Gravitációs vízhullámok modellezése és szimulációja

Izsák Ferenc

Problémamegoldó szeminárium, ELTE TTK
2011. november 18.

Miért modellezzük?

- Gyakorlati alkalmazások:

Miért modellezzük?

- Gyakorlati alkalmazások:
  - Vízi járművek tervezése

Miért modellezzük?

- Gyakorlati alkalmazások:
  - Vízi járművek tervezése
  - Tengerparti létesítmények tervezése

Miért modellezzük?

- Gyakorlati alkalmazások:
  - Vízi járművek tervezése
  - Tengerparti létesítmények tervezése
  - Fúrótornyok, tengeri vezetékek konstrukciója

Miért modellezzük?

- Gyakorlati alkalmazások:
  - Vízi járművek tervezése
  - Tengerparti létesítmények tervezése
  - Fúrótornyok, tengeri vezetékek konstrukciója
  - *Szökőár előrejelzése*

Miért modellezzük?

- Gyakorlati alkalmazások:
  - Vízi járművek tervezése
  - Tengerparti létesítmények tervezése
  - Fúrótornyok, tengeri vezetékek konstrukciója
  - *Szökőár előrejelzése*
- Érdekes.

Gyakorlati szimulációk 1.

- MARIN, Wageningen (NL)

Gyakorlati szimulációk 1.

- MARIN, Wageningen (NL)

Gyakorlati szimulációk 2.

- MARIN, Wageningen (NL)

Gyakorlati szimulációk 2.

- MARIN, Wageningen (NL)

Miért ez a modell?

- A dinamikát *elsősorban* a gravitáció határozza meg.

Miért ez a modell?

- A dinamikát *elsősorban* a gravitáció határozza meg.
- A hullámegyenlet nem alkalmas; inkább rugalmas közegben terjedő deformáció modellezésére használható. Különböző nagyságú hullámok a valóságban különböző sebességgel terjednek, asszerint pedig azonossal.

Az alapmodell

- Egy Σ tartomány „felett” modellezünk.

Az alapmodell

- Egy Σ tartomány „felett” modellezünk.
- Egyszerűsítések:

Az alapmodell

- Egy Σ tartomány „felett” modellezünk.
- Egyszerűsítések:
  - $\Sigma \subset \mathbb{R}$ korlátos - egy dimenziós eset

Az alapmodell

- Egy Σ tartomány „felett” modellezünk.
- Egyszerűsítések:
  - $\Sigma \subset \mathbb{R}$ korlátos - egy dimenziós eset
  - A medence alja vízszintes.

Az alapmodell (folyt.)

- Ismeretlen mennyiségek

Az alapmodell (folyt.)

- Ismeretlen mennyiségek
  - Vízmélység: $\eta : (0, T) \times \Sigma \to \mathbb{R}$

Az alapmodell (folyt.)

- Ismeretlen mennyiségek
  - Vízmélység: $\eta : (0, T) \times \Sigma \to \mathbb{R}$
  - Az áramlás sebességének potenciálfüggvénye: ϕ, azaz $\nabla\phi(t, \mathbf{x})$ az áramlás sebessége $(t, \mathbf{x})$-ben.

Az alapmodell (folyt.)

- Ismeretlen mennyiségek
  - Vízmélység: $\eta : (0, T) \times \Sigma \to \mathbb{R}$
  - Az áramlás sebességének potenciálfüggvénye: ϕ, azaz $\nabla\phi(t, \mathbf{x})$ az áramlás sebessége $(t, \mathbf{x})$-ben.
  - Maga a tartomány (1 dim. eset):

$$\Omega_t = \{(x, y) : x \in \Sigma,\ 0 < y < \eta(t, x)\}.$$

Ez is változik!

Az alapmodell (folyt.)

