Emelt szintű kalkulus, 3. GYAKORLAT - Sorozatok, függvények határértéke

A feladatok megoldása során felhasználhatók a következõ nevezetes határértékek.

(i) $\lim \frac{n^k}{a^n} = 0\ k \in \mathbb{Z},\ a > 1$ (ii) $\lim \sqrt[n]{a} = 1\ a > 0$ (iii) $\lim \sqrt[n]{n} = 1$

(iv) $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$ (v) $\lim \frac{n!}{n^n} = 0$ (vi) $\lim \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$

1. Számítsuk ki az alábbiakban megadott sorozatok határértékét, ha az létezik!

   (a) $a_n = \sqrt[n]{5n+3}$ (b) $a_n = \sqrt[2n]{n}$ (c) $a_n = \sqrt[n]{2+\sqrt{n}}$ (d) $a_n = \sqrt[n]{10n^3+2}$

   (e) $a_n = \sqrt[n]{2^n+n^3}$ (f)* $a_n = \sqrt[4n]{4^n+n^4+n^3}$ (g) $a_n = \sqrt[n]{\frac{5^n+3^n}{4^n-3^n}}$ (h)* $a_n = \sqrt[2n]{\frac{n^2\cdot 2^n+3^n}{\sqrt{4^n-3^n}}}$

2. Számítsuk ki a következő sorozatok határértékét!

   (a) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt[2n]{(2n)!}}$ (b) $a_n = \dfrac{\sqrt{n-5}}{\sqrt[n]{(n-1)!}}$ (c) $a_n = \dfrac{n!}{2^n}$ (d) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

   (e) $a_n = \sqrt[n]{n!}$ (f) $a_n = \sqrt[2n]{n!}$ (g) $a_n = \dfrac{n!}{\sqrt{n^n}}$ (h) $a_n = \dfrac{n!}{n^5+1}$

   (i) $a_n = \dfrac{\sqrt{n!}}{(n+1)^2}$ (j) $a_n = \dfrac{n^n}{(2n)!}$ (k) $a_n = \dfrac{n^n}{(n!)^2}$ (l)* $a_n = n - \ln n!$

   (m)* $a_n = \dfrac{\ln n!}{n} - \ln n$ (n) $a_n = \ln(n+1)! - \ln n!$ (o) $a_n = n^2 - \ln n!$

3. Mutassunk példát olyan $(a_n), (b_n)$ sorozatokra, amelyekre $b_n > 0,\ \lim a_n = \lim b_n = 0$, emellett

   (a) $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$ (b) $\lim \frac{a_n}{b_n} = -\infty$ (c)* $\lim \frac{a_n}{b_n} = K$, ahol $K \in \mathbb{R}$ adott.

4. Mutassunk példát olyan $(a_n), (b_n)$ sorozatokra, amelyekre $\lim a_n = 0, \lim b_n = \infty$, emellett

   (a) $\lim a_n b_n = \infty$ (b) $\lim a_n b_n = -\infty$ (c)* $\lim a_n b_n = K$, ahol $K \in \mathbb{R}$ adott.

5. Mutassunk példát olyan $(a_n), (b_n)$ sorozatokra, amelyekre $\lim a_n = \infty$ és $\lim b_n = -\infty$, emellett

   (a) $\lim a_n + b_n = \infty$ (b) $\lim a_n + b_n = -\infty$ (c)* $\lim a_n + b_n = K$, ahol $K \in \mathbb{R}$ adott.

6. Mutassunk példát olyan (a_n) sorozatra, amelyre $\lim a_n = 0$, emellett

   (a) $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$ (b) $\lim \sqrt[n]{a_n} = 0$ (c)* $\lim \sqrt[n]{a_n} = K$, ahol $K \in (0,1)$ adott.

7. Mutassunk példát olyan pozitív tagú (a_n) sorozatra, amelyre $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, emellett

   (a) $\lim a_n = 0$ (b) $\lim a_n = \infty$ (c)* $\lim a_n = K$, ahol $K \in \mathbb{R}^+$ adott.

8. Fogalmazzuk meg az átviteli elv segítségével, mit jelent az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre vonatkozólag az, hogy $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$, illetve hogy $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \infty$.

9. Számítsuk ki az alábbi határértékeket!

   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 - 2x - 10$ (b) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^4 - 3x^3 - 6$ (c) $\lim\limits_{x\to -\infty} x - 3\sqrt[3]{x^2}$

   (d) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-x+4}{x^3+x+5}$ (e) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2-5x+9}{x+6}$ (f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt[3]{x^2+x} - \sqrt[3]{x^2-x}$

   (g) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$ (h) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}+1}{\sqrt[3]{x^2-1}-1}$ (i)* $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$

10. Döntsük el, hogy léteznek-e az alábbi függvényhatárértékek, és ha igen, akkor számítsuk ki ezeket!

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-x}{x^3-x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ (c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-7x+12}{2x^2-5x-3}$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{5}{x^5-1} - \dfrac{3}{x^3-1}$ (e) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ (f) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$

(g) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}$ (h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{x^2}$ (i) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2+\sqrt{x}}{x^3-8}$

(j) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cdot \operatorname{sgn} x$ (k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sgn} x}{x^3}$ (l) $\lim\limits_{x\to 0} e^{x^2} \cdot \operatorname{sgn} x$