

## I. ZH matematika BSc szakosoknak analízisből, 2019. október 21.

A ZH-n semmilyen segédeszköz nem használható. Az eredmények csak indoklással együtt érnek pontot; az előadáson, ill. a gyakorlaton tanultakra lehet hivatkozni. A 10 db feladat és részfeladat mindegyike 4-4 pontot ér.

1. Igaz a következő kijelentés? Fogalmazzuk meg a tagadását!

$$\forall a \in \mathbb{R}^+ \quad \forall b \in (a, \infty) \quad \exists p, q \in \mathbb{N} : a < \frac{p^2}{q^2} < b$$

2. Igazoljuk, hogy  $\sup(A \cup B \cup C) = \max\{\sup A, \sup B, \sup C\}$  teljesül tetszőleges korlátos  $A, B, C \subset \mathbb{R}$  esetén!
3. Határozzuk meg  $f^{-1}$  ismeretében a  $2f - 3$  valós függvény inverzét feltéve, hogy  $f$  injektív!
4. Milyen  $x \in \mathbb{R}$  számokra teljesül, hogy  $\cos^2(\arcsin x) = 1 - x^2$ ?
5. Pontosán milyen esetben lesz a  $H \subset \mathbb{R}$  nemüres halmazra  $\inf H = \sup H$ ?
6. Igaz-e, hogy az  $a_n \rightarrow 0$  tulajdonság ekvivalens az alábbival?

$$\forall K \in \mathbb{N}^+ \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 : |a_n| < \frac{1}{K}$$

7. Igaz-e, hogy tetszőleges  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  sorozatra  $\limsup -a_n = -\limsup a_n$  teljesül?
8. Adjuk meg azon sorozatok határértékét, amelyeknek  $n$ -edik tagja az alábbi!

$$(a) \sqrt[2n]{3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n+1)} \quad (b) \sqrt[3]{n^3 + 1} - n \quad (c) \left( \frac{\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n} + 1} \right)^n$$

## I. ZH matematika BSc szakosoknak analízisből, 2019. október 21.

A ZH-n semmilyen segédeszköz nem használható. Az eredmények csak indoklással együtt érnek pontot; az előadáson, ill. a gyakorlaton tanultakra lehet hivatkozni. A 10 db feladat és részfeladat mindegyike 4-4 pontot ér.

1. Igaz a következő kijelentés? Fogalmazzuk meg a tagadását!

$$\forall a \in \mathbb{R}^+ \quad \forall b \in (a, \infty) \quad \exists p, q \in \mathbb{N} : a < \frac{p^2}{q^2} < b$$

2. Igazoljuk, hogy  $\sup(A \cup B \cup C) = \max\{\sup A, \sup B, \sup C\}$  teljesül tetszőleges korlátos  $A, B, C \subset \mathbb{R}$  esetén!
3. Határozzuk meg  $f^{-1}$  ismeretében a  $2f - 3$  valós függvény inverzét feltéve, hogy  $f$  injektív!
4. Milyen  $x \in \mathbb{R}$  számokra teljesül, hogy  $\cos^2(\arcsin x) = 1 - x^2$ ?
5. Pontosán milyen esetben lesz a  $H \subset \mathbb{R}$  nemüres halmazra  $\inf H = \sup H$ ?
6. Igaz-e, hogy az  $a_n \rightarrow 0$  tulajdonság ekvivalens az alábbival?

$$\forall K \in \mathbb{N}^+ \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 : |a_n| < \frac{1}{K}$$

7. Igaz-e, hogy tetszőleges  $(a_n) \subset \mathbb{R}$  sorozatra  $\limsup -a_n = -\limsup a_n$  teljesül?
8. Adjuk meg azon sorozatok határértékét, amelyeknek  $n$ -edik tagja az alábbi!

$$(a) \sqrt[2n]{3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n+1)} \quad (b) \sqrt[3]{n^3 + 1} - n \quad (c) \left( \frac{\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n} + 1} \right)^n$$