$\int_\gamma f = \int_{\widetilde{\gamma}} f.$$

Ugyanis, adott $\varepsilon > 0$ esetén $[a, b]$-nek létezik olyan $\{t_i\}$ felosztása, melyre (18.3) teljesül. Ekkor h szigorú monotonitása miatt $\{h^{-1}(t_i)\} = \{s_i\}$ egy felosztása $[c, d]$-nek, és

$$\left| \int_\gamma f - \sum_{i=1}^{n} \langle f(\widetilde{\gamma}(s_i)), \widetilde{\gamma}(s_i) - \widetilde{\gamma}(s_{i-1}) \rangle \right| < \varepsilon.$$

Így $\int_\gamma f = \int_{\widetilde{\gamma}} f$.

A vonalintegrál bizonyos esetekben Riemann-integrál alakját ölti, erről szól a következő tétel.

18.22. Tétel. *Legyen $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ görbe differenciálható és minden $j = 1, \ldots, p$ esetén $\gamma_j' \in R[a, b]$ (pl., γ folytonosan differenciálható), továbbá $f : \mathcal{R}(\gamma) \to \mathbb{R}^p$ folytonos. Ekkor*

$$\int_\gamma f = \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt = \int_a^b \left(\sum_{j=1}^{p} f_j(\gamma(t)) \cdot \gamma_j'(t) \right) dt.$$

Bizonyítás. Ezt a tétel ismét csak vázlatosan bizonyítjuk úgy, hogy az $\int_\gamma f$ számot a (18.3) definícióban szereplő $\sum_{i=1}^{n} \langle f(\gamma(c_i)), \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \rangle$-el közelítjük valamely $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ felosztásra és $t_{i-1} < c_i < t_i$, $i = 1, \ldots, n$ számokra. Használjuk fel, hogy minden $j = 1, \ldots, p$ esetén γ_j differenciálható. Így az adott felosztás $[t_{i-1}, t_i]$ részintervallumain alkalmazva a 6.34 Lagrange-féle középértéktételt kapjuk, hogy léteznek $d_{1,i}, \ldots, d_{p,i} \in [t_{i-1}, t_i]$ számok, melyekre

$$\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1}) = \gamma_1'(d_{1,i}) \cdot (t_i - t_{i-1}), \ \ldots \ , \gamma_p(t_i) - \gamma_p(t_{i-1}) = \gamma_p'(d_{p,i}) \cdot (t_i - t_{i-1}).$$

Ekkor

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \langle f(\gamma(c_i)), \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(f_1(\gamma(c_i)) \cdot (\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1})) + \cdots + f_p(\gamma(c_i)) \cdot (\gamma_p(t_i) - \gamma_p(t_{i-1})) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \big(f_1(\gamma(c_i)) \cdot \gamma_1'(d_{1,i}) \cdot (t_i - t_{i-1}) + \cdots + f_p(\gamma(c_i)) \cdot \gamma_p'(d_{p,i}) \cdot (t_i - t_{i-1}) \big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \big(f_1(\gamma(c_i)) \cdot \gamma_1'(d_{1,i}) + \cdots + f_p(\gamma(c_i)) \cdot \gamma_p'(d_{p,i}) \big) \cdot (t_i - t_{i-1}),
\end{aligned}$$

ami éppen az $\int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt = \int_a^b \left(\sum_{j=1}^{p} f_j(\gamma(t)) \cdot \gamma_j'(t) \right) dt$ egy integrál-közelítőösszege.

□

18.23. *Megjegyzés.* Igazolható, hogy a vonalintegrál valójában akkor is létezik, ha f folytonos, és γ rektifikálható.

18.3. Primitív függvény (többváltozós)

Fizikai tanulmányainkból emlékezhetünk, hogy a munkavégzés gyakran a test kezdeti és végpontbeli potenciális energiájának különbségeként is megkapható („$W = \Delta E_{pot}$”). Például, ha f a nehézségi erő vektormezője, melyben egy m tömegű test mozog, akkor f minden pontban függőleges irányú és mg nagyságú (g a gravitációs erő nagysága). Ekkor $E = mgh$ a potenciális energia h magasságban. Így ha a test h_1 magasságból h_2 magasságba jut, akkor a nehézségi erő munkája $mg(h_2 - h_1)$, amely az úttól független, csak a két pont közötti magasságkülönbségtől függ. Az alábbiakban ezt fogalmazzuk meg matematikailag a primitív függvény fogalma segítségével.

18.24. Definíció. Legyen $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$, $\Omega \subset \mathcal{D}(f)$ nyílt. Azt mondjuk, hogy az $F : \Omega \to \mathbb{R}$ *primitív függvénye (potenciálja) f-nek Ω-n*, ha F differenciálható Ω-n és minden $x \in \Omega$ esetén

$$F'(x) = f(x) \Longleftrightarrow \partial_j F(x) = f_j(x),\ j = 1, \dots, p.$$

18.25. *Megjegyzés.* Az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ vektormező, az $F : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ potenciál ún. skalármező.

18.26. Tétel (Newton–Leibniz-formula vonalintegrálra). *Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ folytonos függvénynek van $F : \Omega \to \mathbb{R}$ primitív függvénye Ω-n. Ekkor tetszőleges $\gamma : [a, b] \to \Omega \subset \mathbb{R}^p$ folytonos és rektifikálható görbére*

$$\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Bizonyítás. A tételt csak vázlatosan bizonyítjuk úgy, hogy az $\int_\gamma f$ számot megint a (18.3) definícióban szereplő $\sum_{i=1}^n \langle f(\gamma(c_i)), \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\rangle$ összeggel közelítjük valamely $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ felosztásra és $t_{i-1} < c_i < t_i$, $i = 1, \dots, n$ számokra. Mivel F differenciálható Ω-n és $\gamma : [a, b] \to \Omega$, ezért az adott felosztáshoz tartozó $[\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)]$ szakaszokon F-re alkalmazva a 6.34 (többváltozós) Lagrange-féle középértéktételt kapjuk, hogy léteznek $d_i \in [g(t_{i-1}), g(t_i)]$ pontok, melyekre

$$F(\gamma(t_i)) - F(\gamma(t_{i-1})) = \langle F'(d_i), \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\rangle, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ebből

$$F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = \sum_{i=1}^n (F(\gamma(t_i)) - F(\gamma(t_{i-1}))) = \sum_{i=1}^n \langle F'(d_i), \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\rangle.$$

A primitív függvény definíciója alapján

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \langle f(\gamma(c_i)), \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\rangle &= \sum_{i=1}^n \langle F'(\gamma(c_i)), \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\rangle \\ &\approx \sum_{i=1}^n \langle F'(d_i), \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\rangle = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).\end{aligned}$$

A $\approx$ közelítő egyenlőség igaz, ha a $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ felosztás elég sűrű. Ugyanis ekkor mivel γ rektifikálható és folytonos, $\gamma(c_i)$, $t_{i-1} < c_i < t_i$ „elég közel van" a $d_i \in [\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)]$ ponthoz. Másrészt, mivel $F' = f$ folytonos, ezért $F'(\gamma(c_i))$ is „elég közel van" $F'(d_i)$-hez. $\square$

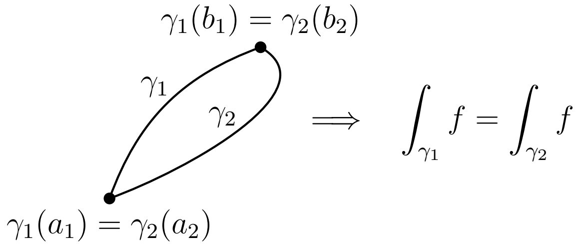
18.27. *Megjegyzés.* Ha a $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ görbe differenciálható és minden $j = 1, \ldots, p$ esetén $\gamma_j' \in R[a, b]$ (pl. γ folytonosan differenciálható), továbbá $f : \mathcal{R}(g) \to \mathbb{R}^p$ pedig folytonos, és primitív függvénye F, akkor a 18.22 és 16.9 Tételek alapján

$$\int_\gamma f = \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) \, dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

az egyváltozós 7.53 Newton–Leibniz-tételből adódik.

