

Hibabecslések energia-normában dG típusú módszerekre

Egy dimenziós feladatok esete

Izsák Ferenc

Tanszéki Szeminárium, Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék

2013. február 18.

- 1 Bilineáris formák dG módszerekhez
 - Bilineáris formák általában
 - Konkrét bilineáris formák
- 2 A végelem tér szemléltetése
- 3 Összehasonlítás az új bilináris formával
 - Az új bilineáris forma
 - Az összehasonlítás elve
 - Az egyes tagok összehasonlítása
- 4 Fő eredmények
- 5 összefoglalás, további problémák, feladatok



Bilineáris formák általában

Általános jelölés: a_* .

Bilineáris formák általában

Általános jelölés: a_* .

- 1 Minden esetben $a_* : P_{h,\mathbf{k}} \times P_{h,\mathbf{k}} \rightarrow \mathbb{R}$.

Bilineáris formák általában

Általános jelölés: a_* .

- 1 Minden esetben $a_* : P_{h,k} \times P_{h,k} \rightarrow \mathbb{R}$.
- 2 a_* a következőktől függ:

$$u_{I_j}, \nabla_h u_{I_j}, \{\{u\}\}_j, \llbracket u \rrbracket_j, j = 1, 2, \dots, N.$$

Bilineáris formák általában

Általános jelölés: a_* .

- ① Minden esetben $a_* : P_{h,k} \times P_{h,k} \rightarrow \mathbb{R}$.
- ② a_* a következőktől függ:

$$u|_j, \nabla_h u|_j, \{\{u\}\}_j, \llbracket u \rrbracket_j, j = 1, 2, \dots, N.$$

- ③ Minden esetben $u, v \in H_0^1(0, 1) \Rightarrow a_*(u, v) = (\nabla u, \nabla v)$.

Első példa

- 1 „Interior penalty” bilineáris forma - a leggyakrabban használt

Első példa

- ① „Interior penalty” bilineáris forma - a leggyakrabban használt

$$a_{\text{IP}}(u_h, v_h) = (\nabla_h u_h, \nabla_h v_h) - \sum_{j=1}^n \{ \nabla_h u_h \}_j [v_h]_j + \{ \nabla_h v_h \}_j [u_h]_j \\ + \sigma_h \sum_{j=1}^n [u_h]_j [v_h]_j,$$

Első példa

- ① „Interior penalty” bilineáris forma - a leggyakrabban használt

$$a_{\text{IP}}(u_h, v_h) = (\nabla_h u_h, \nabla_h v_h) - \sum_{j=1}^n \{ \nabla_h u_h \}_j [v_h]_j + \{ \nabla_h v_h \}_j [u_h]_j \\ + \sigma_h \sum_{j=1}^n [u_h]_j [v_h]_j,$$

ahol

- $\sigma_h = \frac{C}{h^s}$ - „alkalmas” paraméter.

Első példa

- ① „Interior penalty” bilineáris forma - a leggyakrabban használt

$$a_{\text{IP}}(u_h, v_h) = (\nabla_h u_h, \nabla_h v_h) - \sum_{j=1}^n \{ \nabla_h u_h \}_j \llbracket v_h \rrbracket_j + \{ \nabla_h v_h \}_j \llbracket u_h \rrbracket_j \\ + \sigma_h \sum_{j=1}^n \llbracket u_h \rrbracket_j \llbracket v_h \rrbracket_j,$$

ahol

- $\sigma_h = \frac{C}{h^s}$ - „alkalmas” paraméter.
- Az előzőekben megfelelő paraméter választásával $0 < a_{\text{IP}}(u_h, u_h)$, ha $u_h \neq 0$ – stabil.

Első példa

- ① „Interior penalty” bilineáris forma - a leggyakrabban használt

$$a_{\text{IP}}(u_h, v_h) = (\nabla_h u_h, \nabla_h v_h) - \sum_{j=1}^n \{ \nabla_h u_h \}_j \llbracket v_h \rrbracket_j + \{ \nabla_h v_h \}_j \llbracket u_h \rrbracket_j \\ + \sigma_h \sum_{j=1}^n \llbracket u_h \rrbracket_j \llbracket v_h \rrbracket_j,$$

ahol

- $\sigma_h = \frac{C}{h^s}$ - „alkalmas” paraméter.
- Az előzőekben megfelelő paraméter választásával $0 < a_{\text{IP}}(u_h, u_h)$, ha $u_h \neq 0$ - stabil.
- $a_{\text{IP}}(u_h, u_h) := \|u_h\|_{\text{dG}}^2$ - hibabecslések ebben a normában.

Második példa

- 1 Brezzi - féle bilineáris forma - lifting operátorral - 2 dimenzióban

Második példa

1 Brezzi - féle bilineáris forma - lifting operátorral - 2 dimenzióban

- Nem akarunk éleken is integrálni, ezért $r_e : [L_1(e)]^2 \rightarrow L_1(\Omega)$ úgy, hogy minden $v_h \in V_h$ esetén

$$(r_e(\phi), v_h)_\Omega = -(\phi, \{\{v_h\}\})_e.$$

Második példa

1 Brezzi - féle bilineáris forma - lifting operátorral - 2 dimenzióban

- Nem akarunk éleken is integrálni, ezért $r_e : [L_1(e)]^2 \rightarrow L_1(\Omega)$ úgy, hogy minden $v_h \in V_h$ esetén

$$(r_e(\phi), v_h)_\Omega = -(\phi, \{\{v_h\}\})_e.$$

- Ezzel a *Brezzi - módszer*:
 Olyan $u_h \in V_h$ elemet keresünk, amelyre minden $v_h \in V_h$ -re

$$a_{IP}(u_h, v_h) = (\nabla_h u_h, \nabla_h v_h) + \sum_e c_e (r_e(\llbracket u_h \rrbracket), r_e(\llbracket v_h \rrbracket)).$$

Második példa

1 Brezzi - féle bilineáris forma - lifting operátorral - 2 dimenzióban

- Nem akarunk éleken is integrálni, ezért $r_e : [L_1(e)]^2 \rightarrow L_1(\Omega)$ úgy, hogy minden $v_h \in V_h$ esetén

$$(r_e(\phi), v_h)_\Omega = -(\phi, \llbracket v_h \rrbracket)_e.$$

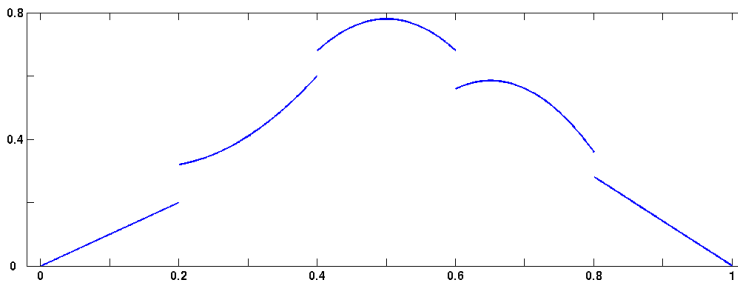
- Ezzel a *Brezzi - módszer*:
Olyan $u_h \in V_h$ elemet keresünk, amelyre minden $v_h \in V_h$ -re

$$a_{IP}(u_h, v_h) = (\nabla_h u_h, \nabla_h v_h) + \sum_e c_e (r_e(\llbracket u_h \rrbracket), r_e(\llbracket v_h \rrbracket)).$$

- c_e „jó” megválasztásával ez is stabil.

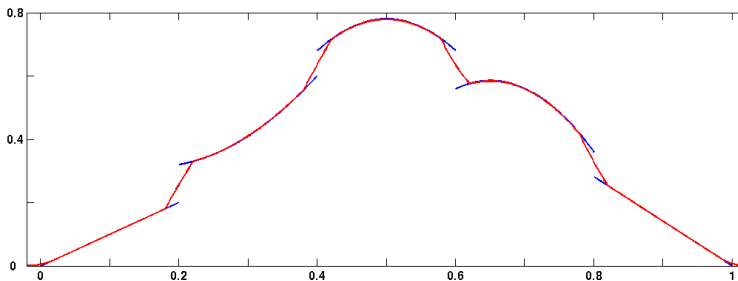
Két ábra

- Egy $P_{h,(1,2,2,2,1)}$ - beli és a megfelelő $P_{h,(1,2,2,2,1),s}$ - beli elem.

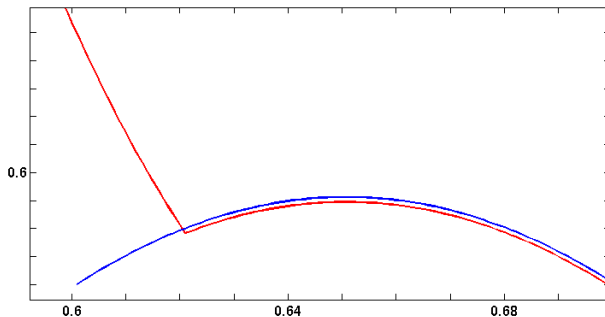


Két ábra

- Egy $P_{h,(1,2,2,2,1)}$ - beli és a megfelelő $P_{h,(1,2,2,2,1),s}$ - beli elem.



Az átlagolás szemléltetése



- Az eredeti és az átlagolt elem nagyítva.

Explicit alak

Állítás

Fennáll a következő azonosság:

$$\begin{aligned}
 a(\eta_h * u, \eta_h * v) &= (\nabla(\eta_h * u), \nabla(\eta_h * v)) \\
 &= \sum_{j=0}^n \int_{\gamma_j+h^s}^{\gamma_{j+1}-h^s} \eta_h * \nabla_h u \cdot \eta_h * \nabla_h v + \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j-h^s}^{\gamma_j+h^s} \eta_h * \nabla_h u \cdot \eta_h * \nabla_h v \\
 &\quad - \sum_{j=1}^n \llbracket u \rrbracket_j \eta_h * (\eta_h * \nabla_h v)(\gamma_j) + \llbracket v \rrbracket_j \eta_h * (\eta_h * \nabla_h u)(\gamma_j) + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2h^s} \llbracket u \rrbracket_j \llbracket v \rrbracket_j.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Tulajdonságok

- Stabil, azaz $\|\nabla(\eta_h * u)\|^2 = a(\eta_h * u, \eta_h * v)$.

Tulajdonságok

- Stabil, azaz $\|\nabla(\eta_h * u)\|^2 = a(\eta_h * u, \eta_h * v)$.
- Nincsenek benn ismeretlen konstansok.

Tulajdonságok

- Stabil, azaz $\|\nabla(\eta_h * u)\|^2 = a(\eta_h * u, \eta_h * v)$.
- Nincsenek benn ismeretlen konstansok.
- Kissé összetett.

Egy speciális esetben

Következmény

A $(0, 1)$ intervallum egyenletes h paraméterrel adott felosztásán definiált lokálisan elsőrendű dG tér esetén (1) a következő alakú:

$$\begin{aligned} (1 - 2h^{s-1})(\nabla_h u, \nabla_h v) + \sum_{j=1}^n \frac{h^s}{6} [\nabla_h u]_j [\nabla_h v]_j + 2h^s \{ \nabla_h u \}_j \{ \nabla_h v \}_j \\ - \sum_{j=1}^n [u]_j \{ \nabla_h v \}_j + [v]_j \{ \nabla_h u \}_j + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2h^s} [u]_j [v]_j. \end{aligned} \quad (2)$$

Célok az összehasonlításkor

- Az IP bilineáris forma előállítás a fenti jó tulajdonságú perturbációjaként.

Célok az összehasonlításkor

- Az IP bilineáris forma előállítására a fenti jó tulajdonságú perturbációjaként.
- Hibabecslés energia-normában (H_0^1 -normában) az IP módszer megoldásának simításából kapott közelítésre.

A két bilineáris alak

Az azonos színű a tagokat hasonlítjuk össze:

$$\begin{aligned}
 a(\eta_h * u, \eta_h * v) &= \sum_{j=0}^n \int_{\gamma_j+h^s}^{\gamma_{j+1}-h^s} \eta_h * \nabla_h u \cdot \eta_h * \nabla_h v \\
 &- \sum_{j=1}^n \llbracket u \rrbracket_j \eta_h * (\eta_h * \nabla_h v)(\gamma_j) + \llbracket v \rrbracket_j \eta_h * (\eta_h * \nabla_h u)(\gamma_j) \\
 &+ \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j-h^s}^{\gamma_j+h^s} \eta_h * \nabla_h u \cdot \eta_h * \nabla_h v + \sum_{j=1}^n \frac{1}{2h^s} \llbracket u \rrbracket_j \llbracket v \rrbracket_j . \\
 a_{\text{IP}}(u, v) &= (\nabla_h u, \nabla_h v) - \sum_{j=1}^n \{ \nabla_h u \}_j \llbracket v \rrbracket_j + \{ \nabla_h v \}_j \llbracket u \rrbracket_j \\
 &+ \sigma_h \sum_{j=1}^n \llbracket u \rrbracket_j \llbracket v \rrbracket_j ,
 \end{aligned}$$

Piros tagok

Lemma

Valamilyen c_* és c_1 konstansokra (amelyek \mathbf{k} -tól függenek, de h -tól nem) minden $u, v \in P_{h,\mathbf{k}}$ esetén

$$\left| (\nabla_h u, \nabla_h v) - \sum_{j=0}^n \int_{\gamma_j+h^s}^{\gamma_{j+1}-h^s} \eta_h * \nabla_h u \cdot \eta_h * \nabla_h v \right| \leq$$

$$\leq \left(\frac{c_*^2}{4} h^{2s-2} + (c_* + c_1) h^{s-1} \right) \sum_{j=0}^n \int_{\gamma_j+h^s}^{\gamma_{j+1}-h^s} \nabla_h u \cdot \nabla_h v.$$

Kék tagok

Lemma

Valamilyen c_0 konstansra (amely \mathbf{k} -tól függ, de h -tól nem) minden $u, v \in P_{h,\mathbf{k}}$ esetén

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j - h^s}^{\gamma_j + h^s} \eta_h * \nabla_h u \cdot \eta_h * \nabla_h v \leq \\ & \leq 2c_0 h^{s-1} \sum_{j=0}^n \|\nabla_h u\|_{\tilde{\gamma}_j} \|\nabla_h v\|_{\tilde{\gamma}_j}. \end{aligned} \tag{3}$$

Zöld tagok

Lemma

A fenti c_0 konstans esetén minden $v \in P_{h,k}$ függvényre $j = 1, 2, \dots, n$ esetén teljesül, hogy

$$\left| \eta_h * (\eta_h * \nabla_h v)(\gamma_j) - \{\{\nabla_h v\}\}_j \right| \leq \frac{\sqrt{c_0}}{2} h^{s-\frac{3}{2}} \sqrt{\int_{\gamma_j-\frac{h}{2}}^{\gamma_j+\frac{h}{2}} |\nabla_h v|^2}. \quad (4)$$

A 3 Lemma bizonyítása - vázlat

Vezessük be a $w : (-\frac{h}{2}, \frac{h}{2})$ függvényt:

$$w = \nabla_h v - \{\{\nabla_h v\}\}_0 \mathbb{1} + [\nabla_h v]_0 (H - \frac{\mathbb{1}}{2}). \quad (5)$$

Erre teljesül, hogy

$$[w](0) = [\nabla_h v](0) + [\nabla_h v]_0 \cdot 1 = 0,$$

és

$$\lim w(0+) = \nabla_h v(0+) - \{\{\nabla_h v\}\}_0 \mathbb{1} + \frac{1}{2} [\nabla_h v]_0 = 0,$$

azaz $w \in C[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$, szakaszonként polinom. Szintén igaz, hogy

$$\nabla_h w = \nabla_h \nabla_h v, \quad (6)$$

amelyeket a $(-\frac{h}{2}, 0) \cup (0, \frac{h}{2})$ halmazon vesszünk.

A 3 Lemma bizonyítása - vázlat - folyt.

A Newton–Leibniz-formula, a Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség, (6) és két korábbi eredmény felhasználásával

$$\left| \frac{1}{2h^s} \int_{-h^s}^{h^s} \eta_h * w \right| \leq \frac{\sqrt{c_0}}{2} h^{s-\frac{3}{2}} \sqrt{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} |\nabla_h v|^2}. \quad (7)$$

Továbbá (5) miatt

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2h^s} \int_{-h^s}^{h^s} \eta_h * w \right| &= \left| \frac{1}{2h^s} \int_{-h^s}^{h^s} \eta_h * \nabla_h v - \frac{1}{2h^s} \int_{-h^s}^{h^s} \{\{\nabla_h v\}\}_0 \eta_h * \mathbb{1} \right| \\ &= \left| \{\{\nabla_h v\}\}_0 - \frac{1}{2h^s} \int_{-h^s}^{h^s} \eta_h * \nabla_h v \right|, \end{aligned}$$

ezért (7) alapján

$$\left| \{\{\nabla_h v\}\}_0 - \frac{1}{2h^s} \int_{-h^s}^{h^s} \eta_h * \nabla_h v \right| \leq \frac{\sqrt{c_0}}{2} h^{s-\frac{3}{2}} \sqrt{\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \nabla_h v^2}.$$

A 3 Lemma bizonyítása - vázlat - folyt.

Hasonlóan minden γ_j esetén

$$\left| \left\{ \nabla_h v \right\}_j - \frac{1}{2h^s} \int_{\gamma_j - h^s}^{\gamma_j + h^s} \eta_h * \nabla_h v \right| \leq \frac{\sqrt{c_0}}{2} h^{s - \frac{3}{2}} \sqrt{\int_{\gamma_j - \frac{h}{2}}^{\gamma_j + \frac{h}{2}} \nabla_h v^2}, \quad (8)$$

ami bizonyítja a lemmát.

Zöld tagok - az összehasonlítás

Lemma

Minden $v \in P_{h,k}$ esetén teljesül, hogy

$$\left| \sum_{j=1}^n [u]_j \eta_h * (\eta_h * \nabla_h v)(\gamma_j) - \sum_{j=1}^n [u]_j \{ \nabla_h v \}_j \right| \leq c_1 h^{s-1} \| \nabla(\eta_h * u) \| \| \nabla(\eta_h * v) \|. \quad (9)$$

A bilineáris formák egymáshoz közeliek

Tétel

Van olyan C konstans és h_0 diszkretizációs paraméter, hogy minden $h < h_0$ és $u, v \in \mathcal{P}_{h,k}$ esetén

$$|a_{IP}(u, v) - a_\eta(u, v)| \leq Ch^{s-1} \|\nabla(\eta_h * u)\| \|\nabla(\eta_h * v)\|. \quad (10)$$

A belőlük kapott megoldások átlagolásai egymáshoz közeli

Tétel

Ha az IP módszer megoldásában $\sigma_h = \frac{1}{2h^s}$, akkor a fenti feltételekkel

$$\|\nabla(\eta_h * u_{IP} - \eta_h * u_h)\| \leq Ch^{s-1} \|\nabla(\eta_h * u_h)\| + C \|\eta_h * f - f\|. \quad (11)$$

Megjegyzés: Itt a becslések energia (H^1 -) normában adottak.

Az új módszer megoldása kvázioptimális

Lemma

Az $\eta_h * u_h$ közelítés kvázioptimális, azaz

$$\|u - \eta_h * u_h\|_1 \leq \inf_{v_h \in P_{h,k}} \|u - \eta_h * v_h\|_1 + \mathcal{O}(h^{s-1}).$$

Összefoglalás - dG módszerek felépítése

Eredeti módszer

- Vegyes formalizmus.
 - Numerikus fluxusok.
 - Oda-vissza parciális integrálás.
 - Elsődleges változó kifejezése.
- ▷ Eredmény: hibabecslés $\|\cdot\|_{DG}$ normában.

Itt javasolt módszer

- Bilineáris forma lokálisan átlagolt elemekből.
 - Egyszerűsítés az egyes tagok közelítésével.
- ▷ Eredmény: hibabecslés $\|\cdot\|_{H^1}$ normában.

További problémák, feladatok

1 s megválasztása.

További problémák, feladatok

- 1 s megválasztása.
- 2 Magasabbrendű elemek.

További problémák, feladatok

- 1 s megválasztása.
- 2 Magasabbrendű elemek.
- 3 Magasabb dimenzió.