Emelt szintű kalkulus, 4. GYAKORLAT - Deriváltak kiszámításának gyakorlása

Az elemi függvények deriváltjain kívül használhatjuk a következő nevezetes deriváltakat is:

$$\text{arc }\sin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{arc }\cos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{arc tg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{ar sh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \text{ar ch}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

1. A szorzatra és hányadosra vonatkozó deriválási szabályok alapján számítsuk ki az alábbi hozzárendeléssel adott függvények deriváltját!

   (a) $f(x) = 2\sin x\cos x$ (b) $f(x) = x^2e^x$ (c) $f(x) = x\cdot\ln x - x$ (d) $f(x) = x\cdot\text{tg}\, x$

   (e) $f(x) = \sqrt{x}2^{x+2}$ (f) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2}$ (g) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2-1}$ (h) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x\cdot\ln x}$

2. A megfelelõ függvények definícióját, illetve az inverz függvényre vonatkozó deriválási szabályát használva igazoljuk, hogy fennállnak az alábbi egyenlõségek!

   (a) $\text{sh}'(x) = \text{ch}(x)$ (b) $\text{ch}'(x) = \text{sh}(x)$ (c) $\text{th}'(x) = \dfrac{1}{\text{ch}^2}(x)$

   (d) $\text{arcsin}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (e) $\text{arctg}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ (f) $\text{arsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

   (g) $\text{arth}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ (h) $\text{arccos}'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

   Gondoljuk meg, hogy a két oldalon szereplõ függvények értelmezési tartományai is azonosak!

3. Számítsuk ki az alábbi hozzárendeléssel adott függvények deriváltjait! Az értelmezési tartomány minden esetben a lehetséges legbővebb halmaz, ahol a kompozíciófüggvények értelmesek.

   (a1) $f(x) = \sin^5 x$ (a2) $f(x) = \sin 5x$ (a3) $f(x) = \sin x^5$

   (b1) $f(x) = \sin^5 5x^5$ (b2) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ (b3) $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$

   (c1) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ (c2) $f(x) = \ln\dfrac{\sqrt{1-x^2}+1}{x}$ (c3) $f(x) = \ln\sin x$

   (d1) $f(x) = \ln\text{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$ (d2) $f(x) = \arcsin 2x$ (d3) $f(x) = \arccos\dfrac{1}{x}$

   (e1) $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ (e2) $f(x) = 2^{3x-1}$ (e3) $f(x) = \cos 2xe^{-x}$

   (f1) $f(x) = x^{2x}$ (f2) $f(x) = \text{arctg}\sqrt{x}$ (f3) $f(x) = \text{arth}\sqrt{x+1}$

4. Számítsuk ki a g függvény második és harmadik deriváltját, ha g a következő hozzárendeléssel adott:

   (a) $g(x) = x^3$ (b) $g(x) = \cos 2x$ (c) $g(x) = e^{\frac{x}{2}}$ (d) $g(x) = e^{-x}$

5. Számítsuk az $f'(1), f'(2), f'(3)$ értékeket, ha $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$!