18.28. Definíció. A $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ görbe *zárt görbe*, ha $\gamma(a) = \gamma(b)$.

18.29. Következmény. *Ha az $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^p$) folytonos függvénynek van primitív függvénye, akkor tetszőleges $\gamma : [a, b] \to \Omega$ folytonos és rektifikálható* zárt *görbe mentén vett vonalintegrálja* 0. *Továbbá, tetszőleges folytonos és rektifikálható görbe mentén vett vonalintegrálja független az „úttól", vagyis a vonalintegrálok megegyeznek, ha a görbék értékkészleteinek „végpontjai" ugyanazok.*



18.8. ábra. Vonalintegrál úttól való függetlensége

18.30. *Megjegyzés.* Az irodalomban gyakran szerepel az az elnevezés, hogy az $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^p$) vektormező *konzervatív*, ha tetszőleges $\gamma : [a, b] \to \Omega$ folytonos és rektifikálható zárt görbe mentén vett vonalintegrálja 0. Következésképpen, folytonos vektormező primitív függvényének létezéséhez szükséges, hogy a vektormező konzervatív legyen. Van, ahol akkor neveznek egy vektormezőt konzervatívnak, ha tetszőleges folytonos és rektifikálható görbe mentén vett vonalintegrálja független az úttól. Máshol pedig akkor, ha van primitív függvénye. Később látni fogjuk, hogy folytonos vektormező esetén e három tulajdonság valóban ekvivalens egymással.

18.31. Tétel. *Legyen $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^p$) differenciálható Ω-n. Ha f-nek van primitív függvénye Ω-n, akkor minden $x \in \Omega$ esetén*

$$\partial_i f_j(x) = \partial_j f_i(x), \quad i, j = 1, \ldots, p. \tag{18.4}$$

Szokás azt mondani, hogy f „keresztben vett parciális deriváltjai" megegyeznek.

Bizonyítás. Mivel f differenciálható, ezért F kétszer differenciálható, tehát alkalmazható rá a 15.39 Young-tétel (illetve, ennek a 15.66 Tételben kimondott általánosított változata $\mathbb{R}^p$-re). Ebből minden $x \in \Omega$ esetén

$$\partial_{ij} F(x) = \partial_{ji} F(x) \Rightarrow \partial_i f_j(x) = \partial_j f_i(x), \quad i, j = 1, \ldots, p.$$

□

18.32. Példa. Fontos, hogy a (18.4) tulajdonság nem jelent elegendő feltételt arra, hogy f-nek létezzen primitív függvénye. Például, az

$$f(x, y) := \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

függvény esetén könnyen ellenőrizhető, hogy $\partial_2 f_1 = \partial_1 f_2$. Azonban, ha

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \ \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

az egységkörvonal egy paraméterezése, akkor a 18.22 Tétel alapján

$$\begin{aligned} \int_\gamma f &= \int_0^{2\pi} ((-\sin t) \cdot (-\sin t) + \cos t \cdot \cos t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 \, dt = 2\pi \neq 0, \end{aligned}$$

tehát f-nek nincs primitív függvény $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$-n. Később látni fogjuk, hogy az értelmezési tartománnyal van „baj". A függvénynek például a felső nyílt félsíkban van primitív függvénye, mégpedig $F(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, vagyis az (x, y) vektor szöge. (Ez valójában az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$ „felvágott" síkon is primitív függvény).

18.4. Folytonos függvény primitív függvénye

Ebben a szakaszban azzal foglalkozunk, hogy milyen elégséges feltételt tudunk adni arra, hogy egy $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ folytonos függvénynek létezzen primitív függvénye. Ehhez szükségünk lesz még néhány görbékre vonatkozó fogalomra, valamint a vonalintegrál néhány egyszerű tulajdonságára.

18.33. Állítás. *Ha* $\gamma_1 : [a,b] \to \Omega \subset \mathbb{R}^p$*,* $\gamma_2 : [b,d] \to \Omega$ *és* $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ *ún.* csatolt görbék*, akkor legyen*

$$\gamma_1 \cup \gamma_2 : [a,d] \to \Omega$$

az ún. egyesített görbe*, melyre*

$$(\gamma_1 \cup \gamma_2)_{|[a,b]} = \gamma_1 \text{ és } (\gamma_1 \cup \gamma_2)_{|[b,d]} = \gamma_2.$$

Ekkor bármely $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ *függvényre*

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f,$$

ha az integrálok léteznek.

Bizonyítás. Könnyen adódik a vonalintegrál definíciójából. Vegyük $[a,d]$-nek egy olyan felosztását, melyben b osztópont, és a megfelelő közelítőösszeg jól közelíti a $\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f$ vonalintegrált. Ekkor a kozelítőösszeg két összegre bomlik, amelyek éppen a $\int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$ összegben szereplő tagokat közelítik. □

18.34. Állítás. *Ha* $\gamma : [a,b] \to \Omega \subset \mathbb{R}^p$ *görbe, akkor legyen*

$$\overleftarrow{\gamma} : [a,b] \to \Omega, \quad \overleftarrow{\gamma}(t) := \gamma(a+b-t)$$

a γ *görbe* ellentétesen bejárva*. Ha egy* $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ *függvény esetén létezik* $\int_\gamma f$*, akkor létezik* $\int_{\overleftarrow{\gamma}} f$ *is, és*

$$\int_{\overleftarrow{\gamma}} f = -\int_\gamma f.$$

Bizonyítás. Mivel az $\int_{\overleftarrow{\gamma}} f$ (18.3) definíciójában

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n} \langle f(\overleftarrow{\gamma}(c_i)), \overleftarrow{\gamma}(t_i) - \overleftarrow{\gamma}(t_{i-1}) \rangle, \\ a = t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_n = b,\ c_i \in [t_{i-1}, t_i]\end{gathered} \tag{18.5}$$

alakú közelítőösszegek szerepelnek, ezért elég meggondolni, hogy minden ilyen közelítőösszeg egyenlő egy, az $\int_\gamma f$ integrált közelítő összeg mínusz egyszeresével, és fordítva. Mivel $\overleftarrow{\gamma}(t) = \gamma(a+b-t)$ teljesül, azért a fenti (18.5) közelítőösszeg az alábbival egyenlő:

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{n} \langle f(\gamma(\tilde{c}_i)), \gamma(\tilde{t}_i) - \gamma(\tilde{t}_{i-1}) \rangle, \\ a = \tilde{t}_n < \tilde{t}_{n-1} < \cdots \tilde{t}_i < \tilde{t}_{i-1} < \cdots \tilde{t}_0 = b,\ \tilde{c}_i \in [\tilde{t}_i, \tilde{t}_{i-1}],\end{gathered}$$

ahol $\tilde{s} = a + b - s$. Így

$$\sum_{i=1}^{n} \langle f(\overleftarrow{\gamma}(c_i)), \overleftarrow{\gamma}(t_i) - \overleftarrow{\gamma}(t_{i-1})\rangle = -\sum_{i=1}^{n} \langle f(\gamma(\tilde{c}_i)), \gamma(\tilde{t}_{i-1}) - \gamma(\tilde{t}_i)\rangle,$$

ahol

$$a = \tilde{t}_n < \tilde{t}_{n-1} < \cdots \tilde{t}_i < \tilde{t}_{i-1} < \cdots \tilde{t}_0 = b, \ \tilde{c}_i \in [\tilde{t}_i, \tilde{t}_{i-1}].$$

Tehát az osztópontok átsorszámozása után az $\int_\gamma f$ egy közelítő összegének mínusz egyszeresét kapjuk. A megfordítás ugyanígy meggondolható. □

Korábban beláttuk a vonalintegrálra vonakozó 18.26 Newton–Leibniz-formulát, mely szerint ha $\gamma : [a, b] \to \Omega \subset \mathbb{R}^p$ folytonos és rektifikálható görbe, továbbá $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ olyan folytonos függvény, melynek az $F : \Omega \to \mathbb{R}$ primitív függvénye Ω-n (vagyis F differenciálható és $F' = f$ Ω-n), akkor

$$\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \tag{18.6}$$

Az állításnak megfogalmaztuk két közvetlen következményét is. Az egyik, hogy primitív függvénnyel rendelkező folytonos függvény zárt görbén vett vonalintegrálja 0. A másik pedig, hogy ilyen függvény vonalintegrálja „független az úttól", vagyis ugyanolyan végpontokkal rendelkező görbéken vett vonalintegráljai megegyeznek.

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy ezen állítások mindegyike megfordítható, vagyis bármelyikből következik, hogy f-nek van primitív függvénye. A továbbiakban görbe alatt mindig folytonos és rektifikálható görbét értünk.

18.35. Tétel. *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ folytonos. Ekkor ekvivalensek:*

1. *Minden $\gamma : [a, b] \to \Omega$ zárt görbe (vagyis $\gamma(a) = \gamma(b)$) esetén*

$$\int_\gamma f = 0.$$

2. *Minden olyan $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \Omega$ és $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \Omega$ görbék esetén, melyekre $\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2)$ és $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$ is igaz (vagyis a két görbe értékkészletének „végpontjai" megegyeznek), teljesül, hogy*

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f.$$

(Másképp: a vonalintegrál független az úttól.)

3. *f-nek létezik primitív függvénye Ω-n, vagyis létezik olyan $F : \Omega \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, melyre*

$$\partial_j F(x) = f_j(x), \quad \forall j = 1, \ldots, p, \forall x \in \Omega.$$

Bizonyítás. 1. $\Rightarrow$ 2. Legyenek $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \Omega$ és $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \Omega$ olyan görbék, melyekre $\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2)$ és $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(b_2)$. Feltehető, hogy $a_2 = b_1$ (pl. γ_2 megfelelő átparaméterezésével, amelynél a 18.21 Megjegyzés alapján a vonalintegrál sem változik). Ekkor a 18.34 Állítás szerint a

$$\overleftarrow{\gamma_2} : [a_2, b_2] \to \Omega, \quad \overleftarrow{\gamma_2}(t) := \gamma_2(a_2 + b_2 - t)$$

ellentétesen bejárt görbével a

$$\gamma_1 \cup \overleftarrow{\gamma_2} : [a_1, b_2] \to \Omega$$

zárt görbe lesz, ugyanis

$$(\gamma_1 \cup \overleftarrow{\gamma_2})(a_1) = \gamma_1(a_1) \text{ és } (\gamma_1 \cup \overleftarrow{\gamma_2})(b_2) = \overleftarrow{\gamma_2}(b_2) = \gamma_2(a_2),$$

és a feltétel szerint $\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2)$. Így az 1. pont és a 18.34 Állítás alapján

$$0 = \int_{\gamma_1 \cup \overleftarrow{\gamma_2}} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\overleftarrow{\gamma_2}} f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f,$$

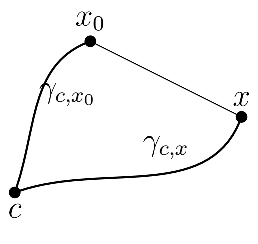
tehát

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f.$$

2. $\Rightarrow$ 1. Rögzítsünk egy $c \in \Omega$ pontot! Legyen

$$F : \Omega \to \mathbb{R}, \ F(x) := \int_{\gamma_{c,x}} f,$$

ahol $\gamma_{c,x}$ jelöljön egy c-t x-szel összekötő folytonos, rektifikálható görbét. Legyen $x_0 \in \Omega$



18.9. ábra.

tetszőleges. Megmutatjuk, hogy $F'(x_0) = f(x_0)$. A többváltozós differenciálhatóság 15.27 Definíciója alapján azt kell igazolni, hogy

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|F(x) - F(x_0) - \langle f(x_0), x - x_0 \rangle|}{|x - x_0|} = 0. \tag{18.7}$$

A F definíciója és a 18.22 Tétel alapján

$$F(x) - F(x_0) = \int_{\gamma_{x_0,x}} f = \int_0^1 \langle f(x_0 + t(x - x_0)), x - x_0 \rangle \, dt,$$

mivel $\gamma : [0,1] \to [x_0, x]$ az $[x_0, x]$ szakasz egy folytonosan differenciálható paraméterezése, $\gamma'(t) = x - x_0$.

Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges. Az f folytonossága miatt ε-hoz létezik $\delta > 0$, hogy ha $|x - x_0| < \delta$, akkor $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Legyen x olyan, hogy $|x - x_0| < \delta$. Ekkor minden $t \in [0,1]$ esetén $|t(x - x_0)| < \delta$ is teljesül, így

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0) - \langle f(x_0), x - x_0 \rangle| &= \left| \int_0^1 \langle f(x_0 + t(x - x_0)), x - x_0 \rangle \, dt - \langle f(x_0), x - x_0 \rangle \right| \\ &= \left| \int_0^1 \langle f(x_0 + t(x - x_0)) - f(x_0), x - x_0 \rangle \, dt \right| \\ &\le \int_0^1 |f(x_0 + t(x - x_0)) - f(x_0)| \cdot |x - x_0| \, dt \\ &< \varepsilon \cdot |x - x_0|, \end{aligned}$$

amiből (18.7) következik.

3. $\Rightarrow$ 1. Ld. a 18.26 Tételt. □

18.36. *Megjegyzés.* A fenti bizonyítás 2. $\Rightarrow$ 3. részében felhasználtuk, hogy bármely $c, x \in \Omega$ esetén létezik c-t x-szel összekötő, Ω-ban futó sima görbe. Ez csak akkor igaz, ha Ω-ról feltesszük, hogy ún. *összefüggő* halmaz. Ha Ω nem összefüggő, akkor az egyes *összefüggőségi komponenseire* alkalmazva a bizonyítást, az F primitív függvény az így kapott függvényekből előállítható.