- Ismeretlen mennyiségek
  - Vízmélység: $\eta : (0, T) \times \Sigma \to \mathbb{R}$
  - Az áramlás sebességének potenciálfüggvénye: ϕ, azaz $\nabla\phi(t, \mathbf{x})$ az áramlás sebessége $(t, \mathbf{x})$-ben.
  - Maga a tartomány (1 dim. eset):

    $$\Omega_t = \{(x, y) : x \in \Sigma,\ 0 < y < \eta(t, x)\}.$$

    Ez is változik!
  - A hullámfelszín - a tartomány „teteje":

    $$\partial\Omega_{t,s} = \{(x, \eta(t, x)) : x \in \Sigma\}.$$

Az alapmodell (folyt.)

- Ismeretlen mennyiségek
  - Vízmélység: $\eta : (0, T) \times \Sigma \to \mathbb{R}$
  - Az áramlás sebességének potenciálfüggvénye: ϕ, azaz $\nabla\phi(t, \mathbf{x})$ az áramlás sebessége $(t, \mathbf{x})$-ben.
  - Maga a tartomány (1 dim. eset):
    $$\Omega_t = \{(x, y) : x \in \Sigma,\ 0 < y < \eta(t, x)\}.$$
    Ez is változik!
  - A hullámfelszín - a tartomány „teteje":
    $$\partial\Omega_{t,s} = \{(x, \eta(t, x)) : x \in \Sigma\}.$$
- Jelölés: $\boldsymbol{\nu}(t, x, y)$ - Ω_t kifelé mutató normálisa (x, y)-ban.

A dinamikát leíró egyenletek

- Feltevés: a sebességmező örvénymentes.

A dinamikát leíró egyenletek

- Feltevés: a sebességmező örvénymentes.
  Kapjuk:
  $$0 = \nabla \cdot \nabla \phi = \Delta \phi. \tag{1}$$

A dinamikát leíró egyenletek

- Feltevés: a sebességmező örvénymentes.
  Kapjuk:
  $$0 = \nabla \cdot \nabla \phi = \Delta \phi. \tag{1}$$
- A hullámfelszín olyan sebességgel mozog, amilyen ott az áramlás.

A dinamikát leíró egyenletek

- Feltevés: a sebességmező örvénymentes.
  Kapjuk:
  $$0 = \nabla \cdot \nabla \phi = \Delta \phi. \tag{1}$$
- A hullámfelszín olyan sebességgel mozog, amilyen ott az áramlás.
  Kapjuk:
  $$\begin{aligned}(-\partial_x \eta(t,x), 1) \cdot (\partial_x \phi, \partial_y \phi)(t,x,y) &= \\ = \partial_{\boldsymbol{\nu}} \phi(t,x,y) = \partial_t \eta(t,x) \quad (x,y) &\in \partial\Omega_{t,s}\end{aligned} \tag{2}$$
- A hullámfelszínen igaz a Bernoulli-törvény (állandó külső nyomást feltételezve).

A dinamikát leíró egyenletek

- Feltevés: a sebességmező örvénymentes.
  Kapjuk:
  $$0 = \nabla \cdot \nabla \phi = \Delta \phi. \tag{1}$$

- A hullámfelszín olyan sebességgel mozog, amilyen ott az áramlás.
  Kapjuk:
  $$\begin{aligned}(-\partial_x \eta(t,x), 1) \cdot (\partial_x \phi, \partial_y \phi)(t,x,y) = \\ = \partial_{\boldsymbol{\nu}} \phi(t,x,y) = \partial_t \eta(t,x) \quad (x,y) \in \partial\Omega_{t,s}\end{aligned} \tag{2}$$
- A hullámfelszínen igaz a Bernoulli-törvény (állandó külső nyomást feltételezve).
  Kapjuk:
  $$\partial_t \phi + \frac{1}{2}|\nabla \phi|^2 + \eta = 0 \quad \partial\Omega_{t,s}\text{-on} \tag{3}$$

A dinamikát leíró egyenletek (folyt.)

