Emelt szintű kalkulus, 2. GYAKORLAT - Nevezetes függvények, határértékek

1. Igazoljuk, hogy tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ számok esetén teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek!

   (a) $|a| + |b| \geq |a + b|$ (b) $||a| - |b|| \leq |a - b|$

2. Adjuk meg az sh, ch, th, arsh, arch, arth függvények grafikonját!

3. Igazoljuk, hogy teljesülnek a következő azonosságok (abban az értelemben is, hogy a két oldal értelmezési tartománya ugyanaz)!

   (a) $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$ (b) $\mathrm{ch}^2(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(2x) + 1}{2}$

   (c) $\mathrm{arsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ (d) $\mathrm{arch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

4. Mely sorozatok növőek, csökkenőek, illetve korlátosak az alábbiak közül?

   (a) $a_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$ (b) $a_n = \frac{n}{n+1}$ (c) $a_n = \frac{n}{n^3-2}$ (d) $a_n = \ln(n^2 + 3)$

   (e) $a_n = \sin n$ (f) $a_n = (-1)^n$ (g) $a_n = \frac{(-1)^n}{n^3-8n}$ (h) $a_n = \frac{n^2+n}{n^2-2}$

   (i) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ (j) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ (k) $a_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$ (l) $a_n = \sqrt[n]{n}$

5. (a) Igazoljuk, hogy korlátos sorozatok összege és szorzata is korlátos!

   (b) Mutassunk példát arra, hogy korlátos pozitív tagú sorozatok hányadosa nem feltétlenül korlátos!

6. (a) Igazoljuk, hogy monoton növõ sorozatok összege is monoton növõ!

   (b) Mutassunk példát arra, hogy monoton növõ sorozatok szorzata lehet monoton csökkenõ vagy akár nem monoton is!

7. Igazoljuk, hogy tetszõleges $A \in \mathbb{R}$ és (a_n) valós sorozat esetén fennállnak a következõ ekvivalenciák!

   (a) $a_n \to A \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon \in (0, 1)\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n > n_0 \quad |a_n - A| < \varepsilon$

   (b) $a_n \to A \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n > n_0 \quad |a_n - A| < 2\varepsilon$

8. (a) Igazoljuk, hogy ha két sorozat csak véges sok tagban tér el egymástól, akkor a határértékük ugyanaz vagy egyiknek sincs határértéke!

   (b) Igazoljuk, hogy ha két konvergens sorozatnak végtelen sok azonos eleme van, akkor a határértékük ugyanaz!

   (c) Fennáll az is, hogy ha két sorozatnak végtelen sok azonos eleme van, és az egyiknek van határértéke, akkor a másiknak is?

9. (a) Tegyük fel, hogy $\lim a_n = \lim b_n$. Igazoljuk, hogy ekkor az $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots$ sorozat limesze létezik, valamint (a_n) és (b_n) közös határértékével egyezik meg!

   (b) * Legyenek $(a_{1n}), (a_{2n}), (a_{3n}), \ldots$ sorozatok úgy, hogy azok közös határértéke A. Igaz-e, hogy ekkor az $a_{1,1}, a_{2,2}, a_{3,3}, \ldots$ sorozat határértéke is A lesz?

10. Mutassunk, olyan (a_n) és (b_n) sorozatokat, amelyekre $(a_n) \to 1$ és $(b_n) \to \infty$ teljesül, továbbá

    (a) $a_n^{b_n} \to 1$ (b) $a_n^{b_n} \to \infty$ (c) $a_n^{b_n} \to 0$ (d) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n}$ nem létezik