18.5. Folytonosan differenciálható függvény primitív függvénye

Az előző szakaszban láttuk, hogy a zárt görbéken 0 vonalintegrállal rendelkező folytonos függvényeknek van primitív függvénye. Ezt a feltételt azonban a gyakorlatban igen nehéz ellenőrizni, hiszen valamiképpen minden lehetséges zárt görbén vett integrált ki kell számolni. Ebben a szakaszban azzal foglalkozunk, hogy egy elég sima (folytonosan differenciálható) $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ függvény primitív függvénye létezésére milyen egyszerűbb feltételt tudunk adni. Kiderül, hogy a korábban belátott 18.31 Tétel megfordítása megfelelő tulajdonságú tartományon alkalmazható. Az állítás bizonyításához szükségünk lesz a paraméteres integrál fogalmára.

18.5.1. Paraméteres integrál

Legyen $h : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény (ahol most $[a,b]$ és $[c,d]$ valós intervallumok). A

$$H : [c,d] \to \mathbb{R},\ H(y) := \int_a^b h(x,y)\,dx$$

függvényt *paraméteres integrál*nak nevezzük (y a „paraméter”).

18.37. Tétel. *Legyen $h : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Tegyük fel, hogy $\partial_2 h$ létezik és folytonos $[a,b] \times [c,d]$-n. Ekkor a $H : [c,d] \to \mathbb{R}$,*

$$H(y) := \int_a^b h(x,y)\,dx$$

függvény differenciálható (c,d)-n és minden $y \in (c,d)$ esetén

$$H'(y) = \int_a^b \partial_2 h(x,y)\,dx.$$

Bizonyítás. Legyen $y \in (c,d)$ tetszőleges. Ekkor $\forall s \in (c,d),\ s \neq y$ esetén

$$\begin{aligned}
&\frac{H(s)-H(y)}{s-y} - \int_a^b \partial_2 h(x,y)\,dx = \\
&= \frac{1}{s-y}\left(\int_a^b h(x,s)\,dx - \int_a^b h(x,y)\,dx\right) - \int_a^b \partial_2 h(x,y)\,dx \\
&= \frac{1}{s-y}\int_a^b (h(x,s)-h(x,y))\,dx - \int_a^b \partial_2 h(x,y)\,dx \\
&= \frac{1}{s-y}\int_a^b \partial_2 h(x,\eta)(s-y)\,dx - \int_a^b \partial_2 h(x,y)\,dx \\
&= \int_a^b (\partial_2 h(x,\eta) - \partial_2 h(x,y))\,dx,
\end{aligned}$$

ahol az utolsó előtti sorban alkalmaztuk a 6.34 Lagrange-féle középértéktételt h-ra a 2. változóban, $\eta \in (s,y)$ vagy $\eta \in (y,s)$ (és η valójában még x-től is függ, de ennek a továbbiakban nem lesz szerepe). Mivel $\partial_2 h$ folytonos $[a,b] \times [c,d]$-n, így a 11.18 Tétel miatt egyenletesen is folytonos. Ezért $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, hogy $\forall (x,s),(x,y) \in [a,b] \times [c,d]$, amelyre

$$|(x,s)-(x,y)| = |s-y| < \delta,$$

teljesül, hogy $|\partial_2 h(x,s) - \partial_2 h(x,y)| < \varepsilon$. Mivel η az y és s között van, így $|\eta - y| < \delta$ is fennáll, amiből

$$|\partial_2 h(x,\eta) - \partial_2 h(x,y)| < \varepsilon$$

is következik.
Legyen $s \in (c,d),\ s \neq y$ olyan, hogy $|s-y| < \delta$. Ekkor a fenti egyenlőségből

$$\left|\frac{H(s)-H(y)}{s-y} - \int_a^b \partial_2 h(x,y)\,dx\right| \le \int_a^b |\partial_2 h(x,\eta) - \partial_2 h(x,y)|\,dx < \int_a^b \varepsilon\,dx = \varepsilon(b-a).$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $\exists \lim_{s\to y} \frac{H(s)-H(y)}{s-y}$ és

$$H'(y) = \lim_{s\to y} \frac{H(s)-H(y)}{s-y} = \int_a^b \partial_2 h(x,y)\,dx.$$

□

Ezt a tételt a „paraméteres integrál deriválása” néven szokták emlegetni, és formálisan azt mondja, hogy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_a^b h(x,y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\,dx,$$

azaz kellően sima függvény esetén az integrál paraméter szerinti deriválását az integrál alatt is el lehet végezni („be lehet deriválni” az integráljel mögé).

A paraméteres integrál deriválásáról szóló tételnek számos alkalmazása van, többek között vektormező primitív függvénye létezésének bizonyításában. Mielőtt erre rátérnénk, egy másik alkalmazást mutatunk.

18.38. Példa. Igazoljuk, hogy

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\,dx = \ln 2.$$

(Ld. a 13.23 Példát!)
Legyen

$$H(y) := \int_0^1 \frac{x^y-1}{\ln x}\,dx, \quad y \in [0,1].$$

Bár a $h(x,y) = \frac{x^y-1}{\ln x}$ függvény nem folytonos $[0,1]\times[0,1]$-en (de integrálható, mert az origó kivételével folytonos), továbbá $\partial_2 h(x,y) = x^y$ ugyancsak nem folytonos (de integrálható), ennek ellenére a 18.37 Tétel alkalmazható (ezt nem bizonyítjuk). Ezért

$$H'(y) = \int_0^1 x^y\,dx = \left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1 = \frac{1}{y+1}.$$

Így $H(y) = \ln(y+1) + c$ valamely $c \in \mathbb{R}$ számra. Azonban

$$H(0) = \int_0^1 \frac{1-1}{\ln x}\,dx = 0,$$

így $c = 0$ kell legyen. Tehát $H(y) = \ln(y+1)$, amiből a keresett integrál értéke $\ln 2$.

18.39. Feladat. Mutassuk meg, hogy

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

(Ld. a 7.80 Példát!)
Ebben az esetben célszerű a

$$H(y) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-xy}\frac{\sin x}{x}, \quad y \geq 0$$

paraméteres integrál bevezetése.

18.5.2. Folytonosan differenciálható függvény csillagszerű halmazon

Most a korábban belátott a 18.31 Tétel tétel megfordítását fogjuk igazolni. Ebben meggondoltuk, hogy ha $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ differenciálható, és f-nek létezik $F : \Omega \to \mathbb{R}$ primitív függvénye, akkor

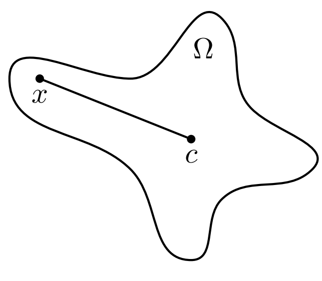
$$\partial_i f_j(x) = \partial_j f_i(x), \quad \forall i, j = 1, \ldots, p,\ \forall x \in \Omega. \tag{18.8}$$

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy ha Ω *csillagszerű* és f folytonosan differenciálható Ω-n, akkor a fenti (18.8) feltételből következik, hogy f-nek van primitív függvénye.

