PRÓBAVIZSGA - Matematika BSc, Analízis I., 2023. december

- A tesztben tetszőleges I intervallum esetén az $f : I \to \mathbb{R}$ jelölés azt is jelenti, hogy $\mathcal{D}_f = I$.
- A vizsgán $12 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 5 = 26$ pont szerezhető.

Tesztkérdések

1. A következő kijelentések közül melyik ekvivalens azzal, hogy az f valós függvény injektív?

   (i) $2f - 1$ injekítv (ii) $f(x) + x$ injektív (iii) f szigorúan monoton növő

   (a) csak (i) és (ii) (b) csak (i) és (iii) (c) csak (i)
   (d) csak (ii) és (iii) (e) mindhárom

2. Az $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ függvényekre vonatkozó következő kijelentések közül melyek ekvivalensek?

   (i) f folytonos (ii) f deriválható (iii) $|f|$ folytonos (iv) $|f|$ deriválható

   (a) csak (i) és (iii) (b) csak (ii) és (iv) (c) csak (i) és (iv)
   (d) az összes (e) semelyik kettő sem

3. Egy $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény esetén az alábbiak közül hány halmaz lehet $\mathcal{R}_f$? (nem egyszerre)

   (i) $[-1, 2]$ (ii) $\mathbb{R}$ (iii) $[0, \infty)$ (iv) $(0, \infty)$ (v) $(0, 1)$

   (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

4. Egy $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt akarunk a $[0, 1)$ intervallumra kiterjeszteni úgy, hogy az is mindenütt folytonos legyen. Melyik igaz a következő állítások közül?

   (i) Ehhez elegendő, hogy f korlátos.
   (ii) Ehhez elegendő, hogy f deriválható.
   (iii) Ehhez elegendő, hogy f (jobb oldali) határértéke nullában létezik.

   (a) csak (i) és (ii) (b) csak (iii) (c) csak (iii) és (ii) (d) csak (iii) és (i) (e) egyik sem

5. Tekintsük az $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 \quad x = 0 \end{cases}$ hozzárendeléssel adott függvényt. Hány állítás teljesül erre a következők közül?

   (i) $\lim\limits_{0} f$ létezik (ii) f folytonos 0-ban (iii) f deriválható 0-ban (iv) f' folytonos 0-ban.

   (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

6. Tudjuk, hogy az $f, g : (0,1) \to \mathbb{R}$ valós függvények mindenütt folytonosak, és $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ esetén $f(q) = g(q)$. Melyek igazak a következő kijelentések közül?

   (i) $f = g$ teljesül mindenhol.

   (ii) Ha korlátosak is, akkor $f = g$ teljesül mindenhol.

   (iii) Ha deriválhatók is, akkor $f = g$ teljesül mindenhol.

   (a) egyik sem (b) csak (iii) (c) csak (iii) és (ii) (d) csak (ii) és (i) (e) mindhárom

7. Tudjuk, hogy az f és g valós függvényekre $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g$, emellett $\lim_a f = \lim_a g = \infty$. Hány teljesülhet ekkor a következő állítások közül? (nyilván nem egyszerre)

   (i) $\lim_a \frac{f}{g} = 0$ (ii) $\lim_a \frac{f}{g} = 2$ (iii) $\lim_a \frac{f}{g} = -\infty$ (iv) $\lim_a \frac{f}{g}$ nem létezik

   (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) 4

8. Biztosítani akarjuk, hogy az $f^{-1} : \mathcal{R}_f \to \mathcal{D}_f$ létezzen és az $f(b)$ pontban deriválható legyen. Mely állítások igazak erre vonatkozóan?

   (i) Ehhez elegendő, hogy f monoton növő és mindenütt deriválható.

   (ii) Ehhez elegendő, hogy f deriváltja mindenütt (létezik és) pozitív.

   (iii) Ehhez elegendő, hogy f deriváltja a b pont egy környezetében pozitív.

   (a) mindhárom (b) csak (iii) (c) csak (iii) és (ii) (d) csak (ii) (e) egyik sem

9. Melyik kijelentés(ek) ekvivalens(ek) azzal, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a \in \mathbb{R}$?

   (i) $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon$

   (ii) $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \sqrt{\epsilon}$

   (iii) $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| \leq \epsilon$

   (a) mindhárom (b) csak (iii) (c) csak (iii) és (ii) (d) csak (ii) és (i) (e) csak (iii) és (i)

10. Melyik kijelentés(ek) ekvivalens(ek) azzal, hogy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$?

    (i) $\forall k \in \mathbb{N}^+\ \exists n_k \in \mathbb{N} :\ n \geq n_k \Rightarrow a_n^2 < \frac{1}{k}$

    (ii) $\forall k \in \mathbb{N}^+\ \exists n_k \in \mathbb{N} :\ n > n_k \Rightarrow |a_n| < \frac{1}{k}$

    (iii) $\forall k \in \mathbb{N}^+\ \exists n_k \in \mathbb{N} :\ n \geq n_k \Rightarrow |a_n| \leq \frac{1}{k}$

    (a) mindhárom (b) csak (iii) (c) csak (iii) és (ii) (d) csak (ii) és (i) (e) csak (iii) és (i)

11. Tudjuk, hogy az $f, g : [0,2] \to \mathbb{R}$ függvényekre g folytonos az 1 pontban, és $\lim_1 f = \infty$. Melyek igazak ekkor a következő állítások közül?

    (i) $f = g$ teljesülhet egy pont kivételével.

    (ii) Mindenképpen $f = g$ teljesül.

(iii) $f = g$ teljesülhet véges sok pont kivételével.

(a) egyik sem (b) csak (iii) (c) csak (iii) és (ii) (d) csak (ii) és (i) (e) csak (iii) és (i)

12. Tudjuk, hogy $f : [0,2] \to \mathbb{R}$. Mi ekkor az összefüggés a következő kijelentések között?

(i) $\sup\limits_{[0,2]} f = f(2)$ (ii) $\max\limits_{[0,2]} f = f(2)$ (iii) f szig. mon. növő

(a) csak (ii)$\Leftarrow$(i)$\Leftarrow$(iii) (b) csak (i)$\Leftarrow$(ii)$\Leftarrow$(iii) (c) csak (iii)$\Rightarrow$(ii) és (iii)$\Rightarrow$(i)

(d) csak (i)$\Leftrightarrow$(ii)$\Leftarrow$(iii) (e) egyik sem a többi közül

Definíciók

1. Mikor mondjuk, hogy egy valós függvény az x pontban szekvenciálisan folytonos?
2. Mondjuk ki a Cauchy-középértéktételt!

Tételek

1. Mondjuk ki és igazoljuk a Weierstraß-féle maximumelvet!
2. Mondjuk ki és igazoljuk a konvexitás a derivált monotonitásának összefüggéséről tanult állítást!