Emelt szintű kalkulus, 6. GYAKORLAT - Primitív függvények, integrálszámítás

Azt mondjuk, hogy az f valós függvény primitív függvénye (határozatlan integrálja vagy antideriváltja) F, ha $F' = f$ teljesül. Erre használjuk az $F = \int f$ jelölést.

Ha $f, F : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvények, és $F' = f$ az (a, b) intervallumon, akkor az f grafikonja és az x-tengely közé eső „terület” létezik, és az $F(b) - F(a)$ különbséggel adható meg. Itt az x-tengely alatti részt negatív előjellel kell számolni.

Ez képlettel (Newton–Leibniz-formula): $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$

Néhány nevezetes primitív függvény:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arc}\sin(x) \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arc}\operatorname{tg}(x) \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{ar}\operatorname{ch}(x)$$

$$\int x^p\,\mathrm{d}x = \frac{x^{p+1}}{p+1},\ p \neq 0 \qquad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| \qquad \int e^x\,\mathrm{d}x = e^x$$

$$\int \sin = -\cos, \quad \int \cos = \sin \qquad \int \operatorname{sh} = \operatorname{ch}, \quad \int \operatorname{ch} = \operatorname{sh}, \qquad \int \tfrac{1}{\cos^2} = \operatorname{tg}$$

Néhány nevezetes azonosság primitív függvények, integrálok kiszámításához:

$$\int f + g = \int f + \int g \qquad \int_a^b f'g = fg(b) - fg(a) - \int_a^b fg' \qquad \int \frac{f'}{f} = \ln f$$

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\cdot F(ax+b) \qquad \int_a^b f(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \int f^k \cdot f' = \frac{f^{k+1}}{k+1}$$

1. Számítsuk ki a következőket!

   (a) $\displaystyle\int_1^4 x^2\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ (e) $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi \cos x\,\mathrm{d}x$

2. Számítsuk ki a következőket!

   (a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 - 3\cos x\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int_0^1 8 - \operatorname{ch} 2x\,\mathrm{d}x$

3. Számítsuk ki a következő síkidomok területét; készítsünk ábrát!

   (a) $\{(x, y) : 0 \le x \le 2, 0 \le y \le \operatorname{arc}\operatorname{tg} x\}$ (b) $\{(x, y) : 0 \le x \le \pi, -\sin x \le y \le \sin x\}$

   (c) $\{(x, y) : 0 \le x \le 1, x^3 \le y \le x^2\}$ (d) $\{(x, y) : 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$

4. Parciális integrálással számítsuk ki a következőket!

   (a) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x \sin 2x\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_0^\pi e^x \sin x\,\mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle\int_0^\pi \cos^3 x\,\mathrm{d}x$ (e) $\displaystyle\int_1^e \ln\, x\,\mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int_0^\pi x^2 \cos 3x\,\mathrm{d}x$