

# Interpolációs operátorok Szoboljev-terekben

Izsák Ferenc

2007. szeptember 17.

## Vázlat

- Bevezetés: motiváció, véges elem módszerek.
- Pldk, eredmények az irodalomban.
- ◇ Az interpolációs operátor konstrukciója.
- ◇ Az optimális közelítés igazolása.

## Motiváció: végeselem-közelítés

- Az alábbi PDE-t

$$\mathcal{L}u = f, \quad \mathcal{D}(\mathcal{L}) \subset H = [L_2(\Omega)]^k, \quad f \in H$$

variációs (gyenge) alakba írva

$$(\mathcal{L}u, v) = B(u, v) = (f, v), \quad \text{ahol } \mathcal{D}(B) = V \times V \subset H \times H \quad (1)$$

olyan  $u \in V$  függvényt keresünk (gyenge megoldás), amelyre minden  $v \in V$  esetén (1) teljesül.

- Végeselem - közelítés: Olyan  $u_h \in V_h \subset V$  függvényt keresünk, amelyre

$$B(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v \in V_h.$$

## Motivci: végeelem-közelítés (folytats)

- A szmols sorn  $(f, v_h)$  helyett  $(f_h, v_h)$ , ahol  $f_h \in V_h$ . Hogy vlasszuk  $f_h$ -t?
- Idfgg feladatok FE megoldsa:

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) = Au(t, x) & (t, x) \in (0, T) \times \Omega \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \Omega \\ u(t, x) = 0 & (t, x) \in (0, T) \times \partial\Omega \end{cases}$$

Idbeli diszkretizci utn:  $u(t_n, \cdot) \in V_h$ .

- Mi legyen a kezdeti felttelnek megfelel elem  $V_h$ -ban?
- Italnosan: adott egy  $V_h \subset V$  vges dimenzis altr. Definiljunk egy “knnyen kiszmmthat”  $\Pi : V \rightarrow V_h$  interpolcis opertort.

## Pldk vgeselem-interpolcira I.

- Lagrange-bzisfggvnyek egy dimenziban.

- ▷  $\Omega = (0, 1)$

- ▷  $V = H_0^1(\Omega)$

- ▷

$$V_h = \{f \in C_0[0, 1] : f|_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]} \text{ lineris } k = 0, 1, \dots, n-1\}.$$

- ▷ Egy bzis:  $\{f_k\}_{k=1}^{n-1}$  "kalapfggvnyek".

- ▷ Egy **dulis bzis**:  $\{\Delta_k\}$  Dirac-disztribcik, amelyekre

- $\Delta_k(g) = g(\frac{k}{n})$

- $\Delta_i(f_j) = \delta_{ij}$ .

- Interpolci:

$$\Pi(\phi) = \sum_{j=0}^n \Delta_j(\phi) f_j = \sum_{k=0}^n \phi\left(\frac{k}{n}\right) f_k.$$

- Ez valóban projekció, mert  $f = \sum_{k=0}^n a_k f_k$  esetén

$$\Pi(\phi) = \sum_{j=0}^n \Delta_j \left( \sum_{k=0}^n a_k f_k \right) f_j = \sum_{j=0}^n a_j \Delta_j(f_j) f_j = \sum_{j=0}^n a_j f_j.$$

## Pldk vgeselem-interpolcira I.

- Magasabbrend Lagrange-bzisfggvnyek egy dimenziban.

- ▷  $\Omega = (0, 1)$

- ▷  $V = H_0^1(\Omega)$

- ▷

$$V_h = \{f \in C_0^1[0, 1] : f|_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]} \text{ lineris } k = 0, 1, \dots, n-1\}.$$

- ▷ Egy bzis:  $\{f_{(j,k)}\}$ ,  $j = 0, 1$  fggvnyek (ksbb definiljuk ezeket).

- ▷ Egy **dulis bzis**:  $\{\Delta_{(j,k)}\}$ ,  $j = 0, 1$  Dirac-disztribcik, amelyekre

- $\Delta_{(j,k)}(g) = g^{(j)}(\frac{k}{n})$

- $\Delta_{(j,k)}(f_{(i,l)}) = \delta_{(j,k),(i,l)}$ .

