

Emelt szintű kalkulus, 11. GYAKORLAT - Differenciálegyenletek II.

Állandó együtthatós másodrendű $\ddot{x}(t) + a \cdot \dot{x}(t) + b \cdot x(t) = 0$ egyenlet megoldása a $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ karakterisztikus polinom gyökei alapján a következő esetszétválasztással:

- $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ esetén $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$.
- $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$ esetén $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_1 t}$.
- $\lambda_{1,2} = a \pm bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $x(t) = e^{at}(c_1 \cos(bt) + c_2 \sin(bt))$,

ahol minden esetben c_1 és c_2 tetszőleges valós konstansok.

1. Oldjuk meg a következő kezdeti érték feladatokat!

$$(a) \begin{cases} \ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) - 10x(t) = 0 \\ x(1) = 3 \\ \dot{x}(1) = 1 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} \ddot{x}(t) + \dot{x}(t) = 0 \\ x(0) = 2 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} \ddot{x}(t) + 6\dot{x}(t) + 9x(t) = 0 \\ x(0) = 5 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} \ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$$

2. Oldjuk meg a következő peremérték-feladatokat!

$$(a) \begin{cases} \ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) + 2x(t) = 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(\pi) = e^\pi \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} \ddot{x}(t) + x(t) = 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(2\pi) = 0 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} \ddot{x}(t) + x(t) = 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(\pi) = 1 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 4\ddot{x}(t) + x(t) = 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(\pi) = 1 \end{cases}$$

3. Vizsgáljuk meg a következő peremérték-feladat megoldhatóságát a $\lambda \in \mathbb{R}$ paraméter függvényében!

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \lambda x(t) = 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(\pi) = 1 \end{cases}$$

4. Jelöljük egy lengőajtónak a nyugalmi állapotához képest bezárt szögét a t időpontban $\Theta(t)$ -vel. Az ajtó lengésének dinamikáját az $I \cdot \ddot{\Theta}(t) + b \cdot \dot{\Theta}(t) + k \cdot \Theta(t) = 0$ egyenlettel modellezzük, ahol $I > 0$ az ajtó forgási tengelyéhez viszonyított tehetetlenségi nyomatéka, $b > 0$ a súrlódási tényező, továbbá $k > 0$ a rugóállandó. Tegyük fel, hogy I és k rögzített, a b súrlódási tényezőt pedig egy állítócsavarral tudjuk változtatni. Hogyan válasszuk meg b értékét úgy, hogy az ajtó ne lengjen oda-vissza (ne oszcilláljon)?