

## II. ZH matematika BSc szakosoknak analízisből, 2017. december 15.

A ZH-n semmilyen segédeszköz nem használható. Minden eredmény csak az indoklással együtt ér pontot; az előadáson, ill. a gyakorlaton tanultakra lehet hivatkozni. A 10 db feladat és részfeladat mindegyike 4-4 pontot ér.

Felhasználhatók  $a > 1$  esetén az alábbi nevezetes határértékek:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+s)}{s} = \frac{1}{\ln a}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

1. Vannak-e olyan  $A, B \subset \mathbb{R}$  halmazok, hogy valamilyen  $x$  pont egyiknek sem torlódási pontja, viszont  $A \cup B$ -nek torlódási pontja?
2. Mutassunk olyan  $f, g$  valós függvényeket, hogy  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  létezik,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  nem létezik, de  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$  létezik!
3. Igazoljuk, hogy ha  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos, és nem konstans, akkor értékkészlete végtelen sok elemet tartalmaz!
4. Van-e pozitív megoldása az  $xe^x = 5 + x^2$  egyenletnek?
5. A tanult nevezetes határértékek felhasználásával számítsuk ki (ha léteznek) az alábbi határértékeket!

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{e^x - 1} \qquad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^3}$$

6. Létezik-e ( $\mathbb{R}$ -ben) az  $\max_{x \in [3, \infty)} e^{2x}(5-x)$  érték?
7. Adjuk meg az  $a$  és  $b$  paramétereket úgy, hogy a

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} & \text{ha } x \leq 2 \\ a + b\sqrt{x} & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

hozzárendeléssel adott függvény deriválható legyen 2-ben!

8. Mely  $x$  érték esetén lesz  $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2}$ , ahol  $f$  az  $x \rightarrow e^x + x$  hozzárendeléssel adott?
9. Lipschitz-folytonos-e, illetve egyenletesen folytonos-e a  $g(x) = \sqrt[3]{x}$  hozzárendeléssel adott függvény a  $[-3, 3]$  intervallumon?

## II. ZH matematika BSc szakosoknak analízisből, 2017. december 15.

A ZH-n semmilyen segédeszköz nem használható. Minden eredmény csak az indoklással együtt ér pontot; az előadáson, ill. a gyakorlaton tanultakra lehet hivatkozni. A 10 db feladat és részfeladat mindegyike 4-4 pontot ér.

Felhasználhatók  $a > 1$  esetén az alábbi nevezetes határértékek:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+s)}{s} = \frac{1}{\ln a}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

1. Vannak-e olyan  $A, B \subset \mathbb{R}$  halmazok, hogy valamilyen  $x$  pont egyiknek sem torlódási pontja, viszont  $A \cup B$ -nek torlódási pontja?
2. Mutassunk olyan  $f, g$  valós függvényeket, hogy  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  létezik,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  nem létezik, de  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$  létezik!
3. Igazoljuk, hogy ha  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos, és nem konstans, akkor értékkészlete végtelen sok elemet tartalmaz!
4. Van-e pozitív megoldása az  $xe^x = 5 + x^2$  egyenletnek?
5. A tanult nevezetes határértékek felhasználásával számítsuk ki (ha léteznek) az alábbi határértékeket!

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{e^x - 1} \qquad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^3}$$

6. Létezik-e ( $\mathbb{R}$ -ben) az  $\max_{x \in [3, \infty)} e^{2x}(5-x)$  érték?
7. Adjuk meg az  $a$  és  $b$  paramétereket úgy, hogy a

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} & \text{ha } x \leq 2 \\ a + b\sqrt{x} & \text{ha } x > 2 \end{cases}$$

hozzárendeléssel adott függvény deriválható legyen 2-ben!

8. Mely  $x$  érték esetén lesz  $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2}$ , ahol  $f$  az  $x \rightarrow e^x + x$  hozzárendeléssel adott?
9. Lipschitz-folytonos-e, illetve egyenletesen folytonos-e a  $g(x) = \sqrt[3]{x}$  hozzárendeléssel adott függvény a  $[-3, 3]$  intervallumon?