Nemfolytonos Galjorkin - módszerekre vonatkozó hibabecslések elliptikus feladatok esetén

Izsák Ferenc

Tanszéki szeminárium, ELTE TTK Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

Budapest, 2011. február 28.

Outline

- Motivatió nemfolytonos függvényekkel való közelítésre.
- DG - módszerek levezetése.
- DG - módszerek hibaanalízise.
- Egy új megközelítés, a módszer és a konvergencia 1 dimenzióban.

Motiváció

- Nagyon körülményes (de gyakran szükséges) a hp-finomítás végeselem módszerek esetében.
  - Nem tudjuk a közelítő polinomok fokszámát a tartományokon akárhogy előírni.
  - A bázisfüggvényeken elemhatárokon definiáljuk, összetett ebből a tömegmátrix kiszámítása (több idő, mint a kapott lin. rendszert megoldani).

A vizsgált modellfeladat

$$\begin{cases} \Delta u(x) = -f(x) & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

azaz

$$\begin{cases} \nabla u(x) = \psi(x) & x \in \Omega \\ \nabla \cdot \psi(x) = f(x) & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Itt $f \in L_2(\Omega)$ adott, ahol $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ korlátos poliéder, amelynek egy partícióját tekintjük:

$$\bar{\Omega} = \bigcup \bar{K}_j \quad \text{és} \quad \Gamma = \bigcup \partial K_j, \Gamma_0 = \Gamma \setminus \partial\Omega$$

valamint $\boldsymbol{\nu}_j$ a K_j-ről kifelé mutató normális.

Eszközök I: Függvényterek a közelítéshez

- Résztartományonként

$$H_h = \{u \in L_2(\Omega) : u|_{K_j} \in \mathbb{P}^{k_j}\},$$

ahol $\mathbb{P}^{k_j}$ a legfeljebb k_j-edrendű polinomok vektortere. Ezzel valami olyan $a_{\mathrm{DG}} : H_h \times H_h$ bilineáris formát akarunk felírni, hogy az eredeti feladat megoldását jól lehessen közelíteni azon $u_h \in H_h$ elemmel, amelyre minden $v_h \in H_h$ esetén

$$a_{\mathrm{DG}}(u_h, v_h) = (f, v_h).$$

Eszközök II: Ugrások, átlagok elemhatárokon

- Átlag egy elemhatár-darabon:

$$\{\{u_h\}\}|_{K_j \cap K_k} = \frac{1}{2}(\lim_{K_j \to} u_h + \lim_{K_k \to} u_h).$$

- Ugrás egy elemhatár-darabon:
  - ▷ $u_h \in H_h$ esetén:

$$[\![u_h]\!]|_{K_j \cap K_k} = \lim_{K_j \to} u_h \boldsymbol{\nu}_{K_j} + \lim_{K_k \to} u_h \boldsymbol{\nu}_{K_k},$$

  - ▷ $u_h \in [H_h]^3$ esetén:

$$[\![u_h]\!]|_{K_j \cap K_k} = \lim_{K_j \to} u_h \cdot \boldsymbol{\nu}_{K_j} + \lim_{K_k \to} u_h \cdot \boldsymbol{\nu}_{K_k}.$$

Eszközök III: A Gauss-tétel egy kiterjesztése

- Tetszőleges $u \in C^1(\bar{\Omega}), v \in [C^1(\bar{\Omega})]^3$ esetén

$$(\nabla u, v)_\Omega = \sum_j -(u, \nabla \cdot v)_{K_j} + \sum_j (\boldsymbol{\nu}_j u, v)_{\partial K_j} = -(u, \nabla \cdot v)_\Omega + (\boldsymbol{\nu}_j u, v)_{\partial \Omega}.$$

Ha pedig $u \in H_h, v \in [H_h]^3$, akkor valamilyen $\mathcal{F} : H_h \longrightarrow H_h|_{\bigcup_j \partial K_j}$ és $\underline{\mathcal{F}} : [H_h]^3 \longrightarrow [H_h]^3_{\bigcup_j \partial K_j}$ lineáris függvényekre

$$(\nabla u, v)_\Omega = (u, \nabla_h \cdot v)_\Omega + \sum_j (\boldsymbol{\nu}_j \mathcal{F}(u), v)_{\partial K_j},$$

és ugyanilyen elven minden $\psi \in [H_h]^3$ és minden $w \in H_h$ esetén

$$(\nabla \cdot \psi, w)_\Omega = -(\psi, \nabla_h w)_\Omega + \sum_j (\boldsymbol{\nu}_j \cdot \underline{\mathcal{F}}(u), v)_{\partial K_j},$$

ahol a ∇_h és $\nabla_h\cdot$ operátorokat a résztartományok unióján értelmezzük.