18.40. Definíció. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^p$. Az Ω halmaz *csillagszerű*, ha létezik olyan $c \in \Omega$ pont, hogy minden $x \in \Omega$ esetén

$$[c, x] := \{c + t(x - c) \in \mathbb{R}^p : t \in [0, 1]\} \subset \Omega$$

(a c pontból az Ω minden pontjához el lehet „látni” Ω-ban… Ld. a 18.10. ábrát.).



18.10. ábra. Csillagszerű halmaz

18.41. *Megjegyzés.* Ha Ω konvex, akkor bármely pontjára nézve csillagszerű (ld. a 15.61 Definíciót).

18.42. Tétel. *Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ csillagszerű nyílt halmaz. Legyen $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható, vagyis f differenciálható és minden $i, j = 1, 2, \dots, p$ esetén $\partial_i f_j$ folytonos Ω-n. Ekkor ekvivalensek:*

1. *Minden $x \in \Omega$ esetén*

$$\partial_i f_j(x) = \partial_j f_i(x), \quad \forall i, j = 1, \dots, p,$$

azaz $f'(x) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ szimmetrikus mátrix.

2. *f-nek létezik primitív függvénye Ω-n, vagyis létezik olyan $F : \Omega \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, melyre*

$$\partial_j F(x) = f_j(x), \quad \forall j = 1, \dots, p, \forall x \in \Omega.$$

Bizonyítás. 1. $\Rightarrow$ 2. Legyen $x \in \Omega,\ x \neq c$ tetszőleges. Legyen az a pontot x-szel összekötő görbe

$$\gamma_{c,x}(t) := c + t(x - c) \in \Omega,\ t \in [0, 1].$$

A $\gamma_{c,x}$ görbén vett vonalintegrál legyen az F függvény x-beli értéke, azaz definiálja az $F : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényt

$$F(x) := \int_{\gamma_{c,x}} f, \quad x \in \Omega.$$

Ekkor a 18.22 Tétel alapján

$$F(x) = \int_0^1 \langle f(c + t(x - c)), x - c\rangle \, dt,$$

mivel $\gamma'_{c,x}(t) = x - c$. Megmutatjuk, hogy F primitív függvénye az f-nek. Legyen $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ tetszőleges index. Ekkor minden $x \in \Omega$ esetén

$$\partial_j F(x) = \partial_j \int_0^1 \langle f(c + t(x - c)), x - c\rangle \, dt = \partial_j \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^p f_i(c + t(x - c))(x_i - c_i) \right) dt.$$

Most alkalmazzuk a paraméteres integrál deriválásáról szóló 18.37 Tételt. A „paraméter” most x_j, a j-edik változó. Így folytatva a számolást:

$$\partial_j F(x) = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^p \{\partial_j f_i(c + t(x - c)) \cdot t\} \cdot (x_i - c_i) + f_j(c + t(x - c)) \cdot 1 \right) dt,$$

hiszen ha $i \neq j$, akkor $\partial_j(x_i - c_i) = 0$ és $\partial_j(x_j - c_j) = 1$. Most használjuk ki, hogy $\partial_i f_j = \partial_j f_i$. Így kapjuk, hogy

$$\partial_j F(x) = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{p} \{\partial_i f_j(c + t(x-c)) \cdot t\} \cdot (x_i - c_i) + f_j(c + t(x-c)) \right) dt. \tag{18.9}$$

Tekintsük a

$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \Phi(t) := f_j(c + t(x-c)) \cdot t$$

függvényt! A feltevések miatt Φ differenciálható (mivel f_j az), és a kompozíciófüggvény deriválási szabálya alapján

$$\begin{aligned}\Phi'(t) &= \langle f_j'(c + t(x-c)), x - c\rangle \cdot t + f_j(c + t(x-c)) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \partial_i f_j(c + t(x-c)) \cdot t \cdot (x_i - c_i) + f_j(c + t(x-c)).\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a (18.9) integrál alatt éppen $\Phi'(t)$ áll. Ezért

$$\partial_j F(x) = \int_0^1 \Phi'(t)\, dt = [\Phi(t)]_0^1 = \Phi(1) - \Phi(0) = f_j(c + x - c) - 0 = f_j(x),$$

tehát $\partial_j F(x) = f_j(x)$. Mivel f_j folytonos Ω-n, ezért $\partial_j F$ folytonos minden j-re, amiből már következik, hogy F differenciálható. Így valóban F az f primitív függvénye.
2. $\Rightarrow$ 1. Az állítás a már bizonyított 18.31 Tétel. $\square$

18.43. *Megjegyzés.* Megjegyezzük, hogy az előbbi tételre is érvényes a 18.36 Megjegyzés. Vagyis ha f több csillagszerű halmazon van értelmezve, akkor F-et komponensenként konstruálhatjuk meg.

18.6. A Newton–Leibniz-tétel további általánosításai

Láttuk, hogy a 18.26 Tétel a Riemann-integrál elméletéből ismeretes Newton–Leibniz-tétel általánosítása vonalintegrálra. Ebben a fejezetben olyan, a differenciálgeometriában és a fizikában fontos szerepet játszó összefüggéseket ismertetünk (bizonyítás nélkül), melyek szintén felfoghatók mint a Newton–Leibniz-tétel általánosításai. A 18.50 Green-tétel tulajdonképpen a Newton–Leibniz-tétel kétváltozós variánsa. A háromváltozós esetnek pedig fontos következménye a 18.61 Gauss–Osztrogradszkij és a 18.62 Stokes-tétel.

18.6.1. Ívhossz szerinti vonalintegrál

Motiváció
Tegyük fel, hogy a $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ görbe egy kötelet paraméterez, amelynek sűrűségfüggvénye ρ. Kérdés, hogy mennyi ekkor a kötél tömege?
A tömeget közelítőleg megadhatjuk úgy, hogy vesszük a kötél egy beírt poligonját, majd minden egyes szakaszon konstans sűrűséget feltételezve az alábbi közelítőösszeget nyerjük:

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(c_i) \cdot |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}|.$$

A felosztás finomításával várhatóan megkapjuk a kötél tömegét.

18.44. Definíció. Legyen $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ görbe, $f : \mathcal{R}(\gamma) \to \mathbb{R}(!)$. Azt mondjuk, hogy az *$f$ ívhossz szerinti vonalintegrálja a γ görbe mentén* $I \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik az $[a, b]$ intervallumnak olyan $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ felosztása és ehhez $t_{i-1} < c_i < t_i$, $i = 1, \ldots, n$ számok, melyekre

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\gamma(c_i)) \cdot |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| \right| < \varepsilon.$$

Jelölés:

$$I = \int_\gamma f \, ds.$$

A következő állítás a 18.22 Tétel megfelelője ívhossz szerinti vonalintegrálra.