- A tartomány peremének maradék részén Neumann-peremfeltétel adott azaz,

$$\partial_{\boldsymbol{\nu}}\phi(t,x,y) \quad (x,y) \in \partial\Omega \setminus \partial\Omega_{t,s}.$$

A dinamikát leíró egyenletek (folyt.)

- A tartomány peremének maradék részén Neumann-peremfeltétel adott azaz,

$$\partial_{\boldsymbol{\nu}}\phi(t,x,y) \quad (x,y) \in \partial\Omega \setminus \partial\Omega_{t,s}.$$

Ha nem lép fel erőhatás, akkor ez nulla.

A dinamikát leíró egyenletek (folyt.)

- A tartomány peremének maradék részén Neumann-peremfeltétel adott azaz,

$$\partial_{\boldsymbol{\nu}} \phi(t, x, y) \quad (x, y) \in \partial\Omega \setminus \partial\Omega_{t,s}.$$

Ha nem lép fel erőhatás, akkor ez nulla.

Ha fellép erőhatás:

A dinamikát leíró egyenletek (folyt.)

- A tartomány peremének maradék részén Neumann-peremfeltétel adott azaz,

$$\partial_{\boldsymbol{\nu}} \phi(t, x, y) \quad (x, y) \in \partial\Omega \setminus \partial\Omega_{t,s}.$$

Ha nem lép fel erőhatás, akkor ez nulla.

Ha fellép erőhatás:

  - hullámgenerátor, hajó oldala - oldalt
  - földrengés - alul

Szokásos egyszerűsítések - bonyolítások

- Hullámegyenlet.

Szokásos egyszerűsítések - bonyolítások

- Hullámegyenlet.
- Sekélyvízi egyenlet.

Szokásos egyszerűsítések - bonyolítások

- Hullámegyenlet.
- Sekélyvízi egyenlet.
- Boussinesq -approximáció (sekélyvízi, különböző terjedési sebesség, 4-edrendű).

Szokásos egyszerűsítések - bonyolítások

- Hullámegyenlet.
- Sekélyvízi egyenlet.
- Boussinesq -approximáció (sekélyvízi, különböző terjedési sebesség, 4-edrendű).
- Korteweg - De Vries (KdV) - egyenlet (sekélyvízi, különböző terjedési sebesség, 3-adrendű).

Szokásos egyszerűsítések - bonyolítások

- Hullámegyenlet.
- Sekélyvízi egyenlet.
- Boussinesq -approximáció (sekélyvízi, különböző terjedési sebesség, 4-edrendű).
- Korteweg - De Vries (KdV) - egyenlet (sekélyvízi, különböző terjedési sebesség, 3-adrendű).
- A fentiekben a második peremfeltétel linearizációja. Az előző egyszerűsítése, analitikus megoldhatóság, szolitonok.

Szokásos egyszerűsítések - bonyolítások

- Hullámegyenlet.
- Sekélyvízi egyenlet.
- Boussinesq -approximáció (sekélyvízi, különböző terjedési sebesség, 4-edrendű).
- Korteweg - De Vries (KdV) - egyenlet (sekélyvízi, különböző terjedési sebesség, 3-adrendű).
- A fentiekben a második peremfeltétel linearizációja. Az előző egyszerűsítése, analitikus megoldhatóság, szolitonok.
- Áramlásra a Laplace-egyenlet helyett a Navier - Stokes - egyenleteket használni.

Nehézségek

- Elmélet.

Nehézségek

- Elmélet.
  - Megoldás létezése - erős regularitási feltételek.

Nehézségek

- Elmélet.
  - Megoldás létezése - erős regularitási feltételek.
  - Mozgó perem, nemlineáris peremfeltételek.

Nehézségek

- Elmélet.
  - Megoldás létezése - erős regularitási feltételek.
  - Mozgó perem, nemlineáris peremfeltételek.
- Numerikus szimulációk.