Az eredeti feladat gyenge(variációs) alakja $H_h \times [H_h]^3$-ban

- Keresünk olyan $(u_h, \psi_h) \in H_h \times [H_h]^3$ függvényeket, hogy minden $(v_h, w_h) \in H_h \times [H_h]^3$ esetén

$$\begin{cases} (\nabla u_h, v_h)_\Omega = -(u_h, \nabla_h \cdot v_h)_\Omega + \sum_j (\boldsymbol{\nu}_j \mathcal{F}(u_h), v_h)_{\partial K_j} = (\psi_h, v_h)_\Omega \\ (\nabla \cdot \psi_h, w_h) = -(\psi_h, \nabla_h w_h)_\Omega + \sum_j (\boldsymbol{\nu}_j \cdot \underline{\mathcal{F}}(u_h), w_h)_{\partial K_j} = -(f, w_h)_\Omega \end{cases} \tag{1}$$

- Ehelyett olyat szeretnénk, ami csak u_h-t tartalmazza ismeretlenként. Ehhez egy elemi azonosság:
Minden $(q, r) \in \left(\prod_j C(\bar{K}_j) \times \prod_j [C(\bar{K}_j)]^3\right)$ függvénypárra

$$\sum_j (q_{K_j}, \boldsymbol{\nu}_j \cdot r_{K_j})_{\partial K_j} = ([\![q]\!], \{\{r\}\})_\Gamma + (\{\{q\}\}, [\![r]\!])_{\Gamma_0}. \tag{2}$$

Az eredeti feladat gyenge(variációs) alakja II.

- Terv: (1) első egyenletében a ψ függvényt u-val kifejezzük, ezt a másodikba beírjuk.
- A (2) formulát (1) első egyenletébe beírva, majd a Gauss-tételt elemenként, végül újra az (2) formulát alkalmazva

$$(\psi_h, v_h)_\Omega = -(u_h, \nabla_h \cdot v_h)_\Omega + ([\![\mathcal{F}(u_h)]\!], \{\{v_h\}\})_\Gamma + (\{\{\mathcal{F}(u_h)\}\}, [\![v_h]\!])_{\Gamma_0}$$

$$= (\nabla_h u_h, v_h)_\Omega - \sum_j (u_h, \boldsymbol{\nu}_j \cdot v_h)_{\partial K_j} + ([\![\mathcal{F}(u_h)]\!], \{\{v_h\}\})_\Gamma + (\{\{\mathcal{F}(u_h)\}\}, [\![v_h]\!])_{\Gamma_0}$$

$$= (\nabla_h u_h, v_h)_\Omega - ([\![u_h]\!], \{\{v_h\}\})_\Gamma - (\{\{u_h\}\}, [\![v_h]\!])_{\Gamma_0}$$

$$+ ([\![\mathcal{F}(u_h)]\!], \{\{v_h\}\})_\Gamma + (\{\{\mathcal{F}(u_h)\}\}, [\![v_h]\!])_{\Gamma_0}$$

$$= (\nabla_h u_h, v_h)_\Omega - ([\![u_h - \mathcal{F}(u_h)]\!], \{\{v_h\}\})_\Gamma - (\{\{u_h - \mathcal{F}(u_h)\}\}, [\![v_h]\!])_{\Gamma_0}.$$

Ezt beírva a

$$
\begin{aligned}
-(f, w_h) &= -(\psi_h, \nabla_h w_h)_\Omega + \sum_j (\boldsymbol{\nu}_j \cdot \underline{\mathcal{F}}(u_h), w_h)_{\partial K_j} \\
&= -(\psi_h, \nabla_h w_h)_\Omega + (\{\{\underline{\mathcal{F}}(u_h)\}\}, [\![w_h]\!])_\Gamma + ([\![\underline{\mathcal{F}}(u_h)]\!], \{\{w_h\}\})_{\Gamma_0}
\end{aligned}
$$

formulába (legyen $\nabla_h w_h = v_h$), kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
(f, w_h) = {} & (\nabla_h u_h, \nabla_h w_h)_\Omega \\
& + ([\![u_h - \mathcal{F}(u_h)]\!], \{\{\nabla_h w_h\}\})_\Gamma + (\{\{u_h - \mathcal{F}(u_h)\}\}, [\![\nabla_h w_h]\!])_{\Gamma_0} \\
& + (\{\{\underline{\mathcal{F}}(u_h)\}\}, [\![w_h]\!])_\Gamma + ([\![\underline{\mathcal{F}}(u_h)]\!], \{\{w_h\}\})_{\Gamma_0}.
\end{aligned}
$$

Egy eszköz DG bilineáris formák felírásához

- Átviteli operátor: $r : [L_2(\Gamma)]^n \longrightarrow H_h$, ahol $r(u_h) \in H_h$ az az elem, amelyre

$$\forall w \in H_h : \quad \int_\Omega r(u_h) w = -\int u_h \{\{w\}\}.$$

DG bilineáris formák levezetése

- Konkrét módszerek - $\mathcal{F}(u_h)$ és $\mathcal{F}(\nabla u_h)$ megválasztása. Példák:
  - ▷ $\mathcal{F}(u_h) = \{\{u_h\}\}, \underline{\mathcal{F}}(u_h) = \{\{\nabla_h u_h\}\}$ - Bassi & Rebay..
    Ekkor (... számolás ...)

$$a_{\mathrm{DG}}(u_h, v_h) = (\nabla_h u_h, \nabla_h v_h)_\Omega + (r([\![u_h]\!]), r([\![v_h]\!]))_\Omega - (\{\{\nabla_h u_h\}\}, [\![v_h]\!])_\Gamma - (\{\{\nabla_h v_h\}\}, [\![u_h]\!])_\Gamma.$$

  - ▷ $\mathcal{F}(u_h) = \{\{u_h\}\}, \underline{\mathcal{F}}(u_h) = \{\{\nabla_h u_h\}\} - ch_e^{-1}[\![u_h]\!]$ - IP (interior penalty) DG módszer.
    Ekkor (... számolás ...)

$$a_{\mathrm{DG}}(u_h, v_h) = (\nabla_h u_h, \nabla_h v_h)_\Omega - (\{\{\nabla_h u_h\}\}, [\![v_h]\!])_\Gamma - (\{\{\nabla_h v_h\}\}, [\![u_h]\!])_\Gamma + \sum_j h_{\gamma_j}^{-1}([\![u_h]\!], [\![v_h]\!])_{\gamma_j}.$$

DG bilineáris formák tulajdonságai

- A hibaanalízishez: $a_{\mathrm{DG}} : (H + H_h) \times H + H_h \to \mathbf{R}$.
- Mit tudjon egy ilyen a_{DG} bilineáris forma?
  - ▷ Teljesüljön a Galjorkin-ortogonalitás: Ha u_h a DG-közelítés, akkor minden $v_h \in H_h$ esetén
    $$a_{\mathrm{DG}}(u - u_h, v_h) = 0.$$
    Megjegyzés: Ha teljesül, hogy minden $u \in H^1(\Omega)$ esetén $\mathcal{F}(u) = u$, emellett minden $u \in H^2(\Omega)$ esetén $\underline{\mathcal{F}}(u) = \nabla u$ (azaz a módszer *konzisztens*), akkor a fenti feltétel teljesül.
  - ▷ a_{DG} legyen stabil, azaz valamilyen $c_0 > 0$ esetén minden $u_h \in H_h + H$ esetén
    $$a_{\mathrm{DG}}(u_h, u_h) \geq c_0 \|u_h\|_{\mathrm{DG}}^2.$$
  - ▷ a_{DG} legyen korlátos, azaz valamilyen $c_0 > 0$ esetén minden $u_h, v_h \in H_h + H$ esetén
    $$a_{\mathrm{DG}}(u_h, v_h) \leq c_0 \|u_h\|_{\mathrm{DG}} \|v_h\|_{\mathrm{DG}},$$

ahol minden esetben $\|\cdot\|_{\mathrm{DG}}$ egy "alkalmasan definiált" norma:

- $\|u_{\mathrm{DG}}\|^2 = \|\nabla_h u\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_j h_{\gamma_j}^{-1} \|[\![u]\!]\|^2_{L_2(\gamma_j)} + \sum_j h_{K_j}^2 |u|^2_{H^2(K_j)}$,
- $\|u_{\mathrm{DG}}\|^2 = \|\nabla_h u\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_j h_{\gamma_j}^{-1} \|[\![u]\!]\|^2_{L_2(\gamma_j)}$.

A megoldások létezése és konvergenciája

- Ha az a_{DG} bilineáris formára a Galjorkin-ortogonalitás, a stabilitás és a korlátosság feltétele teljesül, akkor az

$$?u_h \in H_h : \forall\, v_h \in H_h : \quad a_{\mathrm{DG}}(u_h, v_h) = (f, v_h).$$

feladatnak létezik egyértelmű megoldása, és az kvázi-optimálisan konvergál a $\|\cdot\|_{\mathrm{DG}}$ normában az igazihoz:

$$\|u - u_h\|_{\mathrm{DG}} \leq \inf_{v_h \in H^h} \|u - v_h\|_{\mathrm{DG}}.$$

Vigyázat, ez nem $H_0^1(\Omega)$-beli konvergencia!

- Nem fontos $\mathcal{F}$ konzisztenciája, ekkor is legalább $u_h \to u$, $\nabla_h u_h \to \nabla u$ igaz $L_2(\Omega)$-ban (A. Ern & D. De Pietro, Math. Comp. 2010).

- Hogy kapunk u_h-ból legalább folytonos megoldást?
  Rekonstrukciós operátorral: $Q_h : H_h \longrightarrow W^{1,\infty}(\Omega)$, amelyre minden - résztartományonként legf. k-adrendű - u esetén tetszőleges $p, q \geq 1$ esetén

$$\|u - Q_h u\|_{L_p(\Omega)} \leq C_0 h^{\frac{n}{q}-\frac{n}{p}+1} \|\nabla_h u\|_{L_p(\Omega)}$$
$$\|\nabla Q_h u\|_{L_p(\Omega)} \leq C_0 \|\nabla_h u\|_{L_p(\Omega)}$$

  (A. Buffa & C. Ortner, IMA J. Num. Anal. 2009) - ezzel az $u - u_h$ hibát nem tudjuk becsülni, mert az nem H_h-beli.
  Lehet-e valahogy mégis $H_0^1(\Omega)$-beli konvergenciát kapni?