**Emelt szintű kalkulus, 10. GYAKORLAT - Differenciálegyenletek I.**

Az 5. feladatban használjuk fel, hogy az $\dot{x}(t) = f(x(t))$ alakú feladatok megoldási módszere:
$\left[\left(\int \frac{1}{f}\right)(x(t))\right]' = \frac{1}{f(x(t))}\dot{x}(t) = 1 \Rightarrow \left(\int \frac{1}{f}\right)(x(t)) = t + C \Rightarrow x(t) = \left(\int \frac{1}{f}\right)^{-1}(t+C)$
Ugyanez formálisan:
$\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}t \Rightarrow \int \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}t = t + C$, amiből $x$ kifejezhető a $t$ segítségével (ahogy fent).

1. Felhasználva, hogy az $\dot{x}(t) = Kx(t)$ differenciálegyenlet általános megoldása $x(t) = C \cdot e^{Kt} = x(0) \cdot e^{Kt}$ alakú (ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges), oldjuk meg a következő feladatokat!
   (a) $\dot{x}(t) = 0.2 \cdot x(t),\ x(0) = 1$
   (b) $\dot{x}(t) = 0.1 \cdot x(t),\ x(1) = 2$
   (c) $\dot{x}(t) = -0.1 \cdot x(t),\ x(0) = 2$
   (d) $\dot{x}(t) = -0.2 \cdot x(t),\ x(1) = 1$
   (e) $\dot{x}(t) = 0.1 \cdot x(t),\ x(1) = x(0) + 1$
   (f) $\dot{x}(t) = -0.1 \cdot x(t),\ x(1) = 2 \cdot x(0)$

2. Tudjuk, hogy
$$\dot{x}(t) = cx(t),\ x(1) = 3,\ x(2) = 1$$
teljesül. Milyen $t$ értékre lesz elõször $x(t) \leq 0.01$?

3. Hűlési egyenlet: A környezet 20 fokos, a hűlés sebessége arányos a meleg tárgy és a környezet hőmérsékletkülönbségével. Írjuk fel és oldjuk meg általánosan az erre vonatkozó KDE-et.

4. Egy tárgy a 20 fokos környezetben 40 fokos, 3 perccel késõbb 22,5 fokos. Mikor volt 98 fokos?

5. Oldjuk meg a következő, differenciálegyenletekre vonatkozó kezdeti érték feladatokat!
   (a) $\dot{x}(t) = 2 - x(t),\ x(0) = 1$
   (b) $\dot{x}(t) = x(t) + 1,\ x(0) = 2$
   (c) $\dot{x}(t) = \frac{1}{2x(t)},\ x(0) = 1$
   (d) $\dot{x}(t) = \sqrt{x(t)},\ x(1) = 1$

Az 5. (d) feladat megoldása:
Mindkét oldalt $\sqrt{x(t)}$-vel osztva kapjuk, hogy
$\left(2\sqrt{x(t)}\right)' = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x(t)}} \cdot \dot{x}(t) = 1,$
vagyis
$2\sqrt{x(t)} = t + c,$
amelybe már $t = 1$-et és a kezdeti feltételt helyettesítve
$2 = 2\sqrt{x(1)} = 1 + c,$
azaz $c = 1$. Emiatt tehát $\sqrt{x(t)} = \frac{t+1}{2}$, azaz $x(t) = \frac{(t+1)^2}{4}$.