Emelt szintű kalkulus, 1. GYAKORLAT - Függvények, sorozatok I.

1. Fogalmazzuk meg az alábbi állítások tagadását! Próbáljuk minél egyszerűbben; ha lehet, tagadószó használata nélkül!
   (a) Az m egész szám páros.
   (b) Az f függvény minden valós x esetén értelmes.
   (c) Az (a_n) sorozat monoton növő.
   (d) Minden gép elromlik egyszer.
   (e) Minden virág sárga.
   (f) Minden autó legalább 1 tonna.
   (g) Van olyan kép, amit nem láttam.
   (h) Minden szakasznak (intervallumnak) van két különböző pontja.
   (i) Bármely két különböző racionális szám közt van irracionális.
   (j) Minden országban van olyan város, amelynek minden utcájában minden ház földszintes.
   (k) Ha az alma piros, akkor érett.
   (l) Ha egy függvény monoton növekedő, akkor az nem egy másodfokú polinomfüggvény.

2. Indirekt bizonyítással igazoljuk az alábbi állításokat!
   (a) A valós számok között nincs legnagyobb.
   (b) Nincs olyan természetes szám, amely minden természetes számnak többszöröse.
   (c) Minden szigorúan monoton növő függvény értékei különböző pontokban különbözők.
   (f) Ha egy m természetes számra $\sqrt{m}$ nem egész, akkor $\sqrt{m}$ irracionális.

3. Teljes indukcióval igazoljuk az alábbi állításokat és azonosságokat!
   (a) Véges sok valós szám közt van maximális.
   (b) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}$
   (c) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$
   (d) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   (e) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
   (f) $(n-1)\cdot 0.9 \geq \frac{1}{10} - \frac{1}{10^n}$
   (g) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$
   (h) $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$
   (i) $1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \ldots + n\cdot n! = (n+1)! - 1$
   (j) $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$

4. Igazoljuk, hogy tetszőleges $A, B, C \subset X$ halmazokra fennállnak az alábbiak!

   (a) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$ (b)* $A \subset B \Leftrightarrow \forall C \subset X (A \cup C \subset B \cup C)$

   (c) $(A \subset B$ és $B \subset A) \Leftrightarrow A = B$ (d) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

   (e) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (f) $(A \setminus (A \setminus B^c)) \cup B = A \cup B$, ahol $A^c = X \setminus A$

5. Határozzuk meg az alábbi halmazokat!

   (a) $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} (j, j+1]$ (b) $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (q-1, q]$ (c) $\bigcup_{s \in \mathbb{R}} s$ (d) $\bigcap_{s \in \mathbb{R}^+} [-s, s+2]$

6. Mutassunk bijekciót az alábbi halmazpárok között (azaz igazoljuk, hogy ugyannyi a számosságuk)!

   (a) $\mathbb{N}$ és $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ (b) $\mathbb{N}$ és $\mathbb{Z}$ (c) $\mathbb{Z}$ és $\{$páros számok$\}$

   (d) $(0,1)$ és $\mathbb{R}$ (e) $[0,1]$ és $\mathbb{R}$ (f) $(-1,0) \cup (1,2)$ és $\mathbb{R}$

7. Az alábbiakban megadott kompozíciófüggvényeket bontsuk (minél egyszerűbb) komponensekre, azaz adjuk meg, hogy mi lehet f és g, amennyiben $h(x) = (f \circ g)(x)$ az alábbi:

   (a) $h(x) = (x+1)^2$ (b) $h(x) = \frac{1}{1-x^2}$ (c) $h(x) = \cos^2(x-1)$ (d) $h(x) = \sqrt{\sin(x+1)}$
   (e) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ (f)* $h(x) = x^x$ (g) $h(x) = \operatorname{tg}^2 \sqrt{x}$ (h) $h(x) = \log_{10}(1 - \cos x)$.

8. Tekintsük a $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$, valamint a $\operatorname{tg}|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$ függvények inverzét, és használjuk ezekre az arc sin, illetve az arc tg jelölést!

   Értelmesek ezek? Rajzoljuk fel a grafikonjukat!

   Számítsuk ki a következő értékeket!

   arc sin 1, arc sin $-\frac{1}{2}$, arc sin 0, arc sin $\frac{\sqrt{3}}{2}$, arc tg 1, arc tg 0, arc tg $-\sqrt{3}$

9. Határozzuk meg az alábbi hozzárendeléssel megadott függvények inverzét!

   (a) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (b) $f(x) = \sqrt{5x-2}$, $\mathcal{D}(f) = [\frac{2}{5}, \infty)$

   (c) $f(x) = 1 + 2^x$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ (d) $f(x) = \log_{10}(3x^3 - 3)$, $\mathcal{D}(f) = (1, \infty)$

   (e) $f(x) = \sin \frac{x}{2}$, $\mathcal{D}(f) = [-\pi, \pi]$ (f)* $f(x) = \operatorname{tg} \frac{1}{x}$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus [-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}]$

   (g) $f(x) = e^x + e^{-x}$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}^+$ (h) $f(x) = 1 - \cos \sqrt{x}$, $\mathcal{D}(f) = [0, \pi^2]$

   (i) $f(x) = e^x - e^{-x} - 3$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$ (j) $f(x) = 3 - \operatorname{tg} x$, $\mathcal{D}(f) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$