Nehézségek

- Elmélet.
  - Megoldás létezése - erős regularitási feltételek.
  - Mozgó perem, nemlineáris peremfeltételek.
- Numerikus szimulációk.
  - Különböző skálák: vízmélység - hullámmagasság.

Nehézségek

- Elmélet.
  - Megoldás létezése - erős regularitási feltételek.
  - Mozgó perem, nemlineáris peremfeltételek.
- Numerikus szimulációk.
  - Különböző skálák: vízmélység - hullámmagasság.
  - Hosszú szimulációs idő: 1-2 nap - stabilitás.

Próbálkozások, eredmények

- Lehetséges algoritmus vázlata:

Próbálkozások, eredmények

- Lehetséges algoritmus vázlata:
  - Adott Ω_{t_n}.

Próbálkozások, eredmények

- Lehetséges algoritmus vázlata:
  - Adott Ω_{t_n}.
  - A harmadik peremfeltétellel kiszámítjuk az áramlást

Próbálkozások, eredmények

- Lehetséges algoritmus vázlata:
  - Adott Ω_{t_n}.
  - A harmadik peremfeltétellel kiszámítjuk az áramlást
  - A második peremfeltétel szerint pedig mozgatjuk a peremet, és kapjuk $\Omega_{t_{n+1}}$-et.

Próbálkozások, eredmények

- Lehetséges algoritmus vázlata:
  - Adott Ω_{t_n}.
  - A harmadik peremfeltétellel kiszámítjuk az áramlást
  - A második peremfeltétel szerint pedig mozgatjuk a peremet, és kapjuk $\Omega_{t_{n+1}}$-et.
- Mi ezzel a probléma?

Próbálkozások, eredmények

- Lehetséges algoritmus vázlata:
  - Adott Ω_{t_n}.
  - A harmadik peremfeltétellel kiszámítjuk az áramlást
  - A második peremfeltétel szerint pedig mozgatjuk a peremet, és kapjuk $\Omega_{t_{n+1}}$-et.
- Mi ezzel a probléma?
  - Explicit; nem lesz stabil:

Próbálkozások, eredmények

- Lehetséges algoritmus vázlata:
  - Adott Ω_{t_n}.
  - A harmadik peremfeltétellel kiszámítjuk az áramlást
  - A második peremfeltétel szerint pedig mozgatjuk a peremet, és kapjuk $\Omega_{t_{n+1}}$-et.
- Mi ezzel a probléma?
  - Explicit; nem lesz stabil:
  - sok kis időlépés alatt a hiba nő,

Próbálkozások, eredmények

- Lehetséges algoritmus vázlata:
    - Adott Ω_{t_n}.
    - A harmadik peremfeltétellel kiszámítjuk az áramlást
    - A második peremfeltétel szerint pedig mozgatjuk a peremet, és kapjuk $\Omega_{t_{n+1}}$-et.
- Mi ezzel a probléma?
    - Explicit; nem lesz stabil:
    - sok kis időlépés alatt a hiba nő,
    - vagy nem is konvergál az időlépés finomításával, vagy stabillá tehető, de extrém kis időlépést kell venni, amivel nagyon hosszú ideig fut.

Kívánalmak, numerikus módszer választása

- Egy nagy hullám (utazóhullám) sebességét pontosan kövesse milliós nagyságrendű időlépésen keresztül.

Kívánalmak, numerikus módszer választása

- Egy nagy hullám (utazóhullám) sebességét pontosan kövesse milliós nagyságrendű időlépésen keresztül.
- Maradjon meg a rendszer össz energiája.

Kívánalmak, numerikus módzser választása

- Egy nagy hullám (utazóhullám) sebességét pontosan kövesse milliós nagyságrendű időlépésen keresztül.
- Maradjon meg a rendszer össz energiája.
- Stabil maradjon inhomogén Neumann-peremfeltételek esetén is (földrengés, mozgó objektum által keltett hullám).

