PRÓBAVIZSGA - Matematika BSc, Analízis I., 2024. január

- A tesztben tetszőleges I intervallum esetén az $f : I \to \mathbb{R}$ jelölés azt is jelenti, hogy $\mathcal{D}_f = I$.

1. Tudjuk, hogy az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ sorozat két részsorozatára $a_0, a_3, a_6, \dots \to A$ és $a_0, a_4, a_8, \dots \to B$ teljesül. Mi az összefüggés ekkor az a következő kijelentések között?

   (i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens (ii) $a_0, a_5, a_{10}, \dots$ konvergens (iii) $A = B$

   (a) csak (i)⇒(ii) (b) csak (i)⇒(iii) (c) csak (iii)⇐(i)⇒(ii)

   (d) csak (i)⇒(ii)⇒(iii) (e) csak (i)⇒(ii)⇔(iii)

2. A következő állítások közül melyik a tagadása annak, hogy a $g : [0,2] \to \mathbb{R}$ függvényre $\lim_1 g = 5$ teljesül?

   (i) $\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,2] : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 1$, de $(g(a_n))_{n\in\mathbb{N}} \not\to 5$

   (ii) $\exists \epsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists b_\delta : |1 - b_\delta| < \delta$, de $|g(b_\delta) - 5| > \epsilon$.

   (a) egyik sem (b) csak (i) (c) csak (ii) (d) mindkettő (e) nem lehet eldönteni

3. Valaki az $[1,2]$ intervallumon értelmezett $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ alakú függvényre akarja alkalmazni a Lagrange-középértéktételt. Eszerint van olyan $x \in (1,2)$, hogy $x \cdot f'(x) = f(x) + A \cdot x^2$, ahol

   (a) $\frac{f(2)}{2} - f(1)$ (b) $2 \cdot f(2) - f(1)$ (c) $f(2) - f(1)$ (d) $f(2) - \frac{f(1)}{2}$ (e) $f(2) - 2 \cdot f(1)$

4. Az $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ függvényre vonatkozó következő kijelentések közül melyikből következik, hogy f deriválható 2-ben?

   (i) $\exists\ A \in \mathbb{R}^+\ \forall\ \delta \in [0,1] : f(2+\delta) = f(2) + A \cdot \sqrt{\delta}$

   (ii) $\exists\ A, B \in \mathbb{R}^+\ \forall\ \delta \in [0,1] : f(2+\delta) = f(2) + A \cdot \sqrt{\delta} + B \cdot \sqrt{\delta^3}$

   (iii) $\exists\ A \in \mathbb{R}^+\ \forall\ \delta \in [0,1] : f(2+\delta) = f(2) - A \cdot \sqrt{\delta^3}$

   (a) csak (i)-ből (b) csak (ii)-ből (c) csak (iii)-ből

   (d) csak (ii)-ből és (iii)-ből (e) csak (i)-ből és (ii)-ből

5. Legyen $H \subset \mathbb{R}$ korlátos halmaz; felső korlátainak halmazát $\mathcal{F}$, alsó korlátainak halmazát $\mathcal{A}$ jelöli. Hány teljesül a következő állítások közül?

   (i) létezik $\min \mathcal{F}$ (ii) létezik $\inf \mathcal{F}$ (iii) létezik $\max \mathcal{A}$ (iv) létezik $\sup \mathcal{A}$

   (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

6. Egy $g : (-1,1] \to \mathbb{R}$ függvény folytonos. A következők közül hány lehet (nem egyszerre) g értékkészlete?

   (i) $[-1,1]$ (ii) $(-\infty, 0]$ (iii) $[1, \infty)$ (iv) $[2,5)$

   (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) (e) 4

7. Legyen g az értelmezési tartományán folytonos valós függvény. Milyen következtetés teljesül ekkor biztosan?

   (i) $\mathcal{D}_g$ intervallum $\Rightarrow$ $\mathcal{R}_g$ intervallum

   (ii) $\mathcal{D}_g$ korlátos zárt intervallum $\Rightarrow$ $\mathcal{R}_g$ korlátos zárt intervallum

   (iii) $\mathcal{D}_g$ nyílt intervallum $\Rightarrow$ $\mathcal{R}_g$ nyílt intervallum

   (iv) $\mathcal{D}_g$ korlátos nyílt intervallum $\Rightarrow$ $\mathcal{R}_g$ korlátos nyílt intervallum

   (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) (e) 4

8. Tudjuk, hogy az f és g pozitív valós függvényekre $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g$, emellett $\lim\limits_a f/g = \lim\limits_a fg = \infty$. Ekkor hány igaz biztosan a következő állítások közül?

   (i) $\lim\limits_a f$ létezik (ii) $\lim\limits_a f = \infty$ (iii) $\lim\limits_a g$ létezik (iv) $\lim\limits_a g$ véges

   (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

9. Melyik állítás ekvivalens azzal, hogy az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos?

   (i) $\forall\, K \in \mathbb{R}^+ \;\exists\, n \in \mathbb{N}:\; a_n < K$

   (ii) $\forall\, K \in \mathbb{R}^+ \;\exists\, n_0 \in \mathbb{N}:\; n > n_0 \Rightarrow |a_n - a_{n_0}| < K.$

   (iii) $\forall\, K \in \mathbb{R}^+ \;\exists\, n_0 \in \mathbb{N}:\; n > n_0 \Rightarrow a_{n_0}^2 < K.$

   (a) csak (i) (b) csak (ii) (c) csak (iii) (d) egyik sem (e) mindegyik

10. Tudjuk, hogy a g valós függvényre teljesül, hogy $\forall\, \epsilon \in (0,1) \;\exists\, \delta \in (0,1):\; |3-x| < \delta \Rightarrow |g(x)| < \epsilon^2$. Mi következik ebből?

    (i) $\lim\limits_x g$ létezik (ii) g folytonos x-ben (iii) g deriválható x-ben

    (a) csak (i) (b) csak (ii) (c) csak (i) és (ii) (d) mindhárom (e) egyik sem

11. Tudjuk, hogy a $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j$ pozitív tagú sor konvergens. Hány sor konvergens ekkor mindenképpen az alábbiak közül? (Segítség, ha kell: a részletösszeg-sorozat monoton növő és korlátos tulajdonsága.)

    (i) $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{2j}$ (ii) $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j + a_{j+1}$ (iii) $\sum\limits_{j=0}^{\infty} 5a_j$ (iv) $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{j}$

    (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

12. A következő hozzárendeléssel adott függvények közül hány lesz az értelmezési tartományán egyenletesen folytonos?

    (i) $f:(0,1)\to\mathbb{R},\; f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$ (ii) $f:[0,10]\to\mathbb{R},\; f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$

    (iii) $f:[1,\infty)\to\mathbb{R},\; f(x) = x^3 - 10$ (iv) $f:[-1,1]\setminus\{0\}\to\mathbb{R},\; f(x) = \frac{1}{x^2}$

    (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4