18.45. Állítás. *Legyen $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^p$ görbe differenciálható és minden $j = 1, \ldots, p$ esetén $\gamma_j' \in R[a, b]$ (pl. γ folytonosan differenciálható), továbbá $f : \mathcal{R}(\gamma) \to \mathbb{R}$ folytonos. Ekkor*

$$\int_\gamma f \, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)| \, dt. \tag{18.10}$$

18.46. *Megjegyzés.* A képletből érthetővé válik az ívhossz szerinti vonalintegrál elnevezés. A görbe ívhosszfüggvénye a-tól x-ig

$$s(x) = \int_a^x |\gamma'(t)| \, dt.$$

A ds kifejezés azt jelenti, hogy „vegyük az s deriváltját”, így

$$\int_\gamma f \, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot |\gamma'(t)| \, dt.$$

18.47. Példa. Az ívhossz szerinti vonalintegrál fontosabb alkalmazásai a következők.

1. Ha f tömeg-sűrűségfüggvény, akkor $\int_\gamma f\,ds$ a tömeg.

2. Ha f súrlódási erő (amely iránytól független, ezért skalár), akkor $\int_\gamma f\,ds$ a súrlódási erő munkája.

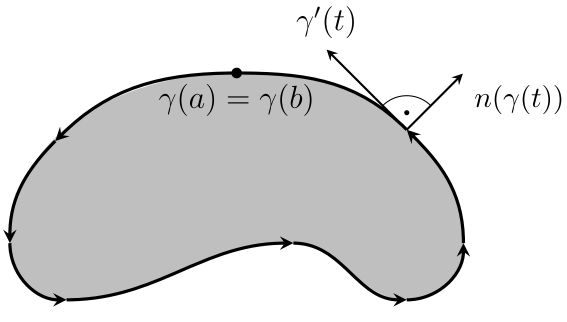
3. Súlypontszámítás: ha $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^p$ homogén tömegeloszlású görbe (azaz bármely ívének tömege arányos az ívhosszával, ahol az arányossági tényező adott), akkor a görbe súlypontjának koordinátái
$$\left(\frac{1}{s(\gamma)}\int_\gamma x_1\,ds, \dots, \frac{1}{s(\gamma)}\int_\gamma x_p\,ds\right).$$

18.6.2. Green tétele

A Green tétele arról szól, hogy egy vektormező divergenciájának egy zárt görbe által meghatározott tartományon vett integrálja megegyezik a vektormező pereme merőleges irányú deriváltjának ívhossz szerinti vonalintegráljával. A tétel pontos megfogalmazásához szükség van néhány olyan fogalom bevezetésére, amelyek precíz definíciója mélyebb előkészületet igényelne. Mi ezért megelégszünk a szemléletes magyarázattal.

18.48. Definíció. A $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *egyszerű zárt (sík)görbe*, ha $\gamma\,|_{[a,b)}$ injektív és $\gamma(a) = \gamma(b)$.

18.49. *Megjegyzés.* Egy egyszerű zárt (sík)görbére tehát úgy gondolhatunk, mint egy önmagát nem metsző zárt görbére. Ekkor szemléletesen világos, hogy a görbe két részre osztja a síkot: egy (korlátos) „belső" és egy (nem korlátos) „külső" tartományra. Ennek precíz bizonyítása azonban egyáltalán nem triviális, ez a híres *Jordan-görbetétel.*



18.11. ábra. Egyszerű zárt görbe, irányítás, normálvektor

Ezentúl tehát beszélhetünk egy egyszerű zárt (sík)görbe által határolt tartományról. Ennek segítségével pedig beszélhetünk arról, hogy egy egyszerű zárt görbe *pozitív irányítású*, mégpedig akkor, ha a görbét „bejárva a belső tartomány mindig a bal oldalon van".

Végül értelmezzük a tartomány *külső normálvektorát*, amely a perem adott pontjába húzott érintőre merőleges és kifelé mutató egységvektor. Mivel az érintő éppen a $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))$ vektor, így ennek negatív irányú 90°-al való elforgatottja $(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))$. Ezt leosztva a hosszával megkapjuk a külső normálvektort:

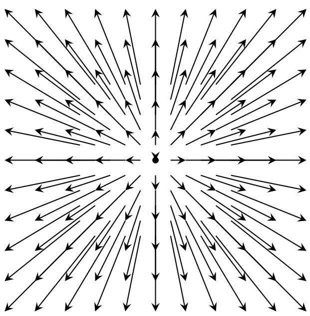
$$n = n_\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \quad n(t) = \frac{1}{|\gamma'(t)|}\left(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t)\right).$$

Ennyi előkészület után készen állunk Green tételének kimondására.

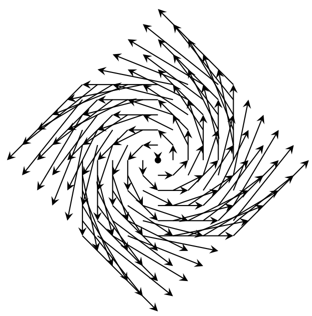
18.50. Tétel (Green)**.** *Legyen $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ pozitív irányítású egyszerű zárt síkgörbe, mely véges sok folytonosan differenciálható ívből áll. Jelölje Ω a γ által határolt tartományt. Ekkor tetszőleges $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható vektormező esetén*

$$\int_\gamma \langle f, n\rangle\, ds = \int_\Omega (\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2). \tag{18.11}$$

18.51. Példa. A $\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2$ kifejezést szokás f *divergenciájának* nevezni és div$f$-el jelölni. Ez fizikailag az f vektormező (amelyre gondolhatunk úgy mint hőmérséklet vagy folyadék áramvonalaira) forrásaira és nyelőire utal (pozitív, ha az adott pont forrás, és negatív, ha nyelő). Például, az $f(x,y) = (x,y)$ vektormező (lásd a 18.12. ábrát) divergenciája minden pontban 2, és jól látható az origóbeli forrás. Az $f(x,y) = (-x,y)$ vektormező divergenciája mindenhol 0 (röviden *divergenciamentes*): jól látható a 18.13. ábrán, hogy ebben a mezőben forgás van.



18.12. ábra. Az $f(x,y) = (x,y)$ vektormező, div $f = 2$



18.13. ábra. Az $f(x,y) = (-y,x)$ vektormező, div $f = 0$

A (18.11) formula jobb oldalán az $\langle f, n\rangle$ a vektormezőnek a normálvektorra eső komponense. Ezek alapján a 18.50 Green-tétel szemléletesen úgy fogalmazható, hogy a tartományban keletkező és elnyelődő összanyagmennyiség megegyezik a peremen áthaladó összanyagmennyiséggel. Egy dimenzióban ez valóban a 7.53 Newton–Leibniz-tétel. Ugyanis, az utóbbi arról szól, hogy egy f' függvény $[a,b]$ intervallumon vett Riemann-integrálja egyenlő $f(b) - f(a)$-val. Nyilván nevezhetjük az 1 vektort (számot) az $[a,b]$

intervallum b pontjában vett külső normálisának, a -1 vektort pedig az a pontban vett külső normálisának, és így $f(b) - f(a) = f(b) \cdot n(b) + f(a) \cdot n(a) = \langle f, n \rangle$, továbbá $\mathrm{div} f = f'$.

A 18.45 Tétel szerint

$$\int_\gamma \langle f, n \rangle \, ds = \int_a^b \langle (f_1(\gamma(t)), f_2(\gamma(t))), \frac{(\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))}{|\gamma'(t)|} \rangle \cdot |\gamma'(t)| \, dt$$
$$= \int_a^b f_1(\gamma(t)) \cdot \gamma_2'(t) \, dt - \int_a^b f_1(\gamma(t)) \cdot \gamma_1'(t) \, dt.$$

Speciálisan $f(x, y) = (x, 0)$ és $f(x, y) = (0, y)$ választással a (18.11) egyenlőségből kapjuk, hogy

$$\int_\Omega 1 = \int_a^b \gamma_1(t) \cdot \gamma_2'(t) \, dt, \qquad \int_\Omega 1 = -\int_a^b \gamma_2(t) \cdot \gamma_1'(t) \, dt.$$

Mivel $\int_\Omega 1 = m(\Omega)$ az Ω tartomány területe (vagyis Jordan-mértéke – ez bizonyítható, hogy létezik), ezért azt kaptuk, hogy egy egyszerű zárt síkgörbe által határolt tartomány területét vonalintegrál segítségével is felírhatjuk.

