

II. javító ZH analízisből, matematika BSc szak, 2017. december 20.

A ZH-n semmilyen segédeszköz nem használható. Minden eredmény csak az indoklással együtt ér pontot; az előadáson, ill. a gyakorlaton tanultakra lehet hivatkozni. A 10 db feladat és részfeladat mindegyike 4-4 pontot ér.

Felhasználhatók $a > 1$ esetén az alábbi nevezetes határértékek:
 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+s)}{s} = \frac{1}{\ln a}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$

1. Lehetséges-e, hogy az $A, B \subset \mathbb{R}$ halmazoknak két-két torlódási pontja van, $A \cup B$ -nek pedig három?
2. Mutassunk olyan f valós függvényt, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ nem létezik, de $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(f(x))$ létezik!
3. Van-e megoldása az $(1, \infty)$ halmazon az $5x^4 + 2^x = e^x - 4$ egyenletnek?
4. A tanult nevezetes határértékek felhasználásával számítsuk ki (ha léteznek) az alábbi határértékeket!

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x^2}{\operatorname{tg}^3 x} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\sqrt{4^x - 1}} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\ln(\cos x)}$$

5. Létezik-e (\mathbb{R} -ben) az $\max_{x \in [1, \infty)} \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$ érték?
6. Adjuk meg az a és b paramétereket úgy, hogy a

$$g(x) = \begin{cases} a + 4 \ln(1 - x) & \text{ha } x \leq 0 \\ (b - e^{2x})^2 & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

hozzárendeléssel adott függvény deriválható legyen 0-ban!

7. Felhasználva, hogy $e^0 + 0 = 1$ számítsuk ki az $f(x) = e^{\frac{x}{2}} + x^3$ hozzárendeléssel adott függvény inverzének deriváltját az $y = 1$ helyen!
8. Egyenletesen folytonos-e az $f(x) = \ln(x)$ hozzárendeléssel adott függvény a $(0, \infty)$ halmazon?