Emelt szintű kalkulus, 5. GYAKORLAT - Folyonos függvények tulajdonságai, deriváltak alkalmazása

1. Ki lehet-e terjeszteni az alábbi hozzárendeléssel megadott függvényeket $\mathbb{R}$-re úgy, hogy a kiterjesztéssel kapott függvények $\mathbb{R}$-en folytonosak legyenek?

   (a) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ (c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

   (d) $f(x) = x \cdot \ln|x|$ (e) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ (f) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$

   (g) $f(x) = x \cdot \sin\dfrac{1}{x}$ (h) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \cos\dfrac{1}{x}$ (i) $f(x) = x \cdot \ln(|\cos x|)$

2. Mutassunk olyan f és g függvényeket, amelyekre $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(g) = \mathbb{R}$, nem folytonosak mindenütt, de

   (a) $f+g$ folytonos $\mathbb{R}$-en.

   (b) f^2 folytonos $\mathbb{R}$-en.

   (c) fg folytonos $\mathbb{R}$-en.

   (d) $f \circ g$ folytonos $\mathbb{R}$-en.

3. Az alábbi egyenletek közül melyeknek van megoldása a megadott intervallumokon?

   (a) $x = e^{-x}, \quad x \in (0,1)$ (b) $\ln x = -x, \quad x \in (0,2)$

   (c) $\operatorname{arc\,tg} x = 3e^{-x}, \quad x \in (0,2)$ (d) $\operatorname{ch} x \sin x = \cos x, \quad x \in (0,\pi)$

   (e) $\operatorname{sh}\,\sin x = 1, \quad x \in (0, \dfrac{\pi}{2})$ (f) $\operatorname{ch} x = 2 - x^2, \quad x \in (1,5)$

   (g) $\ln x = (x-2)^2, \quad x \in (0,4)$ (h) $x^9 - 5x^2 + x - 3 = 0, \quad x \in \mathbb{R}$

4. Határozzuk meg az alábbi hozzárendeléssel adott függvények $\lim\limits_{\infty} f$, $\lim\limits_{-\infty} f$ határértékeit, továbbá az egyoldali határértékeket mindazon $x \in \mathbb{R}$ pontokban, ahol f nem értelmes, végül azokat a (legbővebb) intervallumokat, ahol f monoton növő, monoton csökkenő, valamint ezek alapján f szélsőértékhelyeit!

   (a) $f(x) = x^3 - x$ (b) $f(x) = x^4 - x^2$ (c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ (d) $f(x) = \dfrac{1+x}{x^3}$

   (e) $f(x) = \dfrac{1}{1+\ln x}$ (f) $f(x) = x + \ln x$ (g) $f(x) = xe^x$ (h) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

5. Állapítsuk meg a második derivált kiszámításával, hogy a következő függvényeknek milyen szélsőértékük van a megadott helyeken (ezzel az előző feladatban már kiszámított eredményeket ellenőrizzük)!

   (a) $f(x) = x^3 - x, \ x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $f(x) = x^4 - x^2, \ x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

   (c) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}, \ x = \pm 1$ (d) $f(x) = \dfrac{1+x}{x^3}, \ x = -\dfrac{3}{2}$

6. Mutassunk olyan valós függvényeket, amikor valamilyen x-re $f'(x) = 0$ és $f''(x) = 0$ teljesül, emellett

   (a) f-nek x-ben szigorú lokális minimuma van.

   (b) f-nek x-ben szigorú lokális maximuma van.

   (c) f-nek x-ben nincs szélsőértéke.