18.52. Tétel. *A 18.50 Green-tétel feltételei mellett*

$$\begin{aligned} m(\Omega) &= \int_a^b \gamma_1(t) \cdot \gamma_2'(t) \, dt = -\int_a^b \gamma_2(t) \cdot \gamma_1'(t) \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \left(\gamma_1(t) \cdot \gamma_2'(t) - \gamma_2(t) \cdot \gamma_1'(t) \right) dt. \end{aligned} \tag{18.12}$$

18.53. Példa. Az egységkörlap területe megkapható a következő módon. Legyen $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ az az egyszerű zárt síkgörbe, mely az Ω-val jelölt egységkörlapot határolja. A (18.12) formula alapján

$$m(\Omega) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - (-\sin^2 t)) \, dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 \, dt = \pi.$$

18.6.3. Felület, felszín

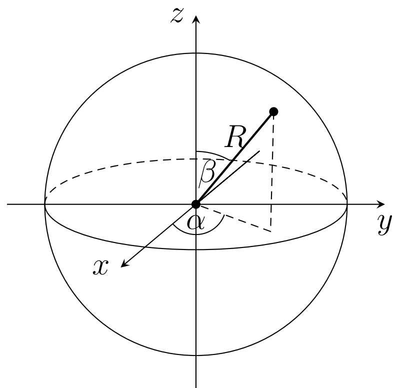
A felületet tekinthetjük a görbe kétváltozós általánosításának.

18.54. Definíció. Legyen $A \subset \mathbb{R}^2$ mérhető. A $\gamma : A \to \mathbb{R}^p$ leképezés $\mathbb{R}^p$-beli *(paraméterezett) felület*. A felület *folytonos/(folytonosan) differenciálható*, ha γ az. Az A halmazt szokás *paramétertartomány*nak nevezni.
Speciális felület: $\gamma : A \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(x, y) = (x, y, f(x, y))$, ahol $f : A \to \mathbb{R}$ függvény. Ekkor $\mathcal{R}(\gamma) = \mathrm{graph}(f)$.

18.55. Példa (Gömbfelület paraméterezése)**.**

$$\gamma : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(\alpha, \beta) = (R \sin\beta \cos\alpha, R \sin\beta \sin\alpha, R \cos\beta), \qquad (18.13)$$

lásd a 18.14. ábrát. Itt α az adott ponthoz tartozó helyvektor xy síkra való vetületének az xy síkbeli irányszöge, β pedig az adott pont helyvektorának a z tengellyel bezárt szöge.



$$\gamma\colon [0, 2\pi] \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^2,$$
$$\gamma(\alpha, \beta) = (R \sin\beta \cos\alpha, R \sin\beta \sin\alpha, R \cos\alpha)$$

18.14. ábra. Gömbfelület paraméterezése

A felület felszínét egy felületi integrállal definiáljuk. A képlet hasonlítani fog a folytonosan differenciálható görbe ívhosszára vonatkozó (18.2) formulára. Bár a szemléletünk azt sugallná, hogy – a görbék beírt töröttvonaljainak analógiájára – a felszínt megkaphatjuk a felületbe írt sokszöglapokból álló felületek felszíneinek szuprémumaként, ám ez nem igaz. Hermann Schwarz például megmutatta, hogy egy korlátos hengerbe beírható tetszőlegesen nagy felszínű, csupán háromszöglapokból álló felület. A felszínt ezért egy integrál segítségével definiáljuk. Szemléletesen, tekintjük a paramétertartomány egy elég finom (h élhosszú) rácsfelbontását, és a rácskockák képeit a felületen. A kapott kis felületdarabokat a parciális deriváltvektorok h-szorosai által kifeszített érintő paralelogrammákkal közelíthetjük. A felszínt ekkor a paralelogrammák területösszegével közelítjük, amely egy integrál közelítőösszege lesz, ld. a 18.15. ábrát.

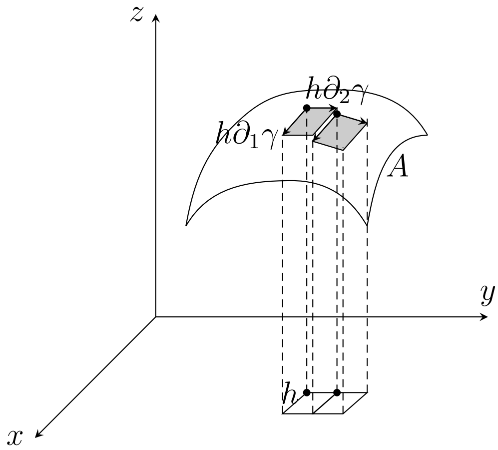
18.56. Definíció. Legyen $A \subset \mathbb{R}^2$ mérhető és $\gamma : A \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható felület. Azt mondjuk, hogy a γ *felszíne létezik és értéke*

$$\int_A |\partial_1\gamma \times \partial_2\gamma| \,,$$

ha a $|\partial_1\gamma \times \partial_2\gamma|$ integrálható A-n, ahol

$$|a \times b| = |a| \cdot |b| \cdot \sin\alpha = \sqrt{|a|^2 \cdot |b|^2 - \langle a, b\rangle^2}, \quad a, b \in \mathbb{R}^p$$

az a és b vektorok által kifeszített paralelogramma területe (α a közbezárt szögük).



18.15. ábra. Felszín közelítése érintő paralelogrammákkal

18.57. Példa (Gömb felszíne)**.** A (18.13) paraméterezés esetén

$$\begin{aligned}|\partial_1\gamma \times \partial_2\gamma| &= |(-R\sin\beta\sin\alpha, R\sin\beta\cos\alpha, 0) \times (R\cos\beta\cos\alpha, R\cos\beta\sin\alpha, -R\sin\beta)| \\ &= \sqrt{R^4\sin^2\beta - 0} = R^2|\sin\beta|.\end{aligned}$$

Így

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |\partial_1\gamma \times \partial_2\gamma|\, d\beta d\alpha = 2\pi R^2 \int_0^{\pi} |\sin\beta|\, d\beta = 2\pi R^2\left[-\cos\beta\right]_0^{\pi} = 4R^2\pi.$$

18.58. Állítás. *Legyen $A \subset \mathbb{R}^2$ mérhető, zárt halmaz és $f : A \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható. Ekkor f grafikonjának felszíne*

$$F(\mathrm{graph}(f)) = \int_A \sqrt{1 + (\partial_1 f)^2 + (\partial_2 f)^2}.$$

Bizonyítás. Legyen $\gamma : A \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(x,y) = (x, y, f(x,y))$ a graph(f)-et paraméterező felület. Ekkor $\partial_1\gamma = (1, 0, \partial_1 f)$, $\partial_2\gamma = (0, 1, \partial_2 f)$. Így

$$|\partial_1\gamma \times \partial_2\gamma| = \sqrt{(1 + (\partial_1 f)^2)(1 + (\partial_2 f)^2) - (\partial_1 f)^2(\partial_2 f)^2} = \sqrt{1 + (\partial_1 f)^2 + (\partial_2 f)^2},$$

amiből az állítás a 18.56 Definíció alapján adódik. □

18.59. Példa (Félgömb felszíne)**.** A R sugarú félgömb felülete tekinhető az

$$f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \le R^2$$

függvény grafikonjának. Így az előbbi állítás alapján a felszíne:

$$\begin{aligned}\int_{B((0,0),R)} \sqrt{1+(\partial_1 f)^2+(\partial_2 f)^2} &= \int_{B((0,0),R)} \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{R^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^R \sqrt{1+\frac{r^2}{R^2-r^2}}\cdot r\,dr\,d\varphi \\ &= 2\pi\int_0^R \frac{R\cdot r}{\sqrt{R^2-r^2}}\,dr \\ &= 2\pi R\left[-\sqrt{R^2-r^2}\right]_0^R = 2R^2\pi,\end{aligned}$$

ahol a 2. sorban az $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ polártranszformációt alkalmaztuk, ld. a 16.18 Példát.