- Interpolci:

$$\Pi(\phi) = \sum_{j,k} \Delta_{(j,k)}(\phi) f_{(j,k)} = \sum_{(j,k)} \phi^{(j)}(\frac{k}{n}) f_{(j,k)}.$$

- Ez is projekció lesz, fent csak azt használtuk, hogy a bázis az eredetieké duálisa.



## Pldk végelem-interpolcira III.

- $V_h = H_0^h(\text{curl}, \Omega)$  az *első rendű* Nédélec-féle végelem-tér:
  - ▷ a  $\mathcal{T}_h$ -val jelölt *nem-degenerált* tetraéder-felosztáson definiált,
  - ▷ az egységssimplexén az alábbi bázisfüggvényekkel ( $\xi, \zeta, \eta$  jelöli a koordinátákat):

$$(1 - \eta - \zeta, \xi, \xi)^T, (\eta, 1 - \xi - \zeta, \eta)^T, (\zeta, \zeta, 1 - \xi - \eta)^T \\ \sqrt{2}(-\eta, \xi, 0)^T, \sqrt{2}(\zeta, 0, -\xi)^T, \sqrt{2}(0, -\zeta, \eta)^T.$$

- ▷ Tetszőleges tetraéderen: affin transzformációval definiáljuk.
- ▷  $V_h = H_0^h$ : Az egyes tetraédereken a fenti, a közs lapokon az érintő irányú komponens folytonos,  $\partial\Omega$ -n az érintő irányú komponens nulla.

## Folytats - Dulis bzis megadsa

- Jellje  $\{e_j\}_{j \in \mathcal{J}}$  az lek halmazt, s ezek rintvektorait  $\{\mathbf{e}_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ . Ekkor igazolhat, hogy egy dulis bzis:

$$\{E_j\}_{j \in \mathcal{J}}, \text{ ahol } \langle E_j, \phi \rangle = \int_{e_j} \mathbf{e}_j \cdot \phi$$

## Milyen legyen az interpolációs operátor?

- Legyen projekció a  $V_h$  altrre (azaz  $\Pi|_{V_h} = I$ ).
- rízze meg a peremfeltteleket.
  - ▷ Plda: Ha  $V = H^1(\Omega)$  s  $f \in H_0^1(\Omega)$ , akkor legyen  $\Pi(f) \in H_0^1(\Omega)$ .
- Legyen alkalmazható akrmilyen  $f \in W_p^s(\Omega)$  függvényre, ahol  $s \geq 0, p \geq 1$ . Az eljárás ne is függjön az  $s$  s  $p$  értékektől.
- Legyen alkalmazható akkor is, ha az egyes résztereken különböző rendű bázisfüggvények adottak.
- Legyen a diszkrét de Rham diagram kommutatív.
- Legyen az interpoláció kvázi optimális.

## Nhny korbbi eredmny

- ◇ [1] Scott s Zhang 1990. [2] Bernardi s Girault 1998. [3] Demkowicz 2005 s 2007. [4] Schberl 2005 s 2008.

	[?]	[?]	[?]	[?]
projekci	+	-	+	-
de Rham diagram kommutatv	-	-	+	+
peremfelttelek megrzse	+	-	+	-
alkalmazhat minden $(s, p)$ -re	-	+	-	+
klnbz rend bzisfggvnyek	-	-	+	-

## Az interpolcis eljrs

- Cl:  $V_h = \text{span} \{\phi_j\}_{j \in \mathcal{J}}$  eseten a  $\Pi\phi = \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j \phi_j$  kpletben szerepl  $a_i$  meghatrozsa.
- Alapgondolat [1]: interpoljunk rsztartomnyonknt, talljunk minden  $\phi_j$  bzisfggvnyhez egy megfelel  $M_j$  (altrtopolgiban nylt) interpolcis tartomnyt.
- Az  $a_j$  egytthatt az  $\phi|_{M_j}$  alapjn hatrozzuk meg.

