Emelt szintű kalkulus, 9. GYAKORLAT - Taylor-polinomok, Taylor-sorok

Használjuk fel, hogy érvényesek a következő összefüggések, amelyek a bal oldalon levő függvények nulla közepű Taylor-sorát adják meg:

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad x \in \mathbb{R}$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad x \in \mathbb{R}$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad x \in (-1, 1)$

Emellett a következő műveleteket használhatjuk:

- polinomok helyettesítése, tagonkénti deriválás, tagonkénti integrálás

Oldjuk meg a következő feladatokat!

1. Írjuk fel a következő hozzárendeléssel adott függények nulla közepű Taylor-sorát!

   (a) $x \mapsto e^{-x}$ (b) $x \mapsto e^{1+x}$ (c) $x \mapsto \frac{1}{1+2x}$ (d) $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$

   (e) $x \mapsto \frac{1}{(1-x)^2}$ (f) $x \mapsto \ln(1+x)$ (g) $x \mapsto \cos x$ (h) $x \mapsto \cos^2 x$

   (i) $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ (j) $x \mapsto \operatorname{sh} x$ (k) $x \mapsto \operatorname{ch} 2x$ (l) $x \mapsto \frac{1}{(2-x)^2}$

2. A fenti műveletek segítségével hogyan kell egy nulla közepű Taylor-sorból b közepűt előállítani? Adjuk meg ez alapján az $x \mapsto \frac{1}{x}$ hozzárendeléssel adott függvény -2, majd 2 körüli Taylor-sorát!

3. A fentiek segítségével helyettesítsük az alábbi függvényeket a megadott b helyek körül a „lehető legjobb” másod- és harmadfokú polinommal, azaz írjuk fel a megfelelő másod- és harmadrendű Taylor-polinomot!

   (a) $x \mapsto e^{-x}, b = 0, b = -1$ (b) $x \mapsto \frac{1}{1+x}, b = 0, b = -3$ (c) $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}, b = 0, b = 2$

   (d) $x \mapsto \ln(1+x), b = 0, b = 2$ (e) $x \mapsto \cos x, b = 0, b = 2$ (f) $x \mapsto \cos^2 x, b = 0, b = \frac{\pi}{2}$