18.6.4. Integráltételek három dimenzióban

Egy felületen (egész pontosan, annak értékkészletén) értelmezett valós függvény felszíni integrálját a felület felszínéhez hasonlóan nem közelítő összegekkel, hanem egy területi integrállal definiáljuk. A formula az ívhossz szerinti integrálra vonatkozó (18.10) formula analógja.

18.60. Definíció. Legyen $A \subset \mathbb{R}^2$ mérhető, $\gamma : A \to \mathbb{R}^p$ folytonosan differenciálható felület és $f : \mathcal{R}(\gamma) \to \mathbb{R}$. Az f *felszíni integrálja*

$$\int_A f\,dF = \int_A (f\circ\gamma)\cdot|\partial_1\gamma \times \partial_2\gamma|\,,$$

ha a jobb oldali integrál létezik.

Az alábbi két tétel alapvető fontosságú a fizikában, ezen belül is az elektrodinamikában és a folyadékáramlások elméletében. Egy $K \subset \mathbb{R}^3$ korlátos, sima határral rendelkező halmaz esetén az $n(x) \in \mathbb{R}^3$ az $x \in \partial K$ pontban a ∂K érintősíkjára merőleges, K-ból kifelé mutató egységvektort jelöli: a K ún. *külső normálisát.*

18.61. Tétel (Gauss–Osztrogradszkij)**.** *Tegyük fel, hogy a korlátos $K \subset \mathbb{R}^3$ halmaz ∂K határa véges sok, folytonosan differenciálható felület képhalmazának egymáshoz csatolt uniójából áll.*
Ha az $f = (f_1, f_2, f_3) : \overline{K} \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható, akkor

$$\int_{\partial K} \langle f, n\rangle\,dF = \int_K \mathrm{div} f,$$

ahol

$$\mathrm{div} f = \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3$$

az f vektormező divergenciája.

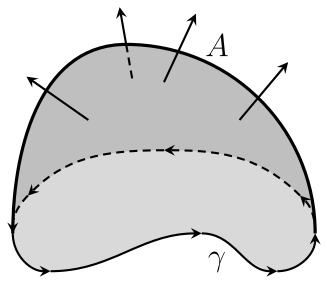
18.62. Tétel (Stokes)**.** *Legyen $A \subset \mathbb{R}^3$ felület, amelyet a véges sok folytonosan differenciálható ívből álló γ egyszerű, zárt görbe határol, és legyen n a felület külső normálvektora. Ekkor*

$$\int_A \langle \operatorname{rot} f, n \rangle = \int_\gamma f,$$

ahol

$$\operatorname{rot} f = (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2, \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3, \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)$$

az f vektormező rotációja.



18.16. ábra. Irányított egyszerű zárt görbe által határolt felület és „külső normális”

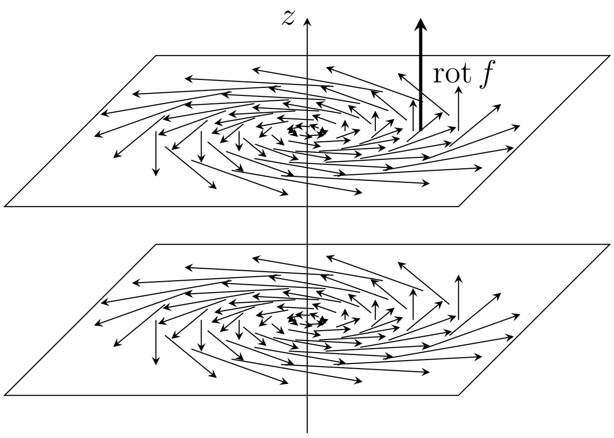
(Egy nem zárt felület normálvektorának és határoló görbéjének megfelelő irányítása nehéz fogalom, ezért az egyszerűség kedvéért gondoljunk a 18.16. ábrán látható „sapkaszerű” felületre, és irányításra.)

18.63. Példa. Szemléletesen egy vektormező *rotációjá*nak (amely ugyancsak vektormező!) iránya az adott pontbeli forgás tengelyét, a nagysága pedig a forrás szögsebességének kétszeresét adja meg. Képzeljük el például, hogy a vektormező folyadékáramlást ír le, és egy adott pontba egy kicsiny falevelet helyezünk. Ekkor a falevél elkezd valamilyen tengely körül forogni, ezt adja meg a rotációvektor.
Tekintsük például az $f(x, y, z) = (-y, x, z)$ vektormezőt, lásd a 18.17. ábrát! Ekkor $\operatorname{rot} f = (0, 0, 2)$. Szemléletünk is hasonlót sugall, hiszen jól láthatóan a vektormező az xy síkkal párhuzamos egységnyi szögsebességű síkbeli forgásokat ír le, amelyek tengelye a z tengely.

18.64. *Megjegyzés.* A rotáció képlete alapján világos, hogy egy (háromdimenziós) vektormező keresztben vett parciális deriváltjainak egyenlősége azt jelenti, hogy a rotációja 0 (röviden *rotációmentes*). A potenciál létezésre vonatkozó korábbi 18.42 Tételünket tehát úgy is fogalmazhatjuk, hogy folytonosan differenciálható rotációmentes vektormezőnek csillagszerű tartományon létezik primitív függvénye.

18.65. *Megjegyzés.* Ha bevezetjük a formális $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ ún. *nablavektor*t, akkor egy könnyen megjegyezhető képletet kapunk háromdimenziós vektormező divergenciájára és rotációjára:

$$\operatorname{div} f = \langle \nabla, f \rangle, \quad \operatorname{rot} f = \nabla \times f.$$



18.17. ábra. Az $f(x, y, z) = (-y, x, z)$ vektormező és rotációja rot $f = (0, 0, 2z)$

Tárgymutató

Irodalomjegyzék

[Batkai] Bátkai A., *Hatványsorok, függvénysorok.* elektronikus jegyzet. http://www.cs.elte.hu/~batka/oktatas/hatvanysorok.pdf

[LTS07] Laczkovich M., T. Sós V., *Analízis II.* Nemzeti Tankönyvkiadó, 2007.

[MFS] Mezei I., Faragó I., Simon P., *Bevezetés az analízisbe.* elektronikus jegyzet. http://www.cs.elte.hu/~simonp/jegyzet/jegyzet1.pdf