## Feltételek $M_j$ s a “dulis bzis” $\{\psi_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ kivlasztshoz

- $\overline{M_j}$  (egy sszefgg sokasg) a vgeelem-feloszts rsztartomnyaibl ll.
- Minden  $\Phi = \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j \phi_j$  esetr az  $a_j$  egytthatt egyrtelmen meghatrozza az  $\phi|_{M_j}$  nyom, amely rtelmes.
- $\text{supp } \psi_j \subset M_j$  minden  $j \in \mathcal{J}$  esetr.
- $\langle \phi_i|_{M_j}, \psi_j \rangle = \delta_{ij}$  minden  $i, j \in \mathcal{J}$  esetr.

## A bizonyítás egy része

- Az interpoláció:

$$a_j = \langle \Phi|_{M_j}, \psi_j \rangle.$$

- Megjegyzések:

1. Feltesszük, hogy az előzőekben minden nyom és a bilineáris formák is értelmesek.
2. Az így kapott interpoláció a  $\psi_j$  választása miatt projekció lesz.
3. Ha az  $M_j$  halmazokat így választjuk, hogy  $\cup_{j \in \mathcal{J}} M_j \supset \partial\Omega$ , akkor a  $\Pi$  interpoláció a  $\partial\Omega$  halmazon a homogén peremfeltétet megőrzi.

## Plda egy dimenziban

- $\Omega = (0, 1)$ , a  $\{(0, \frac{1}{4}), (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), (\frac{3}{4}, 1)\}$  felosztással.
- $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}$  az els pldban trgyalt “kalapfggvnyek”, de most 0-ban s 1-ben is.
- $\{M_0, M_1, M_2, M_3, M_4\} = \{\{0\}, (0, \frac{1}{4}), (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), \{1\}\}$
- $\{\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4\} = \{\delta_0, 96x - 8, 96(x - \frac{1}{4}) - 8, 96(x - \frac{1}{2}) - 8, (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), \delta_1\}$
- Alkalmazs:  $\phi = \chi_{(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})}$ . Itt  $\int_{M_2} \phi \psi_2 = 1$ , egybknt  $j \neq 2$ -re  $\int_{M_j} \phi \psi_j = 0$ .  
Azaz  $\Pi(\chi) = \phi_2$ .



## A kvzi-optimális konvergenciáról

- A stabilitás (korlátosság) igazolása.

**Tétel 1** Legyenek  $s \geq 0$  és  $p \geq 1$  adottak,  $s$  tegye fel az interpolációs megadshoz szükséges feltételek teljesülnek. Ekkor létezik olyan, a felosztás finomságát megad  $h$ -től független  $C$  konstans, amellyel minden  $u \in W_p^s(\Omega)$  esetén

$$\|\Pi u\|_{s,p} \leq C \|u\|_{s,p}.$$

- Következmény: Kvzi-optimális igazolása.

**Tétel 2** Legyenek  $s \geq 0$  és  $p \geq 1$  adottak,  $s$  tegye fel az interpolációs megadshoz szükséges feltételek teljesülnek. Ekkor létezik olyan, a felosztás finomságát megad  $h$ -től független  $C$  konstans, amellyel minden  $u \in W_p^s(\Omega)$  esetén

$$\|u - \Pi u\|_{s,p} \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{s,p}.$$

## A kvzi-optimális konvergenciáról - folytatás

- *Bizonyítás:* A háromszög-egyenlenség, a projekciós tulajdonság és a stabilitás alapján kapjuk, hogy minden  $v \in V_h$  esetén

$$\begin{aligned}\|u - \Pi_{SZ}u\|_{s,p} &\leq \|u - v\|_{s,p} + \|v - \Pi_{SZ}u\|_{s,p} \\ &= \|u - v\|_{s,p} + \|\Pi_{SZ}v - \Pi_{SZ}u\|_{s,p} \\ &\leq \|u - v\|_{s,p} + \|\Pi_{SZ}v - \Pi_{SZ}u\|_{s,p} \\ &\leq (1 + C)\|u - v\|_{s,p},\end{aligned}$$

ami igazolja az állítást.  $\square$

## A kvazi-optimális konvergenciáról - folytatás

- Minden "fajta"  $M$  tartomnyon gy definiáljuk a rajt értelmezett bázis s dualis bázis, hogy az  $\hat{M}$  referenciatartomnyon értelmezett bázisfüggvényeket transzformáljuk: Ha

$$D_M : \hat{M} \rightarrow M,$$

akkor

$$\phi(x) = |\det D_M| \hat{\phi}(D_M^{-1}x) \text{ s } \psi(x) = |\det D_M| \hat{\psi}(D_M^{-1}x).$$

Ld. a fenti példát.

- Segédlemlék az 1. Tétel igazolásához.

**Lemma 1** Tegyük fel, hogy  $\{\phi_i\}_{i=1}^N \subset W_p^s(\Omega)$ , ahol  $s \in \mathbb{Z}$  s  $s \geq 1$ . Ekkor létezik olyan  $C$  konstans, amely független  $M$  től s  $p$ -től, s teljesül, hogy minden  $\phi \in \text{span} \{\phi_i\}_{i=1}^N$  s  $\psi \in \text{span} \{\psi_i\}_{i=1}^N$  esetén

$$\|\phi\|_{s,p,M} \leq Ch_M^{\frac{d}{p}-s} \|\hat{\phi}\|_{s,p,M} \quad (2)$$

*valamint*

$$\|\psi\|_{-s,q,M} \leq Ch_M^{s-\frac{d}{p}} \|\hat{\psi}\|_{-s,q,M}. \quad (3)$$

## Mg egy segdeszkz: negatív index Szoboljev-normk

**Definci 1** A  $W_q^{-s}(\Omega)$  Banach-tr a  $W_p^s(\Omega)$  tr dulis, teht az albbi normval ltjuk el:

$$\|v\|_{-s,q,\Omega} = \sup_{u \in W_p^s(\Omega)} \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|_{s,p,\Omega}}, \quad (4)$$

, ahol  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Igazolhat, hogy a (4)-ben elegend a szuprmumot  $u \in W_{0,p}^s(\Omega)$ -beli fggvnyekre venni:

$$\|v\|_{-s,q,\Omega} = \sup_{u \in W_{0,p}^s(\Omega)} \frac{\langle v, u \rangle}{\|u\|_{s,p,\Omega}}. \quad (5)$$

Megjegyzsek:

1. Klasszikus ( $v \in L_q(\Omega)$ -beli) fggvnyekre a  $\langle v, u \rangle$  dulis pr (4)-ben egyszeren  $\int_{\Omega} uv$ -val azonos.

2. Gyakran eleve a (5) formulát használjuk.
3. Nyilván minden  $u \in W_p^s(\Omega)$ ,  $v \in W_q^{-s}(\Omega)$  esetén

$$\langle v, u \rangle \leq \|u\|_{s,p,\Omega} \|v\|_{-s,q,\Omega}. \quad (6)$$

## A lemma bizonytsa

*Proof* Tetszleges  $\alpha$  multiindexre  $|\alpha| = s_1 \leq s$  esetn a vltoz transzformcijval kapjuk, hogy

$$\left( \int_M |\partial^\alpha \phi|^p \right)^{1/p} = \|\partial^\alpha \phi\|_{0,p,M} \leq Ch_k^{\frac{d}{p}-s_1} \|\partial^\alpha \hat{\phi}\|_{0,p,\hat{M}} \leq Ch_k^{\frac{d}{p}-s} \|\partial^\alpha \hat{\phi}\|_{0,p,\hat{M}}, \quad (7)$$

gy a  $\|\cdot\|_{s,p,M}$  norma defincijbl kapjuk (7)-t.

(3) igazolshoz jegyezzk meg, hogy  $s_1 = s$  esetn

$$\|\partial^\alpha \phi\|_{0,p,M} \geq C_0 h_k^{\frac{d}{p}-s} \|\partial^\alpha \hat{\phi}\|_{0,p,\hat{M}}$$

rvnyes csakgy, mint a  $|\cdot|_{s,p,\Omega}$  szeminormra:

$$|\phi|_{s,p,M} \geq Ch_M^{\frac{d}{p}-s} |\hat{\phi}|_{s,p,\hat{M}}. \quad (8)$$

A (5) formulat, a  $W_{0,p}^s(M)$ -beli normk ekvivalenciijt s (8)-et használva kapjuk, hogy minden  $\psi \in W_q^{-s}(M)$  esetr

$$\begin{aligned}
\|\psi\|_{-s,q,M} &= \sup_{\phi \in W_{0,p}^s(M)} \frac{\langle \psi, \phi \rangle_M}{\|\phi\|_{s,p,M}} \leq C \sup_{\phi \in W_{0,p}^s(M)} \frac{\langle \psi, \phi \rangle_M}{|\phi|_{s,p,M}} \\
&\leq C \sup_{\hat{\phi} \in W_{0,p}^s(\hat{M})} \frac{\langle \hat{\psi} \circ D_M^{-1}, \hat{\phi} \circ D_M^{-1} \rangle_{\hat{M}} |\det D_M^{-1}| |\det D_M|}{h_M^{\frac{d}{p}-s} |\hat{\phi}|_{s,p,\hat{M}}} \\
&\leq C \sup_{\hat{\phi} \in W_{0,p}^s(\hat{M})} \frac{\langle \hat{\psi} \circ D_M^{-1}, \hat{\phi} \circ D_M^{-1} \rangle_{\hat{M}}}{h_M^{\frac{d}{p}-s} \|\hat{\phi}\|_{s,p,\hat{M}}} \\
&= h_M^{s-\frac{d}{p}} \|\hat{\psi}\|_{-s,q,\hat{M}},
\end{aligned} \tag{9}$$

amit lltottunk.  $\square$



## Az 1. Tétel bizonyítása

*Proof* Az interpolci definciijt, (6), a 1 lemma erednyt hasznlva

$$\begin{aligned}
\|\Pi_{\text{SZ}}u\|_{s,p,M} &= \left\| \sum_{i \in \mathcal{I}} \phi_i \langle T_{\mathcal{M}_j}(u), \psi_i \rangle_M \right\|_{s,p,M} \leq \max_{i \in \mathcal{I}} \|\phi_i\|_{s,p,M} \sum_{i \in \mathcal{I}} \left| \langle T_{\mathcal{M}_j}(u), \psi_i \rangle_M \right| \\
&\leq C \max_{i \in \mathcal{I}} h_M^{\frac{d}{p}-s} \|\hat{\phi}_i\|_{s,p,M} \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{i \in \mathcal{I}} \left| \langle T_{\mathcal{M}_j}(u), \psi_i \rangle_M \right| \\
&\leq C h_M^{\frac{d}{p}-s} \max_{i \in \mathcal{I}} \|\hat{\phi}_i\|_{s,p,M} \sum_{i \in \mathcal{I}} \|\psi_i\|_{-s,q,M} \|u\|_{s,p,M} \\
&\leq C h_M^{\frac{d}{p}-s} \max_{i \in \mathcal{I}} \|\hat{\phi}_i\|_{s,p,M} \sum_{i \in \mathcal{I}} h_M^{s-\frac{d}{p}} \|\hat{\psi}_i\|_{-s,q,M} \|u\|_{s,p,M} \\
&\leq C h_M^{\frac{d}{p}-s} \max_{i \in \mathcal{I}} \|\hat{\phi}_i\|_{s,p,M} h_M^{s-\frac{d}{p}} \max_{i \in \mathcal{I}} \|\hat{\psi}_i\|_{-s,q,M} \|u\|_{s,p,M} \\
&\leq \|u\|_{s,p,M},
\end{aligned} \tag{10}$$

amit igazolni akartunk.  $\square$