Diszkretizáció

- Milyen módszert válasszunk?

Diszkretizáció

- Milyen módszert válasszunk?
  - Véges differencia - bonyolult mozgatni, vagy az osztópontok számát kell változtatni.

Diszkretizáció

- Milyen módszert válasszunk?
  - Véges differencia - bonyolult mozgatni, vagy az osztópontok számát kell változtatni.
  - Végeselem - egyszerűbb mozgatás, egyszerűbb analízis.

Diszkretizáció

- Milyen módszert válasszunk?
  - Véges differencia - bonyolult mozgatni, vagy az osztópontok számát kell változtatni.
  - Végeselem - egyszerűbb mozgatás, egyszerűbb analízis.
- Végeselem - módszert választunk.

Diszkretizáció (folyt.)

- Vízszintesen N_x, függőlegesen N_y osztópont minden lépésben.

Diszkretizáció (folyt.)

- Vízszintesen N_x, függőlegesen N_y osztópont minden lépésben.
- $\{\eta_j(x)\}_{j=1}^{N_x}$, $\{\phi_j(x,y)\}_{j=1}^{N_x \cdot N_y}$ az osztópontokhoz tartozó Lagrange-bázisfüggvények.

Diszkretizáció (folyt.)

- Vízszintesen N_x, függőlegesen N_y osztópont minden lépésben.
- $\{\eta_j(x)\}_{j=1}^{N_x}$, $\{\phi_j(x,y)\}_{j=1}^{N_x \cdot N_y}$ az osztópontokhoz tartozó Lagrange-bázisfüggvények.
- $\eta(t,x) \approx \sum_{j=1}^{N_x} a_j(t)\eta_j(x)$

Diszkretizáció (folyt.)

- Vízszintesen N_x, függőlegesen N_y osztópont minden lépésben.
- $\{\eta_j(x)\}_{j=1}^{N_x}$, $\{\phi_j(x,y)\}_{j=1}^{N_x \cdot N_y}$ az osztópontokhoz tartozó Lagrange-bázisfüggvények.
- $\eta(t,x) \approx \sum_{j=1}^{N_x} a_j(t)\eta_j(x)$
- $\phi(t,x,y) \approx \sum_{j=1}^{N_x \cdot N_y} b_j(t)\phi_j(x,y)$

Diszkretizáció (folyt.)

- Vízszintesen N_x, függőlegesen N_y osztópont minden lépésben.
- $\{\eta_j(x)\}_{j=1}^{N_x}$, $\{\phi_j(x,y)\}_{j=1}^{N_x \cdot N_y}$ az osztópontokhoz tartozó Lagrange-bázisfüggvények.
- $\eta(t,x) \approx \sum_{j=1}^{N_x} a_j(t)\eta_j(x)$
- $\phi(t,x,y) \approx \sum_{j=1}^{N_x \cdot N_y} b_j(t)\phi_j(x,y)$
- Közönséges differenciálegyenlet-rendszert kapunk, ahol az ismeretlenek az $\{a_j(t)\}_{j=1}^{N_x}$, $\{b_j(t)\}_{j=1}^{N_x \cdot N_y}$ függvények.

A variációs elv

- Hamilton-elv: egy rendszer úgy mozog, hogy a „hatásfüggvény” $\mathcal{L}$ a lehető legkisebb.

A variációs elv

- Hamilton-elv: egy rendszer úgy mozog, hogy a „hatásfüggvény” $\mathcal{L}$ a lehető legkisebb.
- A megfelelő szélsőérték feladat (Euler - Lagrange egyenletek) felírásával kapható az (1)-(3) rendszer.

  Azaz azt használjuk, hogy az összes lehetséges iránymenti derivált nulla.

A variációs elv

- Hamilton-elv: egy rendszer úgy mozog, hogy a „hatásfüggvény” $\mathcal{L}$ a lehető legkisebb.
- A megfelelő szélsőérték feladat (Euler - Lagrange egyenletek) felírásával kapható az (1)-(3) rendszer.

  Azaz azt használjuk, hogy az összes lehetséges iránymenti derivált nulla.
- Luke '67: $\mathcal{L}$ konkrét megadása:

$$\mathcal{L}(\phi,\eta) = \int_0^T \int_0^L \partial_t \eta(t,x)\phi(t,x) - \frac{1}{2}\eta^2(t,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_0^T \int_0^L \int_0^{\eta(t,x)} \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2. \tag{4}$$

A variációs elv (folyt.)

- Ötlet: diszkretizáljuk ezt!

A variációs elv (folyt.)

- Ötlet: diszkretizáljuk ezt!

  Azokat az egyenleteket írjuk fel, amelyek az η_t-vel

  $$\partial_{\eta_j}\mathcal{L} = 0 \quad \text{és} \quad \partial_{\phi_j}\mathcal{L} = 0$$

  egyenlőségekből adódnak.

A variációs elv (folyt.)

- Ötlet: diszkretizáljuk ezt!

  Azokat az egyenleteket írjuk fel, amelyek az η_t-vel

  $$\partial_{\eta_j}\mathcal{L} = 0 \quad \text{és} \quad \partial_{\phi_j}\mathcal{L} = 0$$

  egyenlőségekből adódnak.

- Jó numerikus eredmények, de inhomogén Neumann-peremfeltételek esetén instabil.

Hamilton - rendszer

- Motiváció: olyan numerikus módszert keresünk, amellyel a rendszer össz energiája megmarad.

Hamilton - rendszer

- Motiváció: olyan numerikus módszert keresünk, amellyel a rendszer össz energiája megmarad.
- Össz energia: Hamilton - függvény ($\mathcal{H}$)

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}(p(t,\cdot), q(t,\cdot)),$$

ahol p és q az energiát meghatározó két mennyiség (általánosított helyzet és momentum).

Hamilton - rendszer

- Motiváció: olyan numerikus módszert keresünk, amellyel a rendszer össz energiája megmarad.
- Össz energia: Hamilton - függvény ($\mathcal{H}$)

  $$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}(p(t,\cdot), q(t,\cdot)),$$

  ahol p és q az energiát meghatározó két mennyiség (általánosított helyzet és momentum).
- A rendszer dinamikáját az energiák „egymásba alaklulása" adja meg:

  $$\begin{cases} \partial_q \mathcal{H}(t) = p \\ \partial_p \mathcal{H}(t) = -q. \end{cases}$$

Hamilton - rendszer

- Motiváció: olyan numerikus módszert keresünk, amellyel a rendszer össz energiája megmarad.
- Össz energia: Hamilton - függvény ($\mathcal{H}$)

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}(p(t,\cdot), q(t,\cdot)),$$

  ahol p és q az energiát meghatározó két mennyiség (általánosított helyzet és momentum).
- A rendszer dinamikáját az energiák „egymásba alaklulása” adja meg:

$$\begin{cases} \partial_q \mathcal{H}(t) = p \\ \partial_p \mathcal{H}(t) = -q. \end{cases}$$

- A hullámok dinamikáját is le lehet így írni (Zakharov, '68).

Hamilton - rendszer

- Mire jó ez?

Hamilton - rendszer

- Mire jó ez?
  - Speciális numerikus módszereket fejleszettek ki Hamilton -féle *közönséges differenciálegyenletek* megoldására, amelyek az össz energiát „jól megtartják”.

Hamilton - rendszer

- Mire jó ez?
    - Speciális numerikus módszereket fejlesztettek ki Hamilton -féle *közönséges differenciálegyenletek* megoldására, amelyek az össz energiát „jól megtartják".
- A (1)-(3) diszkretizált alakja ilyen lesz?

Hamilton - rendszer

- Mire jó ez?
  - Speciális numerikus módszereket fejleszettek ki Hamilton -féle *közönséges differenciálegyenletek* megoldására, amelyek az össz energiát „jól megtartják”.
- A (1)-(3) diszkretizált alakja ilyen lesz?
  - Az eredeti $\{a_j(t)\}_{j=1}^{N_x}, \{b_j(t)\}_{j=1}^{N_x \cdot N_y}$ ismeretlenekre nézve biztosan nem.

Hamilton - rendszer

- Mire jó ez?
  - Speciális numerikus módszereket fejleszettek ki Hamilton -féle *közönséges differenciálegyenletek* megoldására, amelyek az össz energiát „jól megtartják”.
- A (1)-(3) diszkretizált alakja ilyen lesz?
  - Az eredeti $\{a_j(t)\}_{j=1}^{N_x}, \{b_j(t)\}_{j=1}^{N_x \cdot N_y}$ ismeretlenekre nézve biztosan nem.
- $\partial_{\mathbf{a}}\mathcal{H}(t) = \mathbf{b}$ esetén a kettő dimenziója meg kell, hogy egyezzen.

Hamilton - rendszer konstrukciója

- A $\{b_j(t)\}_{j=1}^{N_x \cdot N_y}$ együtthatófüggvényeket kifejezzük csak a peremen levőkkel (azokból N_x van).

Hamilton - rendszer konstrukciója

- A $\{b_j(t)\}_{j=1}^{N_x \cdot N_y}$ együtthatófüggvényeket kifejezzük csak a peremen levőkkel (azokból N_x van).
  - Ehhez a diszkrét Dirichlet - Neumann operátort használunk.

Hamilton - rendszer konstrukciója

- A $\{b_j(t)\}_{j=1}^{N_x \cdot N_y}$ együtthatófüggvényeket kifejezzük csak a peremen levőkkel (azokból N_x van).
  - Ehhez a diszkrét Dirichlet - Neumann operátort használunk.
- Ezzel Hamilton-rendszer nyerhető a diszkretizált feladatra.

Hamilton - rendszer kezelése

- Szimplektikus numerikus módszerek alkalmazása.

Hamilton - rendszer kezelése

- Szimplektikus numerikus módszerek alkalmazása.
  - Monográfia a témakörről:

    Hairer - Lubich - Wanner: Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations, Springer, 2006.

Hamilton - rendszer kezelése

- Szimplektikus numerikus módszerek alkalmazása.
  - Monográfia a témakörről:

    Hairer - Lubich - Wanner: Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations, Springer, 2006.
- Szükséges lenne magasabb rendű.

Hamilton - rendszer kezelése

- Szimplektikus numerikus módszerek alkalmazása.
  - Monográfia a témakörről:

    Hairer - Lubich - Wanner: Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations, Springer, 2006.
- Szükséges lenne magasabb rendű.
- Fontos lenne a pontos hibaanalízis a benne szereplő konstansok meghatározásával.

Hamilton - rendszer kezelése

- Szimplektikus numerikus módszerek alkalmazása.
  - Monográfia a témakörről:

    Hairer - Lubich - Wanner: Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations, Springer, 2006.
- Szükséges lenne magasabb rendű.
- Fontos lenne a pontos hibaanalízis a benne szereplő konstansok meghatározásával.
- Lehetséges könnyítés:

Hamilton - rendszer kezelése

- Szimplektikus numerikus módszerek alkalmazása.
  - Monográfia a témakörről:

    Hairer - Lubich - Wanner: Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations, Springer, 2006.
- Szükséges lenne magasabb rendű.
- Fontos lenne a pontos hibaanalízis a benne szereplő konstansok meghatározásával.
- Lehetséges könnyítés:
  - mindent linearizált peremfeltétel esetén.

További feladatok

- Ugyanez Navier - Stokes egyenletekre.

További feladatok

- Ugyanez Navier - Stokes egyenletekre.
- Átbukó hullámok modellezése.