Emelt szintű kalkulus, 8. GYAKORLAT - Integrálszámítás - improprius integrálok

Ha $f : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ és ennek $F : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ primitív függvénye folytonosak, de f vagy F vagy (a, b) nem korlátos, akkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x), \qquad \text{ha ez értelmes.}$$

Ha ez véges, akkor a fenti improprius integrált konvergensnek nevezzük.
Két fontos összehasonlító elv abban az esetben, ha $0 \le g \le f$:

- Ha $\int_a^b g = \infty$, akkor $\int_a^b f = \infty$ is teljesül; ha $\int_a^b f < \infty$, akkor $\int_a^b g < \infty$ is teljesül.

1. Számítsuk ki a következő improprius integrálokat!

   (a) $\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ (b) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ (c) $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ (d) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^4}\,\mathrm{d}x$

   (e) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ (f) $\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x$ (g) $\int_0^\infty x^2\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x$ (h) $\int_{-\infty}^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x$

2. Milyen $k \in \mathbb{R}$ esetén lesz a következő improprius integrál konvergens?

   (a) $\int_0^1 \frac{1}{x^k}\,\mathrm{d}x$ (b) $\int_1^\infty \frac{1}{x^k}\,\mathrm{d}x$ (a) $\int_0^\infty e^{kx}\,\mathrm{d}x$

3. Döntsük el, konvergensek-e a következő improprius integrálok!

   (a) $\int_0^1 \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x$ (b) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$ (c) $\int_0^\infty (x^4+2)\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x$ (d) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

4. Két tömegpontot szét akarunk választani: egymáshoz érnek, és 1 m távolságra akarjuk őket egymástól elvinni (mondjuk egyenes vonal mentén). Mennyi munkát kell ehhez végeznünk? Legyenek a tömegek M_1 és M_2, rögzítsük M_1 helyzetét az origóban, és használjuk fel, hogy a köztük ható erő arányos a távolságuk négyzetének reciprokával! Pontos ez a matematikai modell?