Explicit hibabecslés Maxwell-egyenletek numerikus megoldásához

Izsák Ferenc

2007. szeptember 17.

Vázlat

- Bevezetés: a vizsgált egyenlet, a hibabecslés feladata.
- A megadott explicit hibabecslés lokális alsó korlát.
- A megadott explicit hibabecslés globális felső korlát.
- Az egyszerűbb alakú explicit hibabecslés nem használható felső korlátként.

Végeselem-közelítés

- Az alábbi PDE-t

$$\mathcal{L}u = f, \quad \mathcal{D}(\mathcal{L}) \subset H = [L_2(\Omega)]^k, f \in H$$

variációs (gyenge) alakba írva

$$(\mathcal{L}u, v) = B(u, v) = (f, v), \quad \text{ahol} \quad \mathcal{D}(B) = V \times V \subset H \times H \tag{1}$$

olyan $u \in V$ függvényt keresünk (gyenge megoldás), amelyre minden $v \in V$ esetén (1) teljesül.

- Végeseselem - közelítés: Olyan $u_h \in V_h \subset V$ függvényt keresünk, amelyre

$$B(u_h, v_h) = (f, v_h) \; \forall v \in V_h.$$

A hiba becslése

- Hiba: $e_h = u - u_h$.
- Cél: e_h becslése az adatokból, azaz olyan η_h konstrukciója, hogy

$$C_1\|e_h\|_V \le \eta_h \le C_2\|e_h\|_V.$$

- Explicit hibabecslés: η_h képlettel adott.
- Ideális eset:
  - ◇ η_h lokálisan is jól becsül, azaz

$$C_1\|e_h|_K\|_V \le \eta_h|_K \le C_2\|e_h|_K\|_V.$$

    minden $K \subset \Omega$ résztartományon.

    Alkalmazás: Ω adaptív finomítása pontosabb közelítéshez.
  - ◇ Éles becslés: $C_1 \approx C_2 \approx 1$.

A vizsgált egyenlet

- Idő-harmonikus Maxwell egyenlet “tökéletes vezető” peremfeltétellel:

$$\begin{aligned} \operatorname{curl}\operatorname{curl}\boldsymbol{E} - k^2\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{J}, \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^3 \\ \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{\nu} &= 0, \quad \text{on } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2}$$

  ▷ $\operatorname{curl}(\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3) = (\partial_y \boldsymbol{E}_3 - \partial_z \boldsymbol{E}_2, \partial_z \boldsymbol{E}_1 - \partial_x \boldsymbol{E}_3, \partial_x \boldsymbol{E}_2 - \partial_y \boldsymbol{E}_1)$.

  ▷ Ω korlátos Lipschitz-tartomány, $\boldsymbol{\nu}$ kifelé mutató normális $\partial\Omega$-n.

  ▷ $\boldsymbol{J} \in [L_2(\Omega)]^3$ adott (forrás).

A használt függvényterek

- Variációs alak

$$H(\mathrm{curl}, \Omega) = \{\boldsymbol{u} \in [L_2(\Omega)]^3 : \mathrm{curl}\, \boldsymbol{u} \in [L_2(\Omega)]^3\},$$

$$V = H_0(\mathrm{curl}, \Omega) = \{\boldsymbol{u} \in H(\mathrm{curl}, \Omega) : \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{u}|_{\partial\Omega} = 0\}$$

az energia-normával ellátva:

$$\|\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{u}\|_{\mathrm{curl},\Omega} = (\|\boldsymbol{u}\|^2_{[L_2(\Omega)]^3} + \|\mathrm{curl}\, \boldsymbol{u}\|^2_{[L_2(\Omega)]^3})^{1/2}.$$

- Feladat: Keresünk olyan $\boldsymbol{E} \in H_0(\mathrm{curl}, \Omega)$ függvényt, amelyre

$$(\mathrm{curl}\, \boldsymbol{E}, \mathrm{curl}\, \boldsymbol{v}) - k^2(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{J}, \boldsymbol{v}), \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in H_0(\mathrm{curl}, \Omega).$$

Végeselem-közelítés: $\boldsymbol{E}_h$ kiszámítása

- A végeselem-megoldás olyan $\boldsymbol{E}_h \in H_0^h(\mathrm{curl}, \Omega) \subset H_0(\mathrm{curl}, \Omega)$ függvény, amelyre minden $\boldsymbol{v}_h \in H_0^h(\mathrm{curl}, \Omega)$ esetén

$$B(\boldsymbol{E}_h, \boldsymbol{v}_h) := \mathrm{curl}\, \boldsymbol{E}_h, \mathrm{curl}\, \boldsymbol{v}_h) - k^2(\boldsymbol{E}_h, \boldsymbol{v}_h) = (\boldsymbol{J}, \boldsymbol{v}_h),$$

ahol pl. $V_h = H_0^h(\mathrm{curl}, \Omega)$ az *első rendű* Nédélec-féle végeselem-tér:

▷ a $\mathcal{T}_h$-val jelölt *nem-degenerált* tetraéder-felosztáson definiált,

▷ az egységszimplexen az alábbi bázisfüggvényekkel (ξ, ζ, η jelöli a koordinátákat):

$$(1-\eta-\zeta, \xi, \xi)^T, \ (\eta, 1-\xi-\zeta, \eta)^T, \ (\zeta, \zeta, 1-\xi-\eta)^T$$
$$\sqrt{2}(-\eta, \xi, 0)^T, \sqrt{2}(\zeta, 0, -\xi)^T, \sqrt{2}(0, -\zeta, \eta)^T.$$

▷ Tetszőleges tetraéderen: affin transzformációval definiáljuk.

▷ $V_h = H_0^h$: Az egyes tetraédereken a fenti, a közÓs lapokon az érintő irányú komponens folytonos, $\partial\Omega$-n az érintő irányú komponens nulla.

A hibabecslés, jelölések

- Az $\boldsymbol{e}_h = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_h)|_K$ hibára teljesül:

$$B(\boldsymbol{e}_h, \boldsymbol{v}_h) = B(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{v}_h) - B(\boldsymbol{E}_h, \boldsymbol{v}_h) = (\boldsymbol{J}, \boldsymbol{v}_h) - (\boldsymbol{J}, \boldsymbol{v}_h) = 0. \tag{3}$$

- Dekompozíció: $H_0(\mathrm{curl}, \Omega) \ni \boldsymbol{v} = \nabla\phi + \boldsymbol{z} \Rightarrow \mathrm{curl}\, \boldsymbol{v} = \mathrm{curl}\, \boldsymbol{z}$
- Green-formula:

$$(\mathrm{curl}\, \boldsymbol{E}, \mathrm{curl}\, \boldsymbol{v})_K = (\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{v})_K - \sum_{l_j \subset \partial K} (\boldsymbol{\nu}_j \times \mathrm{curl}\, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{v})_{l_j}.$$

◇ K és K_j szomszédos tetraéderek; $l_j = \bar{K} \cap \bar{K}_j$ a közös lapjuk,

◇ $\boldsymbol{\nu}_j$: a K-ról l_j-n kifelé mutató normális.

A hibára vonatkozó bilineáris forma

$$
\begin{aligned}
B(\boldsymbol{e}_h, \boldsymbol{v}) &= (\boldsymbol{J}, \boldsymbol{v}) - ((\mathrm{curl}\ \boldsymbol{E}_h, \mathrm{curl}\ \boldsymbol{v}) - k^2(\boldsymbol{E}_h, \boldsymbol{v})) \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\boldsymbol{J}, \nabla\Phi + \boldsymbol{z})_K - ((\mathrm{curl}\ \boldsymbol{E}_h, \mathrm{curl}\ \boldsymbol{z})_K - k^2(\boldsymbol{E}_h, \nabla\Phi + \boldsymbol{z})_K) \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\boldsymbol{J}, \nabla\Phi + \boldsymbol{z})_K - (\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\ \boldsymbol{E}_h - k^2\boldsymbol{E}_h, \boldsymbol{z})_K - k^2(\boldsymbol{E}_h, \nabla\Phi)_K \\
&+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{l_j \subset K} (\boldsymbol{\nu_j} \times \mathrm{curl}\ \boldsymbol{E}_h, \boldsymbol{z})_{l_j} \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\boldsymbol{J} - (\mathrm{curl}\,\mathrm{curl}\ \boldsymbol{E}_h - k^2\boldsymbol{E}_h), \boldsymbol{z})_K - (\mathrm{div}\ (\boldsymbol{J} + k^2\boldsymbol{E}_h), \Phi)_K \\
&+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{l_j \subset K} (\boldsymbol{\nu_j} \times \mathrm{curl}\ \boldsymbol{E}_h, \boldsymbol{z})_{l_j} + (\boldsymbol{\nu_j} \cdot (\boldsymbol{J} + k^2\boldsymbol{E}_h), \Phi)_{l_j}.
\end{aligned}
$$

A peremtagok összege

Jelölés az elemek közti "ugrásra":

$$[\![g]\!](\boldsymbol{x}) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x} \\ (\boldsymbol{x}_n) \subset K_i}} g(\boldsymbol{x}_n) - \lim_{\substack{\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x} \\ (\boldsymbol{x}_n) \subset K_j}} g(\boldsymbol{x}_n),$$

ahol $\boldsymbol{x} \in \partial K_i \cap \partial K_j$, és $\boldsymbol{x} \in \bar{\Omega}$ esetén nulla a külső oldalról vett limesz. A tetraéder-lapokon (ezek únióját jel. Γ) kapott tagokat összevonva:

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{l_j \subset K} (\boldsymbol{\nu}_j \times \operatorname{curl} \boldsymbol{E}_h, \pi_\tau \boldsymbol{z})_{l_j} + (\boldsymbol{\nu}_j \cdot (\boldsymbol{J} + k^2 \boldsymbol{E}_h), \Phi)_{l_j}$$

$$= \sum_{l \in \Gamma_h} (\boldsymbol{\nu} \times [\![\operatorname{curl} \boldsymbol{E}_h]\!], \pi_\tau \boldsymbol{z})_l + (\boldsymbol{\nu} \cdot [\![\boldsymbol{J} + k^2 \boldsymbol{E}_h]\!], \Phi)_l,$$

ahol $\boldsymbol{\nu}$ az ugrás irányának megfelelő l-en.

Jelölések az egyes reziduálisokra

$$\boldsymbol{r}_1|_K = \boldsymbol{r}_{1,K} = \boldsymbol{J} - \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E}_h + k^2 \boldsymbol{E}_h|_K,$$

$$r_2|_K = r_{2,K} = \operatorname{div}\,(\boldsymbol{J} + k^2 \boldsymbol{E}_h)|_K,$$

$$\boldsymbol{R}_1|_K = \boldsymbol{R}_{1,K} = \sum_{l_j \subset \partial K} \boldsymbol{R}_{1,l_j} = \sum_{l_j \subset \partial K} \boldsymbol{\nu}_j \times [\![\mathrm{curl}\, \boldsymbol{E}_h]\!]|_{l_j},$$

$$R_2|_K = R_{2,K} = \sum_{l_j \subset \partial K} R_{2,l_j} = \sum_{l_j \subset \partial K} \boldsymbol{\nu}_j \cdot [\![\boldsymbol{J} + k^2 \boldsymbol{E}_h]\!]|_{l_j}.$$

- “Reziduális” jelentése:

$$\boldsymbol{E}_h = \boldsymbol{E} \Rightarrow \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{0},\, r_2 = R_2 = 0.$$

A bilineáris alak a reziduálisokkal

$$B(\boldsymbol{e}_h, \boldsymbol{v}) = \sum_{K \subset \mathcal{T}_h} (\boldsymbol{r}_{1,K}, \boldsymbol{z})_K + (r_{2,K}, \Phi)_K + \sum_{l \in \Gamma_h} (\boldsymbol{R}_{1,l}, \boldsymbol{z})_l + (R_{2,l}, \Phi)_l, \qquad (4)$$

és az alábbi hibaindikátort vezetjük be:

$$\eta_K^2 = h^2 (\|\boldsymbol{r}_1\|^2_{[L_2(K)]^3} + \|r_2\|^2_{L_2(K)}) + h(\|\boldsymbol{R}_1\|^2_{[L_2(K)]^3} + \|R_2\|^2_{L_2(K)}), \qquad (5)$$

valamint a következő globális hibaindikátort:

$$\eta^2_{\mathcal{T}_h} = \sum_{K \subset \mathcal{T}_h} \eta_K^2. \qquad (6)$$

Ld. “a hiba becslése”.

A hibaindikátor lokális alsó korlát

Alapgondolat:

- (4)-ben válasszuk meg jól a $\boldsymbol{v}$ komponenst!
- Becsüljük így az egyes tagokat külön-külön!

Példák:

- Ha $w \in H_0^1(K)$, akkor (4) így egyszerűsödik:

$$B(\boldsymbol{e}_h, \nabla w) = (r_{2,K}, w)_K. \tag{7}$$

- Ha $w \in H_0^1(\tilde{K})$ és $\operatorname{supp} w \subset K \cup K_j$, akkor (4) így egyszerűsödik:

$$B(\boldsymbol{e}_h, \nabla w) = (r_{2,K}, w)_{\tilde{K}} + (R_2, w)_{l_j}. \tag{8}$$

Az alsó becslés pontos alakja

Jelölések:

- $\tilde{K} = \{\cup K_j \subset \mathcal{T}_j : \bar{K}_j \cap \bar{K} \neq \emptyset\}$
- $\bar{\boldsymbol{r}}_1, \bar{r}_2, \bar{\boldsymbol{R}}_1, \bar{R}_2$ a reziduálisok végeselem-approximációi.

Tétel 1 *η_h lokális alsó korlátja a hibának, azaz*

$$\eta_K^2 \leq C \Big((1+k^2)^2 \|\boldsymbol{e}_h\|^2_{\mathrm{curl},\tilde{K}} + h^2 (\|\bar{\boldsymbol{r}}_1 - \boldsymbol{r}_1\|^2_{[L_2(\tilde{K})]^3} + \|\bar{r}_2 - r_2\|^2_{L_2(\tilde{K})}) + h(\|\bar{\boldsymbol{R}}_1 - \boldsymbol{R}_1\|^2_{[L_2(\partial K)]^3} + \|\bar{R}_2 - R_2\|^2_{L_2(\partial K)}) \Big) , \tag{9}$$

ahol $h_K =$ diam K és C egy h_K-tól k-tól független konstans.

Megjegyzés: C más és más lehet az egyes becslésekben, h-tól nem függ, csak K "alakjától"..

Megjegyzés a tételhez, egyenlőtlenségek a bizonyításhoz

- Ha az alábbiak teljesülnek

$$\|\bar{\boldsymbol{r}}_1 - \boldsymbol{r}_1\|^2_{[L_2(\tilde{K})]^3} = O(h^3), \quad \|\bar{r}_2 - r_2\|^2_{L_2(\tilde{K})} = O(h^3),$$

$$\|\bar{\boldsymbol{R}}_1 - \boldsymbol{R}_1\|^2_{[L_2(\partial K)]^3} = O(h^2), \quad \|\bar{R}_2 - R_2\|^2_{L_2(\partial K)} = O(h^3),$$

akkor a (9) becslés jól használható: a jobb oldal $\sim (1+k^2)^2\|\boldsymbol{e}_h\|^2_{\mathrm{curl},\tilde{K}}$.

- Használjuk a bizonyításhoz a következő egyenlőtlenségeket rögzített Ψ_K esetén:

$$\|\bar{r}_2\|^2_{L_2(K)} \leq C(\bar{r}_2, \Psi_K \bar{r}_2)_K \tag{10}$$

$$\|\Psi_K \bar{r}_2\|_{L_2(K)} \leq C\|\bar{r}_2\|_{L_2(K)} \tag{11}$$

$$\|\nabla(\Psi_K \bar{r}_2)\|_{L_2(K)} \leq Ch^{-1}\|\bar{r}_2\|_{L_2(K)} \tag{12}$$

◇ Bizonyítás: kihasználjuk, hogy $\mathcal{T}_h$ nem-degenerált.

A bizonyítás egy része

$$
\begin{aligned}
\|\bar{r}_2\|^2_{L_2(K)} &\leq C(\bar{r}_2, \Psi_K \bar{r}_2)_K = C\left((\bar{r}_2 - r_2, \Psi_K \bar{r}_2)_K + (r_2, \Psi_K \bar{r}_2)_K\right) \\
&\leq C(\|\Psi_K \bar{r}_2\|_{L_2(K)} \|\bar{r}_2 - r_2\|_{L_2(K)} - B(\boldsymbol{e}_h, \nabla \Psi_K \bar{r}_2)) \\
&\leq C(\|\Psi_K \bar{r}_2\|_{L_2(K)} \|\bar{r}_2 - r_2\|_{L_2(K)} \\
&\quad + (1 + k^2)\|\boldsymbol{e}_h\|_{\mathrm{curl},K} \|\nabla \Psi_K \bar{r}_2\|_{L_2(K)}) \\
&\leq C(\|\bar{r}_2\|_{L_2(K)} \|\bar{r}_2 - r_2\|_{L_2(K)} \\
&\quad + (1 + k^2)\|\boldsymbol{e}_h\|_{\mathrm{curl},K} h^{-1} \|\bar{r}_2\|_{L_2(K)}) \\
\Rightarrow \|\bar{r}_2\|_{L_2(K)} &\leq C(\|\bar{r}_2 - r_2\|_{L_2(K)} + (1 + k^2) h^{-1} \|\boldsymbol{e}_h\|_{\mathrm{curl},K})
\end{aligned} \tag{13}
$$

$$
\Rightarrow h^2 \|\bar{r}_2\|^2_{L_2(K)} \leq C(h^2 \|\bar{r}_2 - r_2\|^2_{L_2(K)} + (1 + k^2)^2 \|\boldsymbol{e}_h\|^2_{\mathrm{curl},K}) \tag{14}
$$

A bizonyítás egy része (folytatás)

Hasonló technikával kapjuk az

$$\begin{aligned}\|R_2\|_{L_2(l)} \leq C(&\|\bar{R}_2 - R_2\|_{L_2(l)} \\ &+ h^{-\frac{1}{2}}(1+k^2)\|\boldsymbol{e}_h\|_{\mathrm{curl},\tilde{K}} + h^{\frac{1}{2}}\|r_2\|_{L_2(\tilde{K})}),\end{aligned}$$

amiből (14) segítségével

$$\begin{aligned}\|R_2\|_{L_2(l)} \leq C(&\|\bar{R}_2 - R_2\|_{L_2(l)} \\ &+ h^{-\frac{1}{2}}(1+k^2)\|\boldsymbol{e}_h\|_{\mathrm{curl},\tilde{K}} + h^{\frac{1}{2}}\|r_2 - \bar{r}_2\|_{L_2(\tilde{K})}).\end{aligned}$$

Hasonlóan az $\boldsymbol{r}_1$ és $\boldsymbol{R}_1$ reziudálisokra is; összeadva a becsléseket kapjuk (9)-t. $\square$

Egy egyszerűbb bilineáris forma a hibára

$$
\begin{aligned}
B(\boldsymbol{e}_h, \boldsymbol{v}) &= (\boldsymbol{J}, \boldsymbol{v}) - ((\text{curl}\ \boldsymbol{E}_h, \text{curl}\ \boldsymbol{v}) - k^2(\boldsymbol{E}_h, \boldsymbol{v})) \\
&= (\boldsymbol{J}, \boldsymbol{v}) - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\text{curl curl}\ \boldsymbol{E}_h - k^2 \boldsymbol{E}_h, \boldsymbol{v})_K - k^2(\boldsymbol{E}_h, \boldsymbol{v})_K \\
&+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{l_j \subset K} (\nu_j \times \text{curl}\ \boldsymbol{E}_h, \boldsymbol{v})_{l_j} \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\boldsymbol{J} - (\text{curl curl}\ \boldsymbol{E}_h - k^2 \boldsymbol{E}_h), \boldsymbol{v})_K + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{l_j \subset K} (\nu_j \times \text{curl}\ \boldsymbol{E}_h, \boldsymbol{v})_{l_j} \\
&= \sum_{K \subset \mathcal{T}_h} (\boldsymbol{r}_{1,K}, \boldsymbol{v})_K + \sum_{l \in \Gamma_h} (\boldsymbol{R}_{1,l}, \boldsymbol{v})_l .
\end{aligned}
$$

Egy egyszerűbb alsó hibabecslés

Felhasználva a tagonkénti becsléseket, (9) bal oldalát csökkentve ismét alsó hibabecslést kapunk összhangban a (15) formulával:

$$\begin{aligned}\zeta_K^2 &:= h^2\|\boldsymbol{r}_1\|^2_{[L_2(K)]^3} + h\|\boldsymbol{R}_1\|^2_{[L_2(K)]^3} \\ &\leq C((1+k^2)^2\|\boldsymbol{e}_h\|^2_{\mathrm{curl},\tilde{K}} + h^2\|\bar{\boldsymbol{r}}_1 - \boldsymbol{r}_1\|^2_{[L_2(\tilde{K})]^3} + h\|\bar{\boldsymbol{R}}_1 - \boldsymbol{R}_1\|^2_{[L_2(\partial K)]^3}).\end{aligned}$$

- Ez nem használható hibabecslésként?

Felső hibakorlát

Tétel 2 *η_h felső korlátja is a hibának, azaz*

$$\|\boldsymbol{e}_h\|_{\mathrm{curl}} \le C\eta_K^2. \tag{15}$$

Próbálkozás - elliptikus problémákra jó: Inf-sup becslés + (3) + interpolációs becslés:

$$\|\boldsymbol{e}_h\|_{\mathrm{curl}}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{curl}} \le B(\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{v}) = B(\boldsymbol{e}_h,\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h)$$

$$= \sum_{K\subset\mathcal{T}_h}(\boldsymbol{r}_{1,K},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h)_K + \sum_{l\in\Gamma_h}(\boldsymbol{R}_{1,l},\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h)_l$$

$$\le \sum_{K\subset\mathcal{T}_h}\|\boldsymbol{r}_{1,K}\|_{[L_2(K)]^3}\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h\|_{[L_2(K)]^3} + \sum_{l\in\Gamma_h}\|\boldsymbol{R}_{1,l}\|_{[L_2(l)]^3}\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h\|_{[L_2(l)]^3}$$

$$\le \sum_{K\subset\mathcal{T}_h}\|\boldsymbol{r}_{1,K}\|_{[L_2(K)]^3}h^{s_1}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{curl},K} + \sum_{l\in\Gamma_h}\|\boldsymbol{R}_{1,l}\|_{[L_2(l)]^3}h^{s_1}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{curl},K}.$$

Módosítás - “interpolációs” tétel

- Lokális becslés ($\sim$ Pasciak & Zhao ‘02):
Tetszőleges $\boldsymbol{v} \in H(\mathrm{curl}, \Omega) \cap H(\mathrm{div}, \Omega)$ esetén

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{z} + \nabla \Phi$$

alakba írható, ahol $\boldsymbol{z} \in H_0^1(\Omega)$, továbbá

$$\|\boldsymbol{z}\| + \|\Phi\|_1 \leq C\|\boldsymbol{v}\| \quad \text{és} \quad \|\boldsymbol{z}\|_1 \leq C\|\mathrm{curl}\, \boldsymbol{v}\|. \tag{16}$$

- Globális becslés ($\sim$ Schöberl ‘07):
Létezik olyan $\Pi_{\mathrm{curl}} : \boldsymbol{v} \in H(\mathrm{curl}, \Omega) \cap H(\mathrm{div}, \Omega) \longrightarrow H_h(\mathrm{curl}, \Omega)$, hogy minden $\boldsymbol{v} \in H(\mathrm{curl}, \Omega) \cap H(\mathrm{div}, \Omega)$ esetén

$$\Pi_h \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{z}_h + \nabla \Phi_h$$

alakba írható, ahol $\boldsymbol{z} \in H_0^1(\Omega)$, továbbá

$$h_{\tilde{K}}^{-1} \|\Phi_h\|_{L_2(K)} + \|\nabla \Phi_h\|_{[L_2(K)]^3} \leq C \|\boldsymbol{v}\|_{\tilde{K}} \tag{17}$$

és

$$h_{\tilde{K}}^{-1} \|\boldsymbol{z}_h\|_{[L_2(K)]^3} + \|\nabla \boldsymbol{z}_h\|_{[L_2(K)]^{3\times 3}} \leq C \|\mathrm{curl}\, \boldsymbol{v}\|_{[L_2(\tilde{K})]^3}. \tag{18}$$

Megjegyzés: A bizonyítás hosszadalmas; konkrét konstrukció. Lehet egyszerűbben?

- Egy nyom-tétel:

$$\|v_{l_j}\|_{L_2(l_j)} \leq C h_K^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{h_K^2} \|v\|^2_{L_2(K)} + h_K \|\nabla v\|^2_{[L_2(K)]^3}\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{19}$$

A 2. tétel bizonyítása (kivonat)

$$\|\boldsymbol{e}_h\|_{\mathrm{curl}}\|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{curl}} \leq \sum_{K\in\mathcal{T}_h} B_K(\boldsymbol{e}_h, \boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_h)$$

$$= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} (\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{z}_h)_K + (r_2, \Phi_h)_K + \sum_{l\in\Gamma_h} (\boldsymbol{R}_{1,l}, \boldsymbol{z}_h)_l + (R_{2,l}, \Phi_h)_l$$

$$= \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|\boldsymbol{r}_1\|_{[L_2(K)]^3}\|\boldsymbol{z}_h\|_{[L_2(K)]^3} + \|r_2\|_{L_2(K)}\|\Phi_h\|_{L_2(K)}$$

$$+ \sum_{l\in\Gamma_h} \|\boldsymbol{R}_1\|_{[L_2(l)]^3}\|\boldsymbol{z}_h\|_{[L_2(l)]^3} + \|R_{2,l}\|_{L_2(l)}\|\Phi_h\|_{L_2(l)}$$

$$\leq \sum_{K\in\mathcal{T}_h} h_K\|\boldsymbol{r}_1\|_{[L_2(K)]^3}\frac{1}{h_K}\|\boldsymbol{z}_h\|_{[L_2(K)]^3} + h_K\|r_2\|_{L_2(K)}\frac{1}{h_K}\|\Phi_h\|_{L_2(K)}$$

$$+\sum_{l\in\Gamma_h} h_K^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{R}_1\|_{[L_2(l)]^3}\left(\frac{1}{h_K^2}\|\boldsymbol{z}_h\|^2_{[L_2(K)]^3}+\|\nabla\boldsymbol{z}_h\|^2_{[L_2(K)]^{3\times3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+h_K^{\frac{1}{2}}\|R_{2,l}\|_{L_2(l)}\left(\frac{1}{h_K^2}\|\Phi\|^2_{L_2(K)}+\|\nabla\Phi\|^2_{[L_2(K)]^3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le\left(\frac{1}{h_K^2}\|\boldsymbol{z}_h\|^2_{[L_2(K)]^3}+\|\nabla\boldsymbol{z}_h\|^2_{[L_2(K)]^{3\times3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\cdot\left(\sum_{l\in\Gamma_h} h_K^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{R}_1\|_{[L_2(l)]^3}+\sum_{K\subset\mathcal{T}_h} h_k\|\boldsymbol{r}_1\|_{[L_2(K)]^3}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{h_K^2}\|\Phi\|^2_{L_2(K)}+\|\nabla\Phi\|^2_{[L_2(K)]^3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{l\in\Gamma_h} h_K^{\frac{1}{2}}\|R_2\|_{L_2(l)}+\sum_{K\subset\mathcal{T}_h} h_k\|r_2\|_{L_2(K)}\right)$$

$$\le C\|\mathrm{curl}\,\boldsymbol{v}\|_{[L_2(K)]^3}\left(\sum_{l\in\Gamma_h} h_K^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{R}_1\|_{[L_2(l)]^3}+\sum_{K\subset\mathcal{T}_h} h_k\|\boldsymbol{r}_1\|_{[L_2(K)]^3}\right)$$

$$+ \|\boldsymbol{v}\|_{[L_2(K)]^3} (\sum_{l \in \Gamma_h} h_K^{\frac{1}{2}} \|R_2\|_{L_2(l)} + \sum_{K \subset \mathcal{T}_h} h_k \|r_2\|_{L_2(K)})$$

$$\leq C(\|\mathrm{curl}\ \boldsymbol{v}\|_{[L_2(K)]^3} + \|\boldsymbol{v}\|_{[L_2(K)]^3})^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\sum_{l \in \Gamma_h} h_K (\|\boldsymbol{R}_1\|^2_{[L_2(l)]^3} + \|R_2\|^2_{L_2(l)}) + \sum_{K \subset \mathcal{T}_h} h_k^2 (\|\boldsymbol{r}_1\|^2_{[L_2(K)]^3} + \|r_2\|^2_{[L_2(K)]^3}) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C \|\boldsymbol{v}\|_{\mathrm{curl}}$$

$$\left(\sum_{l \in \Gamma_h} h_K (\|\boldsymbol{R}_1\|^2_{[L_2(l)]^3} + \|R_2\|^2_{L_2(l)}) + \sum_{K \subset \mathcal{T}_h} h_k^2 (\|\boldsymbol{r}_1\|^2_{[L_2(K)]^3} + \|r_2\|^2_{[L_2(K)]^3}) \right)^{\frac{1}{2}} .$$

$\square$

Egy egyszerűbb hibaindikátor

- Az egyszerűbb alsó korlát (ζ_K) nem lesz felső hibakorlát is?
- Valamilyen $\alpha, \beta > 0$ esetén lehet felső hibakorlát az alábbi?

$$\zeta^2_{K,\alpha,\beta} := h_K^{2\alpha} \|\boldsymbol{r}_1\|^2_{[L_2(K)]^3} + \sum_{l_j \subset K} h_K^{\beta} \|\boldsymbol{R}_1\|^2_{[L_2(l_j)]^3}. \qquad (20)$$

- Negatív válasz:

Tétel 3 *A* (20) *hibaindikátor nem lehet felső korlát semmilyen* $\alpha, \beta > 0$ *esetén sem.*

A hiba alakja egy speciális esetben

Lemma 1 *Ha* $\boldsymbol{J} = \nabla p$ *és* $\boldsymbol{E}_h = \nabla \tilde{p}$ *valamilyen* $p, \tilde{p} \in H_0^1(\Omega)$ *esetén, akkor*

$$\|\boldsymbol{e}_h|_K\|^2_{\mathsf{curl}} = \frac{1}{k^2}\|\boldsymbol{r}_K\|^2_{[L_2(\Omega)]^3}, \tag{21}$$

valamint

$$\eta^2_{h,\alpha,\beta} = \sum_{K\subset\mathcal{T}_h} h_K^{2\alpha}\|\boldsymbol{r}_K\|^2_{[L_2(\Omega)]^3}. \quad \square \tag{22}$$

- Cél a továbbiakban: A fenti lemmának megfelelő $\boldsymbol{J}$ konstrukciója.

A végeselem-tér dekompozíciója és tulajdonságai

$$H_0^h(\mathrm{curl}, \Omega) = H_{1,h} \oplus H_{2,h}, \tag{23}$$

- $H_{1,h} = \{\nabla p_h : p_h \in H_0^1(\Omega), p_h|_K \in P_{p,K}\}$, ahol $P_{p,K}$ a K-n értelemezett p-ed rendű polinomok halmaza.
- $H_{2,h}$ az (curl vagy L_2-) ortogonális komplementer:

$$H_{2,h} = \{\boldsymbol{u} \in \mathcal{N}_{p,h} : \boldsymbol{u} \perp H_{1,h}\},$$

és teljesülnek az alábbiak:

◇ $H_{1,h_1} \subset H_{1,h_2}$ minden $h_1 \leq h_2$ esetén.

◇ $\dim H_{1,h_n} \longrightarrow \infty$, ha $h_n \longrightarrow 0$.

Az ellenpélda konstrukciója

Lemma 2 *Létezik olyan* $\boldsymbol{J} \in H(\mathsf{curl}, \Omega) \cap H(\mathsf{div}, \Omega)$, *amelyre* $\boldsymbol{J} \notin H_{1,h}$ *minden* $h \in \mathcal{H}$ *esetén, de* $\boldsymbol{J} \perp H_{2,h}$ *minden* $h \in \mathcal{H}$*-re.*

Bizonyítás:

1. Tetsz. $0 \neq \hat{\boldsymbol{q}}_1 \in H_{1,h_1}$ esetén legyen

$$\boldsymbol{q}_1 = \frac{1}{2} \frac{\hat{\boldsymbol{q}}_1}{\|\hat{\boldsymbol{q}}_1\|_{\mathrm{curl}} + \|\hat{\boldsymbol{q}}_1\|_{\mathrm{div}}} \perp H_{2,h_1}.$$

2. Legyen h_2 olyan, hogy

$$\dim H_{1,h_2} > \dim H_{1,h_1} + \dim H_{2,h_1},$$

és valamilyen $\hat{\boldsymbol{q}}_2 \perp H_{1,h_1}, \quad \hat{\boldsymbol{q}}_2 \perp H_{2,h_1}$ esetén:

$$\boldsymbol{q}_2 = \frac{1}{2^2} \frac{\hat{\boldsymbol{q}}_2}{\|\hat{\boldsymbol{q}}_2\|_{\mathrm{curl}} + \|\hat{\boldsymbol{q}}_2\|_{\mathrm{div}}}.$$

3. Legyen h_n olyan, hogy

$$\dim H_{1,h_n} > \dim H_{1,h_{n-1}} + \dim H_{2,h_{n-1}};$$

ekkor $\hat{\boldsymbol{q}}_2 \perp H_{1,h_1}, \quad \hat{\boldsymbol{q}}_2 \perp H_{2,h_1}$ esetén:

$$\boldsymbol{q}_n := \frac{1}{2^n} \frac{\hat{\boldsymbol{q}}_n}{\|\hat{\boldsymbol{q}}_n\|_{\mathrm{curl}} + \|\hat{\boldsymbol{q}}_n\|_{\mathrm{div}}}.$$

A keresett $\boldsymbol{J}$-t az alábbi sor adja meg:

$$\boldsymbol{J} = \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{q}_i. \quad \square$$

A 3. tétel bizonyítása

$\nabla H_0^1(\Omega)$ zárt a $\|\cdot\|_{\mathrm{curl}}$ normában $\Rightarrow \boldsymbol{J} \in \nabla H_0^1(\Omega)$.

$\boldsymbol{q}_i \perp H_{1,h_j}$, ha $i > j \Rightarrow$

$$(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{v}_{h_j})_\Omega = (\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2 + \cdots + \boldsymbol{q}_j, \boldsymbol{v}_{h_j}),$$

ezért az alábbi probléma

$$(\mathrm{curl}\, \boldsymbol{E}_{h_j}, \mathrm{curl}\, \boldsymbol{v}_{h_j})_\Omega - k^2(\boldsymbol{E}_{h_j}, \boldsymbol{v}_{h_j})_\Omega = (\boldsymbol{J}, \boldsymbol{v}_{h_j})_\Omega \tag{24}$$

megoldása (amely egyértelmű)

$$\boldsymbol{E}_{h_j} = -\frac{1}{k^2}(\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2 + \cdots + \boldsymbol{q}_j).$$

Ezért $\mathrm{curl}\, \boldsymbol{E}_{h_j} = 0$, és az 1. **Lemma** szerint

$$\lim_{h_j \to 0} \frac{\eta^2_{h_j,\alpha,\beta}}{\|\boldsymbol{e}_{h_j}\|^2_{\mathrm{curl}}} = \lim_{h_j \to 0} \frac{\max_{K \subset \mathcal{T}_{h_j}} h_K^{2\alpha} \sum_{K \subset \mathcal{T}_{h_j}} h_K^{2\alpha} \|\boldsymbol{r}_K\|^2_{[L_2(\Omega)]^3}}{\|\boldsymbol{e}_{h_j}\|^2_{[L_2(\Omega)]^3}}$$

$$\leq \lim_{h_j \to 0} k^2 \max_{K \subset \mathcal{T}_{h_j}} h_K^{2\alpha} \frac{\sum_{K \subset \mathcal{T}_{h_j}} \|\boldsymbol{e}_h|_K\|^2_{[L_2(\Omega)]^3}}{\|\boldsymbol{e}_{h_j}\|^2_{[L_2(\Omega)]^3}} = \lim_{h_j \to 0} \max_{K \subset \mathcal{T}_{h_j}} h_K^{2\alpha} = 0